微分積分学入門

横田 壽

目次

第 0 章　序章 (INTRODUCTION) 1

0.1　数 (NUMBERS) 1

0.2　累乗 4

0.3　不等式 6

0.4　絶対値の不等式 8

第 1 章　関数 (FUNCTIONS) 11

1.1　関数の定義 (definition of function) 11

1.2　初等関数 (elementary functions) 17

1.3　関数の極限 (limit of function) 26

1.4　連続関数 (continuous functions) 31

1.5　数列 (sequences) 38

1.6　オイラー e(Euler e) と超越関数 45

1.7　*実数の連続性 (continium) 55

第 2 章　微分法 (DIFFERENTIATION) 59

2.1　導関数 (derivatives) 59

2.2　微分法 (Differentiation Formulas) 67

2.3　高次導関数 (higher-order derivatives) 73

2.4　平均値の定理と関数の性質 (mean-value theorem and properties of functions) 76

2.5　曲線の概形 (curve sketching) 83

2.6　不定形の極限値 (limit of indeterminate forms) 88

2.7　Taylor の定理 (Taylor's theorem) 92

第 3 章　積分法 (INTEGRATION) 97

3.1　不定積分 (indefinite integrals) 97

3.2　置換積分法 (integration by substitution) 101

3.3　部分積分法 (integration by parts) 103

3.4　有理関数の積分法 (integration of rational functions) 105

3.5 三角関数の積分法 (integration of trigonometric functions) 111
3.6 無理関数の積分法 (integration of irrational functions) 114
3.7 定積分 (definite integral) 117
3.8 定積分の計算 (calculation of integrals) 122
3.9 定積分の定義の拡張 (extension of definite integrals) 124
3.10 定積分の応用 (applications of definite integral) 130

第 4 章 級数 (SERIES) 137
4.1 級数の定義 (definition of series) 137
4.2 正項級数 (nonnegative term series) 141
4.3 交項級数 (alternating series) 145
4.4 *関数項級数 (series of functions) 147

第 5 章 ベクトル関数 (VECTOR FUNCTIONS) 155
5.1 ベクトル関数 (vector functions) 155
5.2 曲線 (space curves) 158
5.3 点の運動 (motion of objects) 164

第 6 章 偏微分法 (PARTIAL DIFFERENTIATION) 169
6.1 関数の定義 (definition of functions) 169
6.2 偏導関数 (partial derivatives) 171
6.3 関数の極限 (limit of function) 175
6.4 全微分 (total differential) 179
6.5 gradient と方向微分 (grad and directional derivatives) 184
6.6 合成関数の偏微分法 (differentiation of composite functions) 188
6.7 2 変数関数の極値 (extreme values) 190
6.8 陰関数 (implicit functions) 194
6.9 条件付極値 (extremum with side conditions) 199

第 7 章 重積分法 (MULTIPLE INTEGRATION) 203
7.1 2 重積分 (double integrals) 203
7.2 累次積分 (repeated integrals) 206
7.3 変数変換 (change of variables) 210
7.4 広義積分 (improper integrals) 214
7.5 2 重積分の応用 (application of double integrals) 216
7.6 3 重積分 (triple integrals) 222

第 8 章 ベクトル解析 (VECTOR ANALYSIS) 231

8.1 曲面 (surface) 231
8.2 スカラー場とベクトル場 (scalar field and vector field) 234
8.3 ベクトル場の発散 (divergence of vector field) 239
8.4 線積分 (line integrals) 242
8.5 面積分 (surface integrals) 246
8.6 ベクトル積分定理 (integral theorems of vector field) 249

付録 A 確認問題解答 261

付録 B 演習問題解答 275

索引 295

まえがき

世の中で起きている、またはこれから起きるかもしれない現象の本質を探ろうとするのが科学(サイエンス) です．今話題の環境問題，バイオ，生命情報など，21 世紀に発展するだろうと思われる学問も，すべてサイエンスです．これらの現象の本質の探り方でここ数十年の間に目覚しく発展してきているのが、現象の定式化とよばれるものです。

ここ２，３百年の間に、多くの現象が定式化されてきましたが、ここ数十年の間のコンピュータの発達により、複雑な式を解く、解を近似することなどが可能になり、今まで分からなかったことも少しずつ解明してきました．

では、定式化を行うには何が必要なのでしょうか。古典的な物理現象の場合，まず、物体の時間による変化や位置による変化と、基本となる法則が必要となります．ここで，物体の時間による変化とは、物体の速度、つまり微分が必要になります。基本となる法則とは、例えば、ニュートンの第２法則、別名、運動方程式などです．これらを用いて作った式が本当に現象を正しく表しているのかを知るために、その現象を再現するような実験が必要だったり、規模が大きくて再現ができないようなものは、コンピュータでのシミュレーションを行ったりすることになります．

コンピュータを用いてシミュレーションを行うためには、定式化された式から解を近似するいろいろなテクニックを学ばなければなりません．さらに、コンピュータが読めるようなプログラムを書く方法も学ばなければならなりません．

これらのことを学ぶには、しっかりとした数学の基礎を作っておくのが結局のところ一番の早道なのです．その理由は，定式化された式は、基本的に微分や偏微分を持って表されているし、解を近似するテクニックには、Taylor の定理、中間値の定理など微積分学で学ぶ内容で理解できるものがほとんどなのです．

このテキストは，0 章を除いて 60 分の講義で 1 節が終わるように構成されていて，全部で 54 節あります．そのうち，微積分学ではちょっと高等すぎるかなと思われるところには*印をつけました．

最後に本書が微分積分学への入門書としての役割を果たし，各専門分野での勉学の架け橋となることを願います．

2004 年 3 月

著者

第 0 章

序章 (INTRODUCTION)

0.1　数 (NUMBERS)

数学ではいろいろな数を扱います．その中で物を数えるときとか順番を付けるときに用いられる数

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

を**自然数 (natural numbers)** といいます．

数学では，新しいオブジェクト (数，多項式，行列など) が登場すると必ずそれらの四則演算を考えます．幼稚園か小学校の低学年のころを思い出してください．数が数えられるようになったら，次に何をしましたか．例えば，2 と 5 を加えたりしたでしょう．そのあと，2 から 5 を引こうとして困ったことがありませんでしたか．困って当然です．なぜなら 2 - 5 は自然数ではないからです．そこで，これらの計算ができるように自然数に負の符号を付けたものと 0 を加えて

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

のように数を拡張して，これを**整数 (integers)** とよびました．これで，$2 - 5 = -3$ という計算ができるようになったわけです．小学校も 4 年生くらいになると，6 を 3 で割りなさいという，割り算が登場します．6 を 3 で割るとは，6 個のものを 3 つのグループに分けると考えると，1 つのグループに 2 個となります．これを式で表すと $6 \div 3 = 2$ となります．では，5 を 3 で割ったらいくつになるのだろうかという疑問を持つ小学生が沢山います．$5 \div 2$ は整数ではありません．そこで，さらに数の拡張が必要となります．0 でない整数 m で任意の整数 n を割った数を $\frac{n}{m}$ と表し，これを**有理数 (rational numbers)** とよびます．有理数を用いることにより，$5 \div 2 = \frac{5}{2}$ と表すことができるようになるわけです．分母が 1 の場合を考えると，整数も有理数であることが分かります．また，分数 $\frac{5}{2}$ を 2.5 のように少数で表すこともします．少数には，$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$ のように，同じ数が繰り返すものがあります．これらを**循環小数**といいます．循環小数は繰り返す数字の上に記号 ($\dot{}$) をつけて表します．例えば，

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$$

となります．

例題 0.1

次の分数を少数で表してみましょう．

(1) $\dfrac{1}{9}$　(2) $\dfrac{10}{11}$

解

(1)　$\frac{1}{9} = 0.1111\ldots = 0.\dot{1}$

(2)　$\frac{10}{11} = 0.90909\ldots = 0.\dot{9}\dot{0}$　■

少数が循環小数ではないのに終わりなく続くとき，どんな数を表しているのかという疑問を持つ小学生が沢山います．この疑問に答える一つの方法として，中学生で学ぶ三平方の定理があります．これは直角三角形の斜辺の長さの 2 乗は，その他の 2 辺の 2 乗の和と等しいというものです．z を斜辺の長さ，x, y をその他の 2 辺の長さとすると，$x^2 + y^2 = z^2$ という式が成り立ちます．ここで，$x = 3, y = 4$ のときの z は，$z^2 = 25$ となります．この式を満たす z，つまり，2 乗したら 25 になる数のことを 25 の**平方根 (square root)** といいます．したがって，25 の平方根は 5 と -5 となります．これをまとめて，± 5 と表します．これより $z = \pm 5$ となりますが，z は斜辺の長さより，$z = 5$ となります．

直角三角形で $x = 1, y = 1$ のとき，$z^2 = 2$ となります．つまり，z は 2 の平方根となります．2 乗したら 2 になる数を記号 ($\sqrt{\ }$) を用いて，$\sqrt{2}$ または $-\sqrt{2}$ と表します．ここで，$\sqrt{2}$ とは，2 乗したら 2 になる数のうち正の数と定義されます．一般に，$x^n = a$ となる x を a の n **乗根 (nth root)** といいます．

例題 0.2

次の値を求めてみましょう．

(1) 4 の平方根　(2) 8 の 3 乗根　(3) -8 の 3 乗根

解

(1)　$2^2 = 4, (-2)^2 = (-2)(-2) = 4$ より，4 の平方根は 2 と -2 である．

(2)　$2^3 = 8, (-2)^3 = -8$ より，3 乗して 8 になるのは 2 だけである．したがって，8 の 3 乗根は 2 である．

(3)　2. の説明により，-8 の 3 乗根は -2 である．■

さて，$\sqrt{2}$ は有理数でしょうか．もし，$\sqrt{2}$ が有理数ならば，$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ と表せるはずです．ここで，p と q が公約数を含んでいるなら，その公約数で p と q を割り，p と q には公約数がない状態にしておきます．このような p と q を**互いに素 (relatively prime)** であるといいます．$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ の両辺を 2 乗し分母を払うと，

$$2q^2 = p^2 \tag{1}$$

となります．左辺は 2 の倍数ですから偶数です．ということは，右辺も偶数なので，p^2 は 2 の倍数となります．2 乗して偶数になるには，もともとが偶数でないと無理です．なぜなら，奇数

と奇数をかけると奇数になってしまうからです．したがって，p は偶数です．そこで，$p = 2p_1$ と表し，式 (1) に代入すると，

$$2q^2 = 4p_1^2$$

となります．両辺を 2 で割ると $q^2 = 2p_1^2$ となり，右辺は偶数です．したがって，左辺も偶数となり，q は 2 の倍数です．これでは，p も q も 2 の倍数となり，p と q は互いに素であるという仮定に矛盾します．つまり，$\sqrt{2}$ が有理数であるという仮定が間違っているということになります．よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではないとなります．このような証明の方法は**背理法 (contrapositive)** とよばれています．

では，$\sqrt{2}$ はどんな数なのでしょうか．$\sqrt{2}$ を少数で表すと，数字が繰り返されることなく終わりなく続きます．ここで，やっと小学生が抱く疑問の一つの答えが出ました．少数が終わりなく続く数が実際に存在することが分かったのです．そこで，このような数を**無理数 (irrational numbers)** とよびます．無理数には，$\sqrt{2}$ の他にも $\sqrt{3}, \pi$ などがあります．実際，無理数と有理数を一つずつ対応させると，有理数が足りなくなってしまうほど無理数は沢山あります．

有理数と無理数をあわせて**実数 (real numbers)** といいます．実数は，図 1 に示す**数直線 (number line)** 上の点で表すことができます．つまり，実数全体の集まりが数直線に対応しているということです．この実数全体の集まりを記号 $\mathcal{R}$，有理数全体の集まりを記号 $\mathcal{Q}$，整数全体の集まりを記号 $\mathcal{Z}$ を用いて表し，x が実数であるということを，$x \in \mathcal{R}$ と表します．整数は英語の Integers の I を用いずに，ドイツ語の Zahlen の Z を用いるのが慣わしになっています．

図 1　数直線

集合の話が出たついでに微分積分学で用いる他の記号についても見ておきましょう．

オブジェクト x は集合 A の要素である	$x \in A$
オブジェクト x は集合 A の要素ではない	$x \notin A$
集合 A は集合 B の部分集合である	$A \subset B$
集合 A と集合 B の和集合	$A \cup B$
集合 A と集合 B の積集合	$A \cap B$
A と集合 B の直積	$A \times B$
空集合	ϕ
性質 P を持つ要素 x の集合	$\{x : P\}$
命題 P と命題 Q は同値である	$P \Leftrightarrow Q$

数直線上において，原点からある数までの距離をその数の**絶対値 (absolute value)** といいます．例えば，数直線上で -3 の点と原点との距離は 3 なので，-3 の絶対値は 3 となります．こ

れを記号 (| |) を用いて，

$$|-3| = 3$$

と表します．

ある数を文字 a を用いて表すと，数 a の絶対値は次のように表されます．

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

例題 0.3

$a = 3, b = -6$ のとき，次の値を求めてみましょう．

(1) $|a|$　(2) $|b|$　(3) $|a+b|$　(4) $|a|+|b|$　(5) $|ab|$　(6) $|a||b|$

解

1. $|a| = |3| = 3$　2. $|b| = |-6| = 6$
3. $|a+b| = |3+(-6)| = |3-6| = |-3| = 3$
4. $|a|+|b| = |3|+|-6| = 3+6 = 9$
5. $|ab| = |3(-6)| = |-18| = 18$　6. $|a||b| = |3||-6| = 3(6) = 18$ ■

絶対値を含む演算では，一般に次の関係が成り立ちます．

$$|a+b| \leq |a|+|b|,\ ||a|-|b|| \leq |a-b|,\ |ab| = |a||b|,\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

0.2　累乗

同じ数を 2 回以上かけあわせたものを，その数の**累乗 (power)** または**べき**といいます．例えば，a を 3 回かけあわせたとすると，「a の 3 乗」といい，a^3 と表します．このとき，a を**底 (base) テイ**といい，かけた回数を添え字として右肩に小さく書き**指数 (exponent)** といいます．

例題 0.4

次の値を求めてみましょう．

(1) 2^2,　(2) 2^3,　(3) $(-2)^2$,　(4) $(-2)^3$

解

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4,\ 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, (-2)^2 = (-2)(-2) = 4,\ (-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$ ■

累乗どうしの掛け算はそれほど難しくはありません．例えば，a^3 と a^4 をかけると，a を 3 回と 4 回の合計 7 回かけることになるので，

$$a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$$

一般に，$a > 0$ で m, n が整数のとき，

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

が成り立ちます．さて，累乗どうしの割り算はどうでしょうか．例えば，a^5 を a^2 で割ってみましょう．

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3 = a^{5-2}$$

となります．次に，a^2 を a^5 で割ってみましょう．

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3}$$

となります．ちょっと不便ですね．そこで，

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

と定め，これを**負の指数 (negative exponent)** といいます．これを用いれば，

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3} = a^{-3}$$

と表せます．一般に，m, n が整数のとき，

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

が成り立ちます．

例題 0.5

次の値を求めてみましょう．

(1) $a^3 \times a^4$　(2) $a^3 \div a^4$　(3) $(a^3)^4$　(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

解

(1) $a^3 \times a^4 = a^{3+4} = a^7$　(2) $a^3 \div a^4 = a^{3-4} = a^{-1}$　(3) $(a^3)^4 = a^{3\times 4} = a^{12}$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$ ■

$x^n = a$ を満たす x を a の n 乗根ということを以前説明しました．これを記号で表そうとすると，n が偶数か奇数かと a が正，零，負によって異なるので，簡単ではありません．そこで，一般に，$a^{\frac{n}{m}}$ と表すときには，$a > 0$ であるという条件をつけます．さて，$a^{\frac{n}{m}}$ とはなんでしょうか．$a^{\frac{1}{m}}$ は $\sqrt[m]{a}$ のことです．したがって，

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$$

となります．このようにして，指数を整数から有理数へと拡張することができます．これより，$a, b > 0$, $r_1, r_2 \in \mathcal{Q}$ のとき，次の指数公式が成り立ちます．

1. $a^{r_1} \times a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$
2. $a^{r_1} \div a^{r_2} = a^{r_1-r_2}$
3. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$

4. $(ab)^{r_1} = a^{r_1}b^{r_1}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$

これをさらに有理数から実数へと拡張しようとするためには，極限値の話が必要となります．

確認問題

1. 次の数は有理数か無理数か答えよう．
(a) $\dfrac{4}{7}$ (b) $\dfrac{\pi}{4}$

2. 次の数の絶対値を求めよう．
(a) -3.0 (b) π

3. $a = 2, b = -3, c = -5$ のとき，次の値を求めよう．
(a) $|a + b + c|$ (b) $|a - b + c|$

4. 次の値を求めよう．
(a) $9^{\frac{3}{2}}$ (b) $27^{-\frac{1}{3}}$

5. $a > 0$, n を整数とするとき，次の式を簡単にしよう．
(a) $\sqrt[4]{a^5}$ (b) $\sqrt{a^{-2}\sqrt[3]{a}}$ (c) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^{-2}} \div a^{\frac{1}{6}}$

6. 次の式を簡単にしよう．
(a) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$ (b) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$ (c) $(4\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$

7. 次の分母または分子を有理化しよう．
(a) $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}}$ (c) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}$

0.3 不等式

微積分では不等式を解くことが要求されます．そこで，ここでは，不等式の解き方について学びます．不等式を解く方法は，方程式を解く方法とよく似ています．不等号の向きは，両辺に同じものを加えたり，両辺から同じものを引いたり，両辺に同じ正の数をかけたりしても変わりません．しかし，両辺に負の数をかけると不等号の向きは反転します．つまり，$x - 2 < 5$ の両辺に 2 を加えると，$x - 2 + 2 < 5 + 2$ となり，これより $x < 7$ となります．また，$2x < 10$ の両辺に $\frac{1}{2}$ をかけると $\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(10)$ となり，これより $x < 5$ となります．しかし，$-2x < 10$ の両辺に $-\frac{1}{2}$ をかけると不等号の向きが逆になり，$-\frac{1}{2}(-2x) > -\frac{1}{2}(10)$ となります．これを整理すると，$x > -5$ を得ます．ここで，求めた不等式を数直線上に記してみましょう．例えば，$x > -5$ は -5 より大きな全ての実数を表しています．そこで，$x > -5$ と書く代わりに，区間を用いて $(-5, \infty)$ と書くことができます．
区間 $[a, b]$ を集合を用いて表すと

$$[a, b] = \{x \in \mathcal{R} : a \leq x \leq b\}$$

区間 (a, b) を集合を用いて表すと

$$(a, b) = \{x \in \mathcal{R} : a < x < b\}$$

区間 $(-\infty, b]$ を集合を用いて表すと

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathcal{R} : -\infty < x \leq b\}$$

区間 (a, ∞) を集合を用いて表すと

$$(a, \infty) = \{x \in \mathcal{R} : a < x < \infty\}$$

となります．

例題 0.6

次の不等式を解いてみましょう．

$$\frac{1}{2}(1 + x) \leq 6$$

解 この不等式を解くには，x の周りにあるものを除いてやればよいでしょう．まず，両辺を 2 倍することにより $\frac{1}{2}$ を除きます．

$$1 + x \leq 12$$

次に，1 を両辺から引くと，

$$x \leq 11$$

したがって，不等式の解は $(-\infty, 11]$ となります． ■

例題 0.7

次の不等式を解いてみましょう．

$$\frac{1}{5}(x^2 - 4x + 3) < 0$$

解 まず，両辺を 5 倍することにより $\frac{1}{5}$ を除きます．

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

この 2 次式を因数分解すると，

$$(x - 1)(x - 3) < 0$$

積 $(x - 1)(x - 3)$ が 0 になるのは，1 と 3 です．そこで，これらの点を数直線上に白抜きまるで印を付けておきます． これにより，数直線は次の 3 つの区間に分割されます．

$$(-\infty, 1),\ (1, 3),\ (3, \infty)$$

これらの区間内では，積 $(x - 1)(x - 3)$ の符号 (sgn) は変わりません．

$(-\infty, 1)$　$\mathrm{sgn}[(x - 1)(x - 3)] = (-)(-) = +$

$(1, 3)$　$\mathrm{sgn}[(x - 1)(x - 3)] = (+)(-) = -$

$(3, \infty)$　$\mathrm{sgn}[(x - 1)(x - 3)] = (+)(+) = +$

これより，不等式の解は $(1, 3)$ となります． ■

例題 0.8

次の不等式を解いてみましょう．

$$\frac{x+2}{1-x} \geq 1$$

解 まず，両辺に-1 を加えて右辺の 1 を削除します．

$$\frac{x+2}{1-x} - 1 \geq 0$$

整理すると

$$\frac{x+2-(1-x)}{1-x} \geq 0$$
$$\frac{2x+1}{1-x} \geq 0$$

ここで，分母を払うのですが $1-x$ をかけて払うと，$1-x$ の符号を気にする必要があります．そこで，$(1-x)^2$ を両辺にかけて分母を払うと

$$(2x+1)(1-x) \geq 0$$

となります．積 $(2x+1)(1-x)$ が 0 になるのは，$-\frac{1}{2}$ と 1 です．そこで，これらの点を数直線上に白抜きまるで印を付けておきます． 次に，等号は分子が 0 のときだけ満たされるので，$-\frac{1}{2}$ の点を黒く塗ります．これにより，数直線は次の 3 つの区間に分割されます．

$$(-\infty, -\frac{1}{2}],\ [-\frac{1}{2}, 1),\ (1, \infty)$$

$(-\infty, -\frac{1}{2}]$　$\mathrm{sgn}[(2x+1)(1-x)] = (-)(+) = -$
$[-\frac{1}{2}, 1)$　$\mathrm{sgn}[(2x+1)(1-x)] = (+)(+) = +$
$(1, \infty)$　$\mathrm{sgn}[(2x+1)(1-x)] = (+)(-) = -$
これより，不等式の解は $[-\frac{1}{2}, 1)$ となります． ■

0.4　絶対値の不等式

実数 a の絶対値は

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \quad |a| = \max\{a, -a\},\ |a| = \sqrt{a^2}$$

で与えられます．ここで，2 つのギリシャ文字 δ(デルタ) と ε(イプシロン) を用います．

まず，不等式

$$|x| < \delta$$

を考えます．ただし，δ は正の数．$|x| < \delta$ とは，x が原点から δ の範囲内にあるということです．つまり，x は $-\delta$ から δ の間にあるということです．したがって，

$$|x| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < \delta \tag{2}$$

次に，$|x-c| < \delta$ とは，x が点 c から δ の範囲にあるということです．したがって，

$$|x-c| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x-c < \delta \Leftrightarrow c-\delta < x < c+\delta \tag{3}$$

最後に，$0 < |x-c| < \delta$ とは，$0 < |x-c|$ でかつ $|x-c| < \delta$ であるということです．最初の不等号は $x \neq c$ であるといっています．したがって，

$$0 < |x-c| < \delta \Leftrightarrow c-\delta < x < c \text{ or } c < x < c+\delta \tag{4}$$

となります．

例題 0.9

次の不等式を解いてみましょう．

$$|x+2| < 3$$

解 式 (3) より，

$$|x+2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+2 < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1$$

したがって，不等式の解は $(-5, 1)$ ■

$\varepsilon > 0$ のとき，$|a| > \varepsilon$ とは，原点から a までの距離が ε より大きいことを表している．したがって，

$$|a| > \varepsilon \Leftrightarrow a > \varepsilon \text{ or } a < -\varepsilon \tag{5}$$

例題 0.10

次の不等式を解いてみましょう．

$$|2x+3| > 5$$

解 式 (5) より，

$$|2x+3| > 5 \Leftrightarrow 2x+3 > 5 \text{ or } 2x+3 < -5$$

最初の不等式から $2x > 2$ よって $x > 1$. また，2 つ目の不等式から $2x < -8$ よって $x < -4$. したがって，不等式の解は $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$ ■

微分積分学の基本的な不等式の中に，**三角不等式 (triangle inequality)** とよばれるものがあります．

定理 0.1

全ての実数 a, b に対して

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

が成り立つ．

証明 $|x|$ を $\sqrt{x^2}$ とおくと証明は簡単です．まず，

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

両辺の平方根をとると，

$$\sqrt{(a+b)^2} \leq |a| + |b|$$

ここで，

$$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$$

であることに注意すると，不等式が得られる． ■

微分積分学で用いられる不等式には，次のものもあります．

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

確認問題

1. 次の不等式を解こう．

(a) $2 + 3x \leq 5$　(b) $\frac{1}{2}(1+x) < \frac{1}{3}(1-x)$　(c) $4(x^2 - 3x + 2) > 0$

(d) $\frac{1}{x} < x$　(e) $\frac{x^2 - 9}{x+1} > 0$　(f) $\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-6} > 0$

2. どちらが大きいか比較しよう．

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}}, \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

3. 次の不等式を解こう．

(a) $|x| < 2$　(b) $|x+2| < \frac{1}{4}$　(c) $0 < |x-3| < 8$　(d) $|2x+5| > 3$

4. 全ての実数 a, b に対して，

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

が成り立つことを示そう．

第 1 章

関数 (FUNCTIONS)

1.1 関数の定義 (definition of function)

2 つの集合の間の関係を決める規則を関数といいます．ここでは，実数の集合を考えます．$\mathcal{R}$ を実数全体の集合とします．

ある実数の集合 D に属する各数 x に対して，実数 y が 1 つ定まるような規則 f を D から $\mathcal{R}$ への **1 価関数 (single-valued function)**，または単に関数といいます．また，各数 x に対して，実数 y が 2 つ以上定まるような規則を **多価関数 (multi-valued function)** といい, 共に $f : D \longrightarrow \mathcal{R}$ で表わし， y は x の関数であるといい， $y = f(x)$ で表わします．このとき，x を独立変数， y を従属変数といいます．

例題 1.1

$-1 \leq x \leq 1$ の各数 x に対して，実数 y が x の 2 乗を 4 倍したものと， x の 3 乗を -3 倍したものの和となるように定めた規則 f は 1 価関数でしょうか．また， $f(x)$ を求めてみましょう．

解 各数 x に対して， $4x^2 - 3x^3$ という実数 y が 1 つ定まるので f は 1 価関数です．また，$f(x) = 4x^2 - 3x^3$ となります． ■

このように変数 x と定数との間に足し算，引き算，掛け算という 3 つの演算を用いて得られた関数 $f(x) = 4x^2 - 3x^3$ を整式といいます．また， $f(x)$ を x の 2 乗の 6 倍と x を 3 倍したものの和で割って得られる関数

$$g(x) = \frac{f(x)}{6x^2 + 3x} = \frac{4x^2 - 3x^3}{6x^2 + 3x}$$

を有理関数といいます．さらに， $g(x)$ の平方根をとって得られる関数

$$h(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\frac{4x^2 - 3x^3}{6x^2 + 3x}}$$

を無理関数といいます．

上の関数の定義にでてきた D を関数 f の **定義域 (domain)** といい $D(f)$ で表わします．つまり， $D(f)$ は $f(x)$ が実数となるような実数 x の集合のことです．そこで，これを

$$D(f) = \{x \in \mathcal{R} : f(x) \in \mathcal{R}\}$$

と表わします．ここで，$x \in R$ とは，x は R の元である．つまり x は実数であることを意味しています．

また，$f(x)$ を x の **像 (image)** といい，その集合を **値域 (range)** といい $R(f)$ で表わします．つまり，

$$R(f) = \{y \in \mathcal{R} : y = f(x), x \in D(f)\}$$

これら x と $f(x)$ を xy 平面上に点として描いていくと，関数 f のグラフとよばれるものができます．つまり，集合 $\{(x, y) : y = f(x), x \in D(f)\}$ が関数 f の **グラフ (graph)** で，$G(f)$ で表わします．

例題 1.2

$g(x) = \dfrac{4x^2 - 3x^3}{6x^2 + 3x}$ の定義域を求めてみましょう．

解

$$D(g) = \{x \in R : g(x) \in R\} = \{x \in R : \frac{4x^2 - 3x^3}{6x^2 + 3x} \in R\}$$

ここで，$\dfrac{4x^2 - 3x^3}{6x^2 + 3x}$ が実数になるには分母が $6x^2+3x \neq 0$ であることに注意すると，$6x^2+3x = 3x(2x+1) \neq 0$ より

$$D(g) = \{x : x \neq 0, -\frac{1}{2}\} = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty) \ \blacksquare$$

例題 1.3

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ の定義域と値域を求め，$f(x)$ のグラフを描いてみましょう．

解

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in R : f(x) \in R\} = \{x \in R : \sqrt{x^2 - 1} \in R\} = \{x : x^2 - 1 \geq 0\} \\ &= (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \end{aligned}$$

また値域は

$$R(f) = \{y \in R : y = f(x), x \in D(f)\} = \{y \in R : 0 \leq y\}$$

となり，そのグラフは図 1.1 で与えられます．$\blacksquare$

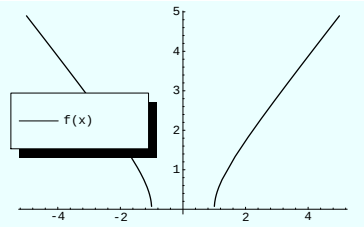


図 1.1　f(x) のグラフ

さて，関数 $f(x)$, $g(x)$ の作られ方をみていると， $f(x)$ と $g(x)$ の間に四則の演算を定義することができるでしょう．

定義 1.1

$x \in D(f) \cap D(g)$ のとき，
(1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
(2) $(fg)(x) = f(x)g(x)$
(3) $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$

例題 1.4

区分的に定義された次の 2 つの関数の和，差，積を求めよう．

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2x, & x < 1 \\ 1-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

解 区分的に定義された関数の和，差，積を求めるには，2 つの関数の区分を同じにする必要があります．つまり，

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ -2x, & 0 < x < 1 \\ 1-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

とします．こうすれば，後は対応する区分での和，差，積をとればよいことになります．したがって，

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 1-2x-x^2, & x \leq 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} 1+2x-x^2, & x \leq 0 \\ 3x, & 0 < x < 1 \\ -1+2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x)g(x) = \begin{cases} -2x+2x^3, & x \leq 0 \\ -2x^2, & 0 < x < 1 \\ x-x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

となります．■

合成関数 (composite functions)

1.1 で関数どうしの四則の演算について学びました．ここでは関数どうしのつなぎ方として，**合成法則 (composition)** とよばれる方法について考えます．

まず，$f(x)$ と $g(x)$2 つの関数を用意します．次に任意の x に対して規則 g を用いて 1 つの実数 $g(x)$ を取り出します．もしこの $g(x)$ が関数 $f(x)$ の定義域に入っていれば，規則 f を用いて 1 つの実数 $f(g(x))$ を取り出すことができるでしょう．ところで，この実数 $f(g(x))$ は何なのでしょうか．

もし $g(x)$ の値域が $f(x)$ の定義域に含まれていれば，$g(x)$ の定義域内の各数 x に対して，$f(g(x))$ を作ることができます．これは $g(x)$ の定義域内の各数 x に対し，ただ 1 つの実数 $f(g(x))$ を定める規則と考えられます．よってこの規則を f と g の **合成関数 (composite function)** といい，$f \circ g$ で表わすと $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ となります．

例題 1.5

$f(x) = x^2 - 5$，$g(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ のとき $(f \circ g)(x), (g \circ f)(x)$ を求めてみましょう．

解

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - 5 = (\frac{1}{x} + 1)^2 - 5$$

となり，また $(g \circ f)(x)$ を求めると

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} + 1 = \frac{1}{x^2 - 5} + 1 = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5}$$

となります．■

このように，合成の順序を変えると答が違ってくることがあります．これは実生活の中でも経験します．例えば，10,000 円の商品を 1 割増しにしたものを 1,000 円引で売るのと，1,000 円引にしてから 1 割増しにするので値段が違うことと同じ関係です．

逆関数 (inverse functions)

関数 f の定義域 $D(f)$ 内の任意の 2 数 x_1, x_2 に対して，

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成り立つとき，f は **1 対 1 の関数 (one-to-one function)** であるといいます．ここで $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ とは，x_1 と x_2 が異なるならば，$f(x_1)$ と $f(x_2)$ は異なることを意味しています．この場合，値域 $\mathcal{R}(f)$ の各数 y に対して，$y = f(x)$ であるような x を 1 つ定めるような規則が考えられます (なぜでしょうか)．これを f の **逆関数 (inverse function)** とよび，f には逆関数が存在するといいます．また，f の逆関数を f^{-1} で表わします．f^{-1} の定義域は $\mathcal{R}(f)$ で値域は $D(f)$ です．つまり，

$$f^{-1} : \mathcal{R}(f) \longrightarrow D(f),\ x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

です．なお，このとき f^{-1} の独立変数は y で，従属変数は x ですが，独立変数を表わすときは x を使うのになれているので， x と y を入れ替えて $y = f^{-1}(x)$ と表わすことがよくあります．つまり，

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

合成関数を用いて表わすと

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = x$$

となります．

例題 1.6

$y = f(x) = x^3 + 1$ は 1 対 1 の関数か調べてみましょう．
解 1 対 1 であるためには

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

を示せばよいのですが，実際の問題ではこの対偶をとって

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

を示すほうが簡単です．そこで

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \\ &\Longrightarrow x_1^3 = x_2^3 \\ &\Longrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0 \\ &\Longrightarrow (x_1 - x_2)[(x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3x_2^2}{4}] = 0 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

より $f(x)$ は 1 対 1 の関数であることが示せました． ■

関数のグラフが描ける場合，x 軸と平行に線を引いて，2 点以上グラフと交わるとこの関数は 1 対 1 ではありません．

もう少しして，微分について学ぶと関数 f が 1 対 1 か調べるのに便利な方法があります．関数 f の定義域 $D(f)$ に含まれる任意の 2 数 x_1, x_2 に対して，

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つとき， $D(f)$ において，関数 f は **狭義の単調増加関数 (strictly increasing function)** であるといい，

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

が成り立つとき， $D(f)$ において，関数 f は **狭義の単調減少関数 (strictly decreasing function)** であるといいます．これらをあわせて狭義の単調関数といいます．この定義から明らかなように (なぜなら $f(x_1)$ と $f(x_2)$ はいつも異なる)，狭義の単調関数は 1 対 1 になります．よって次の定理を得ます．

定理 1.1

[逆関数定理] 狭義の単調増加 (または減少) 関数 f に対して，関数 f^{-1} が存在し，すべての $x \in R(f)$ に対し

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

が成り立つ．

例題 1.7

逆関数定理を利用して

$$y = f(x) = \frac{3x+1}{x-2},\ -\infty < x < 2$$

の逆関数 f^{-1} を求めてみましょう．

解 まず，この関数が 1 対 1 の関数であることを示します．

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-2} = \frac{3x_2+1}{x_2-2} \\ &\Longrightarrow 3x_1x_2 - 6x_1 + x_2 - 2 = 3x_1x_2 + x_1 - 6x_2 - 2 \\ &\Longrightarrow -7x_1 + 7x_2 = 0 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

次に $f(f^{-1}(x)) = x$ を用います．

$$f(f^{-1}(x)) = f(y) = \frac{3y+1}{y-2} = x$$

これを y について解くと $3y+1 = xy - 2x$．よって $y = f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ となります． ■

確認問題

1. x の値が 1 のとき $f(x)$ の値を求めよう．

(a) $f(x) = |2-x|$　(b) $f(x) = 4 + 10x - x^2$　(c) $f(x) = 1 + \cos(x-1)$

2. 次の関数の定義域と値域を求めよう．

(a) $f(x) = x^2 - 1$　(b) $g(x) = \sqrt{1-x}$　(c) $h(x) = |\sin x|$

3. $y = \frac{1}{x}$ および $y = \sqrt{x}$ のグラフをもとに次の関数のグラフの概形を描こう．

(a) $y = \dfrac{1}{x} + 1$　(b) $y = \sqrt{1-x}$

4. 次の関数 $f(x), g(x)$ について，$(f \circ g)(x)$ と $g(f(x))$ を求めよう．

(a) $f(x) = 2x+5,\ g(x) = x^2$　(b) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1},\ g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

5. 次の関数は 1 対 1 の関数か調べ，もしそうならば，逆関数を求めよう．

(a) $f(x) = 7x - 4$　(b) $f(x) = (x+1)^3 + 2$　(c) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

6　関数 $f(x)$ は，$x \in D(f)$ で，$f(-x) = f(x)$ を満たすとき**偶関数 (even function)** であるといい，$f(-x) = -f(x)$ を満たすとき**奇関数 (odd function)** であるといいます．次の関数は偶関数か奇関数か調べよう．

(a) $f(x) = x^3$　(b) $f(x) = x(x^2+1)$

演習問題

1.　次の規則は 1 価関数か多価関数か調べよう．

(a) $y^2 = x,\ x > 0$　(b) $y^3 = x^2$

2.　次の関数の定義域を求め，$f(x)$ のグラフを描こう．

(a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$　(b) $h(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2-3x^3}{6x^2+3x}}$

3.　次の関数 $f(x), g(x)$ について，$(f \circ g)(x)$ と $g(f(x))$ を求めよう．

(a) $f(x) = 2x-1,\ g(x) = x^2+1$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ 1+x, & x \geq 1 \end{cases}$

4.　次の関数の逆関数を求めよう．

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2},\ -2 < x$　(b) $f(x) = x^2+4x-2$

5.　次の関数は偶関数か奇関数か調べよう．

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-|x|}$　(b) $f(x) = \sin x$

6.　次の問いに答えよう．

(a) 偶関数と偶関数の積と偶関数と奇関数の積はどうなるか.

(b) 偶関数の特徴と奇関数の特徴について述べよう．

1.2　初等関数 (elementary functions)

これから微分積分学を学んでいく上で必要な関数をまとめておきます．

整式 (polynomial)

変数 x と定数との間に，加法，減法，乗法の 3 つの演算を有限回行なって得られる関数を **整関数 (polynomial)** といいます．つまり，

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

有理関数 (rational function)

変数 x と定数との間に，加法，減法，乗法，除法の 4 つの演算を有限回行なって得られる関数を **有理関数 (rational function)** といいます．つまり，

$$Q(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)},\ P_1(x), P_2(x) \text{ 整式}$$

無理関数 (irrational function)

変数 x と定数との間に，加減乗除の 4 つの演算のほかに，さらに開法 (n 乗根を求める演算) を有限回行なって得られる関数を **無理関数 (irrational function)** といいます．つまり

$$\sqrt[n]{Q(x)},\ Q(x) \text{ 有理関数}$$

三角関数 (trigonometric function)

直角を 90 度とする表わし方を度数法といいますが，90 という数字に大切な意味があるのでしょうか．別に直角は 100 度でもよかったのではないでしょうか．実際，度数法は数学を勉強していくうえで，十分ではありません．そこで，ここでは弧度法とよばれる角の測り方について，考えてみます．図 1.2 のように，原点を O とし，単位円 $x^2+y^2=1$ の周上に点 $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{P}(x,y)$ をとり， $\angle\mathrm{POA}$ を θ とおきます．点 P が単位円周上を一周したときの円周の長さは 2π．またそのときの角 θ を度数法で表わすと 360 度となります．同様に，単位円周上を $\dfrac{1}{4}$ 動けば，そのときの弧の長さは $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，角 θ は 90 度となることが分かります．この考え方をもう少し広げて，弧 AP の長さが 1 となるときの角 $\angle\mathrm{POA}$ を 1 弧度 (radian) と表わしたのが **弧度法 (radian)** とよばれるものです．これより，次のような関係式が生まれます．

$\angle\mathrm{POA}$ が度数法で x， 弧度法で θ のとき，

$$\frac{x}{360}=\frac{\theta}{2\pi}$$

これより，主要な角を度数法と弧度法で表わすと次のようになります．

度数	0	30	45	60	90	120	150	180	360
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

弧度法を用いると点 P の座標を角 $\theta=\angle\mathrm{POA}$ の関数と考えて次のような関数を定義することができます．これらをまとめて三角関数とよびます．

$$y=\sin\theta,\ x=\cos\theta,\ \frac{y}{x}=\tan\theta$$

$$\frac{x}{y}=\cot\theta,\ \frac{1}{x}=\sec\theta,\ \frac{1}{y}=\mathrm{cosec}\theta$$

ただ一般的にこれらの関数は，θ の代わりに x を変数とした形で与えられます．つまり

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x$$

$$y=\cot x,\ y=\sec x,\ y=\mathrm{cosec}x$$

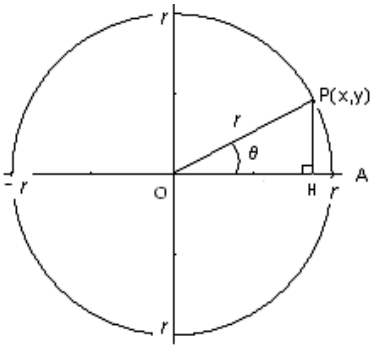


図 1.2　三角関数

例題 1.8

任意の角 θ に対して，

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

が成り立つことを示してみましょう．

解 図 1.2 で動径 OP の長さは 1 より

$$x^2 + y^2 = 1$$

また，$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$.　したがって，

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \blacksquare$$

例題 1.9

図 1.2 より $f(x) = \sin x$ のグラフを描いてみましょう．

解　図 1.2 において $f(-\theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$ となることが分かります．したがって，$f(x) = \sin x$ は奇関数です．演習問題 1-1-6b で，奇関数の特徴は原点対称なグラフであることを学びました．そこで，$y = \sin x$ のグラフを描くには，x の値が 0〜π までのときの y の値を調べればよいことが分かります．図 1.2 より，$\theta = 0$ のとき $y = \sin 0 = 0$. $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y = \sin(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{2}$. このように θ の値を変えながら y の値を調べると，

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

となり，対称性を用いると図 1.3 のようなグラフが得られます．

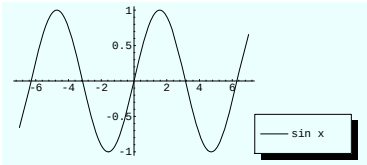


図 1.3　sin x

例題 1.10

不等式

$$2\sin\theta \geq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

を解いてみましょう．

解 $2\sin\theta \geq 1$ より $\sin\theta \geq \frac{1}{2}$．これを満たす範囲を図示すると，

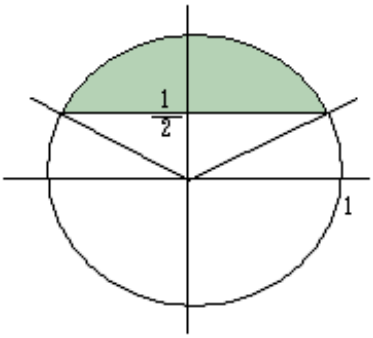


図 1.4

図 1.4 より，$\sin\theta \geq \frac{1}{2}$ を満たす θ は

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$$

となります．■

例題 1.11

図 1.2 より $f(x) = \cos x$ のグラフを描いてみましょう．

解 図 1.2 において $f(-\theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$ となることが分かります．したがって，$f(x) = \cos x$ は偶関数です．演習問題 1-1-6b で，偶関数の特徴は y 軸対称なグラフであることを学びました．そこで，$y = \cos x$ のグラフを描くには，x の値が 0〜π までのときの y の値を調べればよいことが分かります． 図 1.2 において $\theta = 0$ のとき $y = \cos 0 = 1$．$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y = \sin(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$．このように θ の値を変えながら y の値を調べると，

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

となり，対称性を用いると図 1.5 のようなグラフが得られます．

図 1.5　cos x

例題 1.12

不等式

$$\sqrt{2}\cos\theta > 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

を解いてみましょう．

解 $\sqrt{2}\cos\theta > 1$ より $\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$. これを満たす範囲を図示すると，

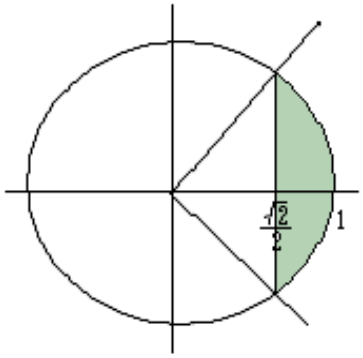


図 1.6

図 1.6 より，$\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} < \theta \leq 2\pi$$

となります． ■

例題 1.13

図 1.2 より $f(x) = \tan x$ のグラフを描いてみましょう．

解 図 1.2 において

$$f(-\theta) = \tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

となるので，したがって，$f(x) = \tan x$ は奇関数です．演習問題 1-1-6b で，奇関数の特徴は原点対称なグラフであることを学びました．また，

$$f(\frac{\pi}{2}) = \tan\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$$

より，$f(x) = \tan x$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で，定義されていません．そこで，$y = \tan x$ のグラフを描くには，x の値が $0 \sim \frac{\pi}{2}$ までのときの y の値を調べればよいことが分かります． 図 1.2 において $\theta = 0$

のとき $y = \cos 0 = 1$．$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y = \sin(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$．このように θ の値を変えながら y の値を調べると，

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}$	∞

となり，対称性を用いると図 1.7 のようなグラフが得られます．

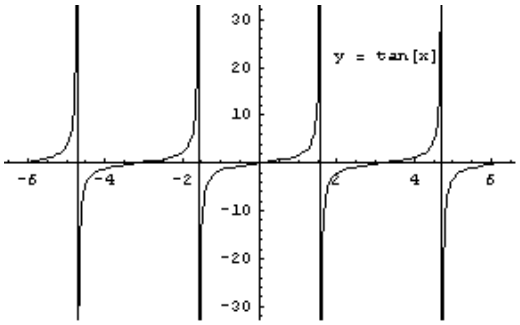


図 1.7　tan x

例題 1.14

不等式

$$\tan\theta > 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

を解いてみましょう．

解 $\tan\theta > 1$ を満たす範囲を図示すると，

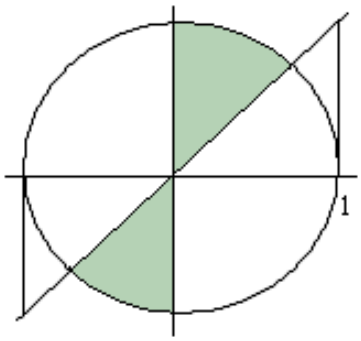


図 1.8

図 1.8 より，$\tan\theta > 1$ を満たす θ は

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

となります．■

逆三角関数 (inverse trigonometric function)

閉区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を定義域としたとき， $y = \sin x$ は 1 対 1 の関数になるので，逆関数を考えることができます．この関数を

$$y = \sin^{-1} x \text{ または } y = \arcsin x$$

と表わし，**逆正弦関数 (arc sine)** といいます．この関数の定義域は $y = \sin x$ の値域 $[-1, 1]$ となり，値域は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ となります．つまり

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y \ (-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$$

という関係が成り立ちます．このとき y の値域を **逆正弦関数の主値 (principle value of arc sine)** といいます．なぜなら $x = \sin y$ となる y の値は区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 以外にも沢山あるのに，区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ から y を選ぶと決めたからです．

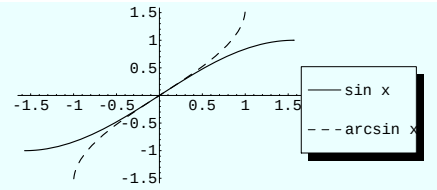


図 1.9　arcsin x

例題 1.15

$\sin^{-1}(-1)$ はどうやったら求まるのでしょうか．

解 まず $y = \sin^{-1}(-1)$ とは $-1 = \sin y$ のことなのですが，このとき y の値は $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ の中に入っていなければなりません．そこで $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ の中から $-1 = \sin y$ となる y を捜すと，$y = -\frac{\pi}{2}$ を得るでしょう．この値が $\sin^{-1}(-1)$ となります．■

閉区間 $[0, \pi]$ を定義域としたとき， $y = \cos x$ は 1 対 1 の関数になるので，逆関数を考えることができます．この関数を

$$y = \cos^{-1} x \text{ または } y = \arccos x$$

と表わし，**逆余弦関数 (arc cosine)** といいます．この関数の定義域は $y = \cos x$ の値域 $[-1, 1]$ となり，値域は $[0, \pi]$ となります．つまり

$$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y \ (-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$$

という関係が成り立ちます．このとき y の値域を **逆余弦関数の主値 (principle value of arc cosine)** といいます．

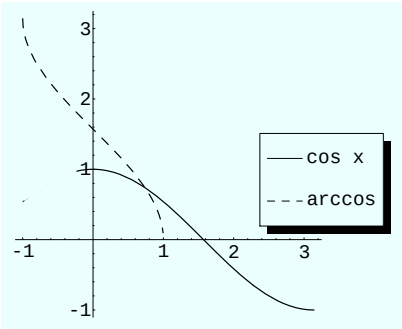


図 1.10　arccos x

開区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を定義域としたとき， $y = \tan x$ は 1 対 1 の関数になるので，逆関数を考えることができます．この関数を

$$y = \tan^{-1} x \text{ または } y = \arctan x$$

と表わし，**逆正接関数 (arc tangent)** いいます．この関数の定義域は $y = \tan x$ の値域 $(-\infty, \infty)$ となり，値域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ となります．つまり

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y \ (-\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

という関係が成り立ちます．このとき y の値域を **逆正接関数の主値 (principle value of arc tangent)** といいます．

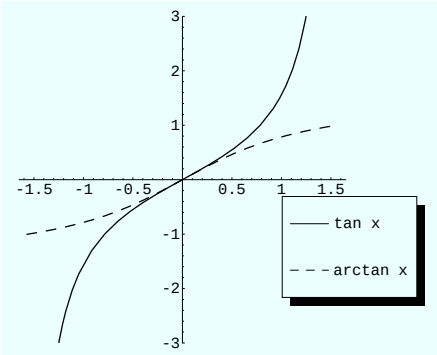


図 1.11　arctan x

確認問題

1.　次の角を弧度法を用いて表そう．

(a) 30°　(b) 40°　(c) 72°

2.　次の直線と x 軸とのなす角を求めよう．ただし，$0 \leq \theta < \pi$.

(a) $y = \sqrt{3}x$　(b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

3.　図 1.2 を利用して，次の不等式を解こう．ただし，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とします．

(a) $\cos\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(b) $\sqrt{3}\tan\theta > 1$　(c) $1 < 2\sin\theta \leq \sqrt{2}$

4.　次の値を求めよう．

(a) $\tan^{-1} 0$　(b) $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$　(c) $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$

演習問題

1.　任意の角 α, β に対して，次の公式が成り立つことを示そう．

(a) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$　(加法定理)

(b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$　(複号同順)

(c) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$　(半角の公式)

(d) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$　(積から和への公式)

(e) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$　(和から積への公式)

2.　次の値を求めよう．

(a) $\cos\dfrac{5\pi}{4}$　(b) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$　(c) $\cos\dfrac{\pi}{8}$

3.　次の値を求めよう．

(a) $\sin^{-1}(\dfrac{-1}{2})$　(b) $\cos^{-1}(-1)$　(c) $\tan^{-1}(-1)$　(d) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

4.　全ての x において，$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示そう．

5.　次の公式を導こう．

(a) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$　(b) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

ここで取り上げた関数のほかにも，初等関数とよばれるものに，ベキ関数，指数関数，対数関数，双曲線関数があります．ではなぜこれらを今取り上げないのかといいますと理由があるのです．ちょっとその理由を説明しましょう．例として，ベキ関数を考えます．$y = x^\alpha, x > 0$ をベキ関数といいます．ここで α は実数です．α が整数のときは，x を α 回かけるということになり問題ありません．α が有理数 $\dfrac{p}{q}$ のときは，x を p 回かけたものの q 乗根をとるということになり問題ありません．しかし，α が無理数のときはどうでしょう．例えば，$\alpha = \sqrt{2}$ のときを考えて下さい．$x^{\sqrt{2}}$ をどう考えたらよいのでしょう．x を $\sqrt{2}$ 回かけることはできません．なぜなら $\sqrt{2}$ は $1.4142\ldots$ と終なく続く数です．ではどう考えればよいのでしょう．実は，いろいろな考え方があるのですが，どれも実数の連続性とよばれる公理を基にしています．つまり，α が無理数のときは，有理数のときと違いもう少し体系的に考えていかなくてはならないのです．そ

こで，いますぐ取り上げず，皆さんが微積分学を理解するのに必要な道具がそろったところで，自然な形であらわれるようにしたいのです．

1.3　関数の極限 (limit of function)

関数の極限の話の前に，ギリシャの韋駄天 Achilles と tortoise の話をします．この話は Zenon(B.C490-429) の逆説として人々を悩ませました．いろいろなかたちで伝わっていますが，ここではこれから極限を習うことを前提にした話にします．あるとき Achilles(アキレス) が tortoise(カメ) を追いかけていました．アキレスがカメのいた位置に来たときにはカメはどんなに遅くともいささか前に進んでいます．次にアキレスがカメがいた位置に来たときには，またいささかでもとにかく前に進んでいます．この調子なので，アキレスはカメに追いつくことはできない，というのが，Zenon の逆説です．アキレスはカメに追いつけるのでしょうか．考えてみて下さい．

定義 1.2

[直感的極限値] 関数 $f(x)$ において， x を x_0 に限りなく近づけていくとき， $f(x)$ がある定数 l に限りなく近づくならば， l を x が x_0 に近づくときの $f(x)$ の **極限値 (limit)** といい，

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

で表わします．

さて，ここで限りなく近づくというのはどういうことでしょうか．x が x_0 に限りなく近づくとは，絶対値 $|x - x_0|$ を限りなく小さくできるということと同じだと考えてもよいでしょう．同様に， $f(x)$ が定数 l に限りなく近づくということも $|f(x) - l|$ を限りなく小さくできることだと考えてもよいでしょう．そこで，限りなく小さくできるということで考えてみると，どんな小さな正の数を比較の相手と選んでも，それよりも小さくできるならば，限りなく小さくできるといえるのではないでしょうか．この考え方が数学でいうところの限りなく小さいということなのです (納得しましたか?)．これを用いて関数の極限をもう一度定義します．この定義は $\delta - \varepsilon$ 論法と呼ばれる証明法のもとになっていて，この章の定理の証明に用いますが，難しく感じる人は，直感的極限値で十分です．

定義 1.3

任意の正の数 ε に対して， $0 < |x - x_0| < \delta$ のとき， $|f(x) - l| < \varepsilon$ が成り立つように正の数 δ が選べるならば,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

である．

例題 1.16

この定義を用いて $\lim_{x\to 1} 2x = 2$ を証明してみましょう．
解 どんな $\varepsilon > 0$ に対しても， $0 < |x-1| < \delta$ のとき $|2x-2| < \varepsilon$ が成り立つような δ が存在することを示せばよいでしょう．そこで， $|2x-2|$ と $|x-1|$ を比較すると

$$|2x-2| = 2|x-1|$$

よって， $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ と選ぶと $0 < |x-1| < \delta$ のとき

$$|2x-2| = 2|x-1| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となります． ■

例題 1.17

次に $\lim_{x\to 1} 4x^2 = 4$ を証明してみましょう．
解 どんな $\varepsilon > 0$ に対しても， $0 < |x-1| < \delta$ のとき $|4x^2-4| < \varepsilon$ が成り立つような δ が存在することを示せばよいでしょう．そこで， $|4x^2-4|$ と $|x-1|$ を比較すると

$$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1|$$

となります．そこでまず， $\delta_1 = 1$ とおくと $|x-1| < 1$ より $|x+1| < 3$ がいえるでしょう (確かめて)．次に

$$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1| < \varepsilon$$

となるには $|x+1| < 3$ より $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{12}$ と選ぶ必要がでてきます．よって $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$．つまり δ を δ_1 と δ_2 の小さいほうとなるように選ぶと, $|x-1| < \delta$ のとき

$$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1| < 12|x-1| < 12 \cdot \frac{\varepsilon}{12} = \varepsilon$$

となります． ■

$\lim_{x\to 1} 4x^2 = 4$ を定義にもとづいて証明するのは簡単ではありませんでした．そこで定義を使わずに極限値を求められるようになるように，次の定理を学びます．

定理 1.2

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ とすると，
(1) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$
(2) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = cl$
(3) $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = lm$
(4) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ $(m \neq 0)$

証明 (3) の証明．　どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $0 < |x - x_0| < \delta$ のとき，$|f(x)g(x) - lm| < \varepsilon$ が成り立つような $\delta > 0$ が存在することを示せばよいでしょう．

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - lm| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\ &= |f(x)(g(x) - m) + (f(x) - l)m| \\ &\leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l| \\ &\leq |f(x)||g(x) - m| + (1 + |m|)|f(x) - l|\end{aligned}$$

ここで，$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ より，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても，

(i) $0 < |x - x_0| < \delta_1$ のとき，$|f(x) - l| < 1$ となる $\delta_1 > 0$ が存在する．

(ii) $0 < |x - x_0| < \delta_2$ のとき，$|f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2(1 + |m|)}$ となる $\delta_2 > 0$ が存在する．

(iii) $0 < |x - x_0| < \delta_3$ のとき，$|g(x) - m| < \dfrac{\varepsilon}{2(1 + |l|)}$ となる $\delta_3 > 0$ が存在する．

よって $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とすると，$0 < |x - x_0| < \delta$ のとき，

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - lm| &\leq |f(x)||g(x) - m| + (1 + |m|)|f(x) - l| \\ &< (1 + |l|)(\frac{\varepsilon}{2(1 + |l|)}) + (1 + |m|)(\frac{\varepsilon}{2(1 + |m|)}) = \varepsilon\end{aligned}$$

となる．■

例題 1.18

ここでもう一度 $\lim\limits_{x \to 1} 4x^2 = 4$ を見てみましょう．

解 $\lim_{x \to 1} 2x = 2, \lim_{x \to 1} 2x = 2$．よって定理 1.3 より

$$\lim_{x \to 1} 4x^2 = (\lim_{x \to 1} 2x)(\lim_{x \to 1} 2x) = 4$$

となります．■

この定理の (4) は，有理関数の分母と分子の極限値が 0 でなければ，有理関数の極限値は分子と分母の極限値の商をとればよいといっています．では，分母の極限値が 0 だったらどうなるのでしょうか．まず，分母の極限値だけ 0 の場合について考えます．

定理 1.3

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ とすると，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

は存在しない．

証明 もし，極限値が存在したら，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

となる実数 L がある．したがって，

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \cdot L = 0$$

これは，仮定 $l \neq 0$ に矛盾する．したがって，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

は存在しない．■

例題 1.19

$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$ の極限値を求めてみましょう．

解 まず，$f(x) = 1$ の極限値は $\lim_{x \to 2} 1 = 1$ となります．次に，$g(x) = x - 2$ の極限値は $\lim_{x \to 2}(x-2) = 0$ となります．したがって，定理 1.3 より，$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$ は存在しない．■

では，分母と分子の極限値が共に 0 だったらどうなるのでしょうか．このときの形を**不定形 (indeterminate)** といって，極限値の問題はいかに不定形の問題を解くかということに集約されます．

例題 1.20

$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ の極限値を求めてみましょう．

解 まず，$x \to 2$ のとき，$x^2 - 3x + 2 \to 0$．また $x^2 - 4 \to 0$．つまり，分子，分母とも $x - 2$ を共通因子に持っていることが分かります．そこで $x \neq 2$ のとき，分子，分母から $x - 2$ をくくりだすと

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

と表せます．したがって，

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

となります．■

実際に極限値を求めるには上の定理だけでは不十分です．例えば，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ の極限値は上で用いた方法では求められません．そんなとき便利なものに，次のようなものがあります．

定理 1.4

[はさみうちの定理]x_0 の δ 近傍 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ で $f(x) < h(x) < g(x)$ であって，

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

ならば，$\displaystyle\lim_{x \to x_0} h(x) = l$ である．

証明 どんな $\varepsilon > 0$ に対しても，$0 < |x - x_0| < \delta$ のとき，$|h(x) - l| < \varepsilon$ が成り立つような $\delta > 0$ が存在することを示せばよいでしょう．

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ より，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $\delta_1 > 0$ が存在し，$0 < |x - x_0| < \delta_1$ のとき，$|f(x) - l| < \varepsilon$ である．

同様に，$\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ より，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $\delta_2 > 0$ が存在し，$0 < |x - x_0| < \delta_2$ のとき，$|g(x) - l| < \varepsilon$ である．よって $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ とおくと，

$$l - \varepsilon < f(x) < h(x) < g(x) < l + \varepsilon$$

より，$0 < |x - x_0| < \delta$ のとき，$|h(x) - l| < \varepsilon$ が成り立つ．■

例題 1.21

はさみうちの定理を理解するために，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ を求めてみましょう．

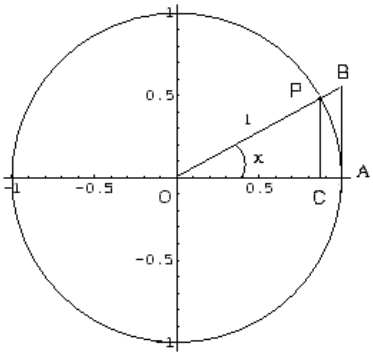


図 1.12　はさみうち

解 図 1.12 において原点を O とし，単位円の周上に A$(1,0)$, P を取り，OP の延長線と OA に垂直な線の交点を B とします．また P から下ろした OA への垂線と OA の交点を C とします．そのとき，面積を比較すると △OPC < 扇形 OAP < △OAB が成り立ちます．ここで，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，

$$\underbrace{\frac{\cos x \cdot \sin x}{2}}_{\triangle\mathrm{OPC}\text{ の面積}} < \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{扇形 OAP の面積}} < \underbrace{\frac{\tan x}{2}}_{\triangle\mathrm{OAB}\text{ の面積}} = \frac{\sin x}{2\cos x}$$

よって

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

となります．また，この不等式は $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ についても成り立ちます．さて，何を行ったかというと，$\dfrac{\sin x}{x}$ を 2 つの関数ではさみつけました．そして $\dfrac{\sin x}{x}$ をはさむのに用いた $\cos x$ と $\dfrac{1}{\cos x}$ の $x \to 0$ のときの極限値を調べると 1 になることが分かります．よって間にはさまれた $\dfrac{\sin x}{x}$ も $x \to 0$ のときに 1 に近づくのではないか，というのがはさみうちの定理なのです．よって

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ ■$$

例題 1.22

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ を用いて，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ を求めてみましょう．

解 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ は，x が小さいとき，$\sin x$ と x はほぼ同じ大きさであることを示していることに注意する．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2x}{x}\\&=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}\cdot 2=2\quad\blacksquare\end{aligned}$$

確認問題

1. 次の極限値を求めよう．

(a) $\lim_{x\to 0}(2x-1)$ (b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1}$ (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2(x+1)}{2x}$ (d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{2x}$

(e) $\lim_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ (f) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ (g) $\lim_{x\to 4}\dfrac{(x^2-3x-4)^2}{x-4}$

(h) $\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{1}{t+3}-\dfrac{1}{3}\right)$ (i) $\lim_{x\to 0}x\left(1-\dfrac{x+1}{x}\right)$

2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ を用いて次の極限値を求めよう．

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x^2}$ (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$ (d) $\lim_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

演習問題

1. 次の極限値を求めよう．

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2+4x)$ (b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+2}{x-1}$

(d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$ (e) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}}{x}$ (g) $\lim_{x\to 2}f(x)$，ただし $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 2\\ 3, & x=2\end{cases}$

2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ を用いて次の極限値を求めよう．

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x}$ (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}$ (d) $\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$

3. $\lim_{x\to a}|f(x)|=0$ ならば，$\lim_{x\to a}f(x)=0$ を示そう．

1.4 連続関数 (continuous functions)

極限 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ を考えるときには，x は x_0 で定義されている必要はありませんでした．また，$f(x_0)$ が $\lim_{x\to x_0}f(x)$ と一致する必要もありませんでした．では極限値とそこでの関数の値が等しいときは，どんなときでしょうか．まず，関数がある点で連続であるということについて考えます．

定義 1.4

関数 $f(x)$ は区間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ で定義されている．

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

が成り立つとき， $f(x)$ は $x=x_0$ で**連続 (continuous)** であるという．

この定義より，関数 $f(x)$ の定義域が区間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ を含んでいるとき，関数 $f(x)$ は次の 2 つの理由を除いて連続です．

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ が存在しない
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ は存在するがその値は $f(x_0)$ と等しくない

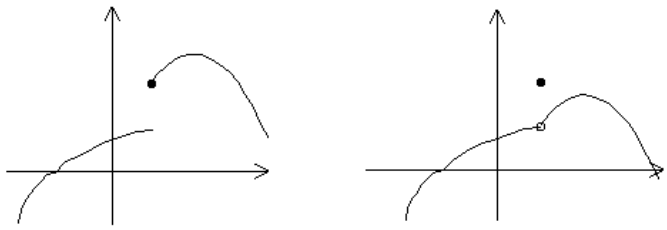


図 1.13　不連続

1. の場合，x_0 は**真性不連続点 (essential discontinuity)** といい，2 の場合は，**除去可能な不連続点 (removable discontinuity)** といいます．つまり，2. の場合は，$f(x_0)$ の値を新たに定義することにより，x_0 で連続にすることができるということです．

ここで，1. の条件を調べるのに便利なものがあります．

右側極限値，左側極限値 (right-hand limit, left-hand limit)

x を x_0 に近づけるとき，特に $x<x_0$ という制限があるときには， x は x_0 より小さい値をとりながら x_0 に近づくので，これを $x\to x_0-0$ または $x\to x_0-$ と表わします．同様に， x が x_0 より大きい値をとりながら， x_0 に近づくとき，これを $x\to x_0+0$ または $x\to x_0+$ と表わします．

$x\to x_0-0$ のときに， $f(x)$ がある定数 l に限りなく近づくことを

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = l \text{ または } f(x_0-0) = l$$

と表わし， l を $f(x)$ の x_0 における**左側極限値 (left-hand limit)** といいます．同様に，$x\to x_0+0$ のときに， $f(x)$ がある定数 l に限りなく近づくことを

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = l \text{ または } f(x_0+0) = l$$

と表わし， l を $f(x)$ の x_0 における**右側極限値 (right-hand limit)** といいます．

例題 1.23

定義が理解できたか $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2-1, & x>0 \end{cases}$ の $x=0$ における右側極限値と左側極限値を求めてみましょう．

解 x が左側から 0 に近づくと，x は常に 0 より小さいので $x<0$．よって $f(x)=x^2+1 \to 1$ となります．つまり，

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$$

また，x が右側から 0 に近づくと，x は常に 0 より大きいので $x>0$．よって $f(x)=x^2-1 \to -1$ となります．つまり，

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -1$$

となります．■

ここまでの極限値の問題には常に極限値が存在しました．しかし極限値はいつも存在するのでしょうか．もし存在しないのなら，どうやってそのことを説明したらいいのでしょうか．そんな質問に次の定理は答えてくれます．

定理 1.5

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ とは $\lim_{x\to x_0-} f(x) = l$ かつ $\lim_{x\to x_0+} f(x) = l$ ということと同値である．

証明 各自に任せます．

この定理より $f(x_0-0)$ と $f(x_0+0)$ が存在し，かつ等しいときに限り $f(x)$ の極限値が存在するといえます．つまりそれ以外の場合には極限値が存在しません．

例題 1.24

この定理を用いて $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ を求めてみましょう．

解

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$$

より，左側極限値と右側極限値は等しくないので $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ は存在しません．■

x が x_0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなる場合には，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

x が x_0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負となりその絶対値が限りなく大きくなる場合には，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

と表わします．ここで限りなく大きくなるとは，どんな大きな実数 M が与えられても，x がある実数 N より大きいとき，$f(x) > M$ となるということです．

また，x が限りなく大きくなるとき，$f(x)$ の値が l に限りなく近づくならば，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

と表わします．

例題 1.25

$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ は $x = 2$ で連続か考えてみましょう．

解 極限値は $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$．また $f(2) = 0$ より $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ となります．よって $f(x)$ は $x = 2$ で不連続です．グラフを想像してみると，$x = 2$ において $f(x)$ の値がジャンプしています．■

例題 1.26

$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ は $x = 0$ で連続か調べてみましょう．

解 まず，

$$0 \leq |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$$

より

$$\lim_{x\to 0} |x\sin\frac{1}{x}| = 0$$

よって演習問題 1.3-3($||f(x)| - 0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$) より

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

また $f(0) = 0$ より $f(x)$ は $x = 0$ で連続だということがわかります．■

関数 $f(x)$ が $x = x_0$ の片側だけで定義されている場合には，上の定義は当てはまりません．そこで，

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x = x_0$ で**左側連続 (continuous from the left)** であるといいます．同様に，

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x = x_0$ で**右側連続 (continuous from the right)** であるといいます．また，$f(x)$ が区間 I のどの点でも連続であるとき，$f(x)$ は区間 I で連続であるといいます．例えば，整式，$\sin x, \cos x, \tan^{-1} x$ は区間 $(-\infty, \infty)$ で連続です．また，有理関数は分母が 0 になる点を除いたすべての区間で連続です．

次に連続な関数は，四則の演算を行ってもまた連続であるというすばらしい性質を持っています．

定理 1.6

$f(x)$ と $g(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとすると

(1) $f(x) \pm g(x)$ も $x = x_0$ で連続である

(2) $cf(x)$ も $x = x_0$ で連続である．ただし， c は定数

(3) $f(x)g(x)$ も $x = x_0$ で連続である

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も $x = x_0$ で連続である．ただし， $g(x_0) \neq 0$

証明 (1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ より

$$\lim_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0) = (f \pm g)(x_0)$$

同様にして (2)，(3)，(4) も証明できます． 定理 1.3 の証明を参照． ■

定理 1.7

$y = f(x)$ が $x = x_0$ で連続で,$z = g(y)$ が $y = f(x_0)$ で連続ならば，合成関数 $z = g(f(x))$ も $x = x_0$ で連続である．

証明 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0))$ ■

これらのことから分かるように連続な関数は非常に扱いやすい関数です．

例題 1.27

$f(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ は $x \neq 0$ で連続であることを示してみましょう．

解 まず，$\sin(\dfrac{1}{x})$ は $\sin z$ と $z = \dfrac{1}{x}$ の合成関数と考えられ， $\sin z$ と $z = \dfrac{1}{x}$ はすべての z と $x \neq 0$ で連続なので，この定理より $\sin(\dfrac{1}{x})$ は $x \neq 0$ で連続です．また x^2 は $(-\infty, \infty)$ で連続なので定理 1.4 より $x \neq 0$ で $x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ は連続となります． ■

次に連続関数の基本的性質を表わすものとして，**中間値の定理 (intermediate theorem)** と **最大・最小値の定理 (max-min theorem)** とよばれる 2 つの定理を考えてみましょう．

定理 1.8

[中間値の定理] 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば， $f(a) < c < f(b)$ である任意の c に対して，

$$f(\xi) = c \quad (a < \xi < b)$$

であるような ξ が存在する．

定理 1.9

[最大・最小値の定理] 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば，この区間に $f(x)$ が最大値をとる点，および最小値をとる点が存在する．

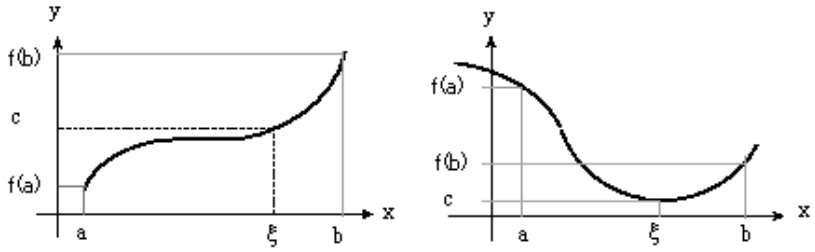


図 1.14　連続関数の性質

上の定理にでてきた最大値をとるとはどういうことか確認しておきましょう．

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で最大値をとるとは，次の 2 つの条件が共に成り立つということです．

1. すべての $x \in [a,b]$ に対して， $f(x) \leq M$ となる M が存在する．
2. $f(\xi) = M$ となる ξ が $[a,b]$ 内に存在する．

この 2 つの定理がどんなことをいっているのか考えてみましょう．まず連続関数のグラフは 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を結ぶつながった曲線で表わされると認めれば，図の上からは明らかでしょう．しかし，連続関数は本当につながった曲線で表わせるのでしょうか．この問題は実数の連続性を基にして初めて証明することができるのです．実数の連続性とは，簡単にいうと実数を大小の順序に並べたとき，実数はどこにも切れめなくぎっしりと並んでいるということです．そこで証明は 1.7 節にまかせることにして，ここでは実数の連続性を認めたとして話を進めましょう．つまり，連続関数のグラフはつながった曲線で表せると考えます．

例題 1.28

まず中間値の定理の応用として $3x^3 - 2x + 5 = 0$ は少なくとも 1 つの実数解を持つことを示しましょう．

解 まず，方程式が解を持つとは，方程式を表わす曲線のグラフが x 軸と共有点を持つということと同じだということを理解してください．つまり曲線のグラフが x 軸に接するか横切ればよいのです．そこで $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$ とおき， $f(x)$ が負の値と正の値をとるような x の値を適当にとります．例えば， $f(-2)$ と $f(1)$ を計算すると

$$f(-2) = -15,\ f(1) = 6$$

次に $f(x)$ は $[-2,1]$ で連続なので，点 $(-2,-15)$ と点 $(1,6)$ を曲線で結びます．するとどんなふうに結んでも，必ず x 軸と共有点を持つ点があることが，中間値の定理により保証されます．そこでこの点を ξ とおくと， $f(\xi) = 0$．つまりこの ξ が $3x^3 - 2x + 5 = 0$ の実数解になります． ■

ここで重要なのは解が存在することであって，解はどこにあるかではないのです．つまり，解の存在を示すには 3 次方程式を解く必要はないのです．

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で，$f(a)<0<f(b)$ または $f(b)<0<f(a)$ のとき，中間値の定理より，方程式 $f(x)=0$ は少なくとも 1 つの解を区間 $[a,b]$ 内に持っていることを知っています．話を簡単にするために，解は 1 つしか無いことにします．さて，どうやって解を求めるのでしょうか．この問題を解くための，最も簡単な方法の 1 つに **2 分法 (bisection method)** とよばれる方法があります．

2 分法 まず区間 $[a,b]$ を 2 等分します．もし，解 ξ が中点でなければ，解 ξ は必ず 2 つに分けられた区間のどちらかに属しているはずです。そこで，$f(a), f([a+b]/2), f(b)$ の符号を調べ，$f(\xi)$ がどちらに属しているか見つけます．見つけたら，ξ が含まれる区間をまた 2 等分し，解 ξ が中点でなければ，解 ξ がどちらの区間にあるか見つけます．これの繰り返しによって，やがて ξ に十分近い値を求めることができます。

では，こうやって求めた近似値が真値にどのくらい近い値か調べてみます．まず，区間 $[a,b]$ を 1 回 2 分すると，区間の幅はもとの半分になります．したがって，n 回，2 等分を行なうと，区間の幅は

$$\frac{b-a}{2^n}$$

となります．ここで，真値と近似値は共にこの区間に入っているので，誤差は最大でも

$$\frac{b-a}{2^n}$$

となります．

例題 1.29

2 分法を用いて $f(x)=3x-5=0$ の近似値を区間 $[1,2]$ において誤差 0.1 以内で求めよう．

解 まず，誤差が 0.1 以内になるまでに 2 分法を何回用いるか計算してみましょう．

$$\frac{2-1}{2^n}<0.1$$

より，$2^n>10$. この不等式を解くと，$n\geq 4$ となります．したがって，2 分法を 4 回繰り返せば十分です．

$$\begin{array}{ccc}
x_1=1 & m_1=1.5 & y_1=2 \\
f(x_1)<0 & f(m_1)<0 & f(y_1)>0 \\
x_2=1.5 & m_2=\frac{1.5+2}{2}=1.75 & y_2=2 \\
f(x_2)<0 & f(m_2)>0 & f(y_2)>0 \\
x_3=1.5 & m_3=\frac{1.5+1.75}{2}=1.625 & y_3=1.75 \\
f(x_3)<0 & f(m_3)<0 & f(y_3)>0 \\
x_4=1.625 & m_4=\frac{1.625+1.75}{2}=1.6875 & y_4=1.75
\end{array}$$

$m_4=1.6875$ を近似値とすると，真値 $\frac{5}{3}=1.\dot{6}$ と誤差 0.1 以内であることが分かります． ■

確認問題

1. 次の関数の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{x-2}{|x-2|}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{|x-2|}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\sqrt{|x|-x}$　(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\sqrt{|x|-x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$　(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$　(g) $\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}$

2. 次の関数は指定された点で連続か調べよう．もし，連続でないならば，真性不連続点か除去可能な不連続点か調べよう．

(a) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2+4, & x<2 \\ x^3, & x\geq 2 \end{array}\right]$; $x=2$,　(b) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2+4, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ x^3, & x>2 \end{array}\right]$; $x=2$,

(c) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1 \\ -2, & x=-1 \end{array}\right]$; $x=-1$,

(d) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} -x^2, & x<0 \\ 1-\sqrt{x}, & x\geq 0 \end{array}\right]$; $x=0$,

3. 次の関数が $x=1$ で連続になるように，$f(1)$ を定義しよう．

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$　(b) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2x^2+1, & x<1 \\ 3x^3, & x>1 \end{array}\right]$

4. 2 分法を用いて $f(x)=7x-6=0$ の近似値を区間 $[0,1]$ において誤差 0.1 以内で求めよう．

演習問題

1. 次の関数の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$　(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}$　(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{x}$

2. $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2 \\ 3, & x=2 \end{array}\right.$ は $x=2$ で連続か調べよう．

3. $f(x)=\sqrt{x}$ は区間 $[0,\infty)$ で連続であることを示そう．

4. 次の関数の最大値と最小値を求めよう．

(a) $f(x)=x^2-3x+1,\ x\in[-2,1]$　(b) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,1]$

(c) $f(x)=x^2-ax,\ x\in[0,2]$

5. $2\sin x-x=0$ は $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 内に実数解を持つことを証明しよう．

1.5 数列 (sequences)

自然数 $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ のおのおのの数に対してそれぞれ実数

$$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$$

が対応しているとき，これを **数列 (sequence)** または無限数列といい，個々の $a_1, a_2, \ldots$ などをこの数列の **項 (term)** といいます．特に第 n 項がわかれば数列全体がわかるので第 n 項を **一般項 (general term)** といいます．また，数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ は簡単に $\{a_n\}$ で表わされます．

例題 1.30

数列 $1, 16, 81, 256, \ldots$ の第 5 項を求めてみよう，という問題が出題されたとき，ほとんどの学生は一般項 $a_n = n^4$ より， $a_5 = 5^4 = 625$ と答えました．ところがある学生は $a_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$ より $a_5 = 601$ と答えました．どちらが正しいのか考えてみましょう．

解 まず，$a_n = n^4$ とおくと $a_1 = 1, a_2 = 16, a_3 = 81, a_4 = 256$ となるので $a_5 = 625$ は正しい答です．では，$a_n = 10n^3 - 15n^2 + 50n - 24$ はどうでしょう．$a_1 = 1, a_2 = 16, a_3 = 81, a_4 = 256$ となるので $a_5 = 601$ も正しい答です． ■

この答えを見て不思議だと思った人は，これまでに学んだ数列を思い出してみましょう．多分，等差数列と等比数列については学んだと思います．学んだことの無い人のために，それぞれの数列の定義を与えます．

定義 1.5

[等差数列] 数列 $\{a_n\}$ において，

$$a_n - a_{n-1} = d \text{ ただし，} d \text{ 定数}$$

であるとき，数列 $\{a_n\}$ は等差数列であるという．

定義 1.6

[等比数列] 数列 $\{a_n\}$ において，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r \text{ ただし，} r \text{ 定数}$$

であるとき，数列 $\{a_n\}$ は等比数列であるという．

つまり，等差数列や等比数列は隣り合う数列の差や比が一定の場合です．しかし，例題のように隣合う数列の差や比が一定でない数列の場合は，数列の差どうしの差を考える必要があります．これを階差といいます．次の数列を見てみましょう．

$$\begin{array}{ccccccccc}
2 & & 5 & & 10 & & 17 & & 26 \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & 2 & & 2 & & 2 & &
\end{array}$$

3 層目の数列は定数になっています．これより，2 層目の数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n - b_{n-1} = 2$, $b_1 = 3$ より，

$$b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 = 2(n-1) + 3 = 2n + 1$$

となります．また，1 層目の数列を $\{a_n\}$ とすると，$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_1 = 2$ より，

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} b_k + a_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) + 2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 + 2 \\ &= n(n-1) + n - 1 + 2 = n^2 + 1. \end{aligned}$$

これより，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = n^2 + 1$ であると考えることができます．しかし，例題の数列の場合，階差を考えると，

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 16 & & 81 & & 256 \\ & \vee & & \vee & & \vee & \\ & 15 & & 65 & & 175 & \\ & & \vee & & \vee & & \\ & & 40 & & 110 & & \\ & & & \vee & & & \\ & & & 70 & & & \end{array}$$

のようになっていて，第 4 層目が定数なのか分かりません．第 4 層目を定数だとすると，第 3 層目の数列 $\{c_n\}$ は，$c_n - c_{n-1} = 60$, $c_1 = 50$ より，$c_n = 60n - 10$ となります．これより，第 2 層目は $b_n - b_{n-1} = c_{n-1}$, $b_1 = 15$ より，$b_n = 30n^2 - 40n + 25$ となります．したがって，第 1 層目は $a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_1 = 1$ より，一般項は，$a_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$ と考えることができます．

数列 $\{a_n\}$ において，すべての n について $a_n \leq M$ である定数 M が存在するとき，数列 $\{a_n\}$ は **上に有界 (bounded above)** であるといい，すべての n について $a_n \geq m$ である定数 m が存在するとき，数列 $\{a_n\}$ は **下に有界 (bounded below)** であるといいます．またすべての n について $m \leq a_n \leq M$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は **有界 (bounded)** であるといいます．

例題 1.31

数列 $\{a_n\} = \{\dfrac{1}{n}\}$ は 有界か調べてみましょう．

解 $n = 1, 2, 3, \ldots,$ について

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

となるので有界です． ■

すべての n について $a_{n+1} \geq a_n$ となるとき，数列 $\{a_n\}$ は **単調増加数列 (monotonically increasing sequence)** であるといいます．同様に，すべての n について $a_{n+1} \leq a_n$ となるとき，数列 $\{a_n\}$ は **単調減少数列 (monotonically decreasing sequence)** であるといいます．

例題 1.32

数列 $\{a_n\} = \{\dfrac{n}{n+1}\}$ は単調増加数列か調べてみましょう．

解 まず，どうやって a_{n+1} と a_n の大小の比較をしたらよいか考えてください．大きさの比較には，基本的に 2 つの方法があります．1 つは差が正か負かを調べます．もう 1 つの方法は比が 1 より大きいか小さいかを調べます．

ここでは比を使って調べてみましょう．まず，$a_{n-1} = \frac{n-1}{n}$ であることに注意して，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n^2}{n^2-1} > 1$$

したがって， $a_n \geq a_{n-1}$ より， $\{a_n\}$ は単調増加であることがわかりました． ■

さて数列 $\{a_n\}$ において，項の番号が限りなく大きくなるとき， a_n がある定数 a に限りなく近づくことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と表わし，数列 $\{a_n\}$ は a に**収束する (converge)** といい，この a を数列 $\{a_n\}$ の **極限値 (limiting value)** または **極限 (limit)** といいます．

ここで関数の極限値の考え方を用いると数列の極限値は次のように定義できます．

定義 1.7

任意の正の数 ε に対して， $n > N$ のとき $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つような自然数 N が存在するとき，数列 $\{a_n\}$ は a に収束するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

で表わす．

例題 1.33

定義を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を証明してみましょう．

解 数列 $\{\frac{1}{n}\}$ は任意の正の数 ε に対して $N = [\frac{1}{\varepsilon} + 1]$ とおくと， $n > N$ のとき

$$|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| < \frac{1}{N} = \frac{1}{[1/\varepsilon + 1]} < \varepsilon$$

となります．よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

となります．ここで用いた記号 $[x]$ はガウス記号といい， x 以下の整数のうち一番大きな整数を表します． ■

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，数列 $\{a_n\}$ は **発散する (diverge)** といいます．関数の極限値と同じように次の定理は数列の極限値を求めるとき基本です．

定理 1.10

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ とすると，

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

(2) $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca$ (c : 定数)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

が成り立つ．

証明 定理 1.3 参照

例題 1.34

この定理をもちいて $\{a_n\} = \{\dfrac{3-\frac{5}{n}}{5+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}\}$ の極限値を求めてみましょう．

解 まず， $n \to \infty$ のとき， $3 - \dfrac{5}{n} \longrightarrow 3$，また $5 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{6}{n^2} \longrightarrow 5$ となります．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{5}{n}}{5+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}} = \frac{3}{5}$$

となります． ■

定理 1.11

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0$ とすると，

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$

が成り立つ．

例題 1.35

この定理をもちいて $\{a_n\} = \{\dfrac{3n-5}{5+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}\}$ の極限値を求めてみましょう．

解 まず， $n \to \infty$ のとき， $3n - 5 \longrightarrow \infty$，また $5 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{6}{n^2} \longrightarrow 5$ となります．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{5+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}} = \infty$$

となります． ■

では，分子と分母が共に無限大に発散するときは，どうなるのでしょうか．このときの形を**不定形 (indeterminate)** といい，このときは，分子と分母から n の最高次数の項をくくり出すことによって，定理 1.5，1.5 を用いることができる形に変形します．

例題 1.36

$\{a_n\} = \{\dfrac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6}\}$ の極限値を求めてみましょう．

解 まず，$n \to \infty$ のとき，$3n^2 - 5n = n^2(3 - \frac{5}{n}) \longrightarrow \infty$，また $5n^2 + 2n - 6 = n^2(5 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}) \longrightarrow \infty$ となります．そこで分子と分母から最高次数の項をくくりだすと

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 5/n}{5 + 3/n - 6/n^2} = \frac{3}{5}$$

となります．■

実際に極限値を求めるには上の定理 1.5 だけでは不十分です．例えば $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ の極限値は定理 1.5 からは求められません．そんなとき，次の定理は便利です．

定理 1.12

[はさみうちの定理] すべての $n > n_0$ に対して $a_n < c_n < b_n$ となる整数 n_0 が存在し，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

ならば，$\lim_{n\to\infty} c_n = a$ である．

証明

$a_n < c_n < b_n$ より

$$|c_n - a| < \max\{|a_n - a|, |b_n - a|\}$$

しかし，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

より任意の正の数 ε に対して自然数 N が存在し

$$|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - a| < \varepsilon$$

となるので $|c_n - a| < \varepsilon$ がいえる．よって $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ である．■

例題 1.37

はさみうちの定理の応用例として $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\sin n\theta\}$ の極限を求めてみましょう．

解 まず，$|\sin n\theta| \leq 1$ よりすべての n, θ に対して

$$0 \leq |\frac{\sin n\theta}{n}| \leq \frac{1}{n}$$

が成り立ちます．よって $|\frac{\sin n\theta}{n}|$ は 0 と $\frac{1}{n}$ にはさまれました．ここで 0 と $\frac{1}{n}$ の極限値を求めると

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

となるので，はさみうちの定理より

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{\sin n\theta}{n}| = 0$$

となります．ここで

$$|\frac{\sin n\theta}{n} - 0| = ||\frac{\sin n\theta}{n}| - 0|$$

に注意すると

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = 0$$

となります． ■

数列の収束，発散の基本となるものに $\{r^n\}$ の極限がどうなるのか知っておく必要があります．なんとなく分かる人もいると思いますが，はっきりと理解したい人には，スイスの数学者 Jakob Bernoulli によって証明された **Bernoulli の不等式 (Bernoulli's inequality)** と呼ばれる不等式は助けになるでしょう．

定理 1.13

$x > 0, n > 1$ とすると，

$$x^n \geq n(x-1) + 1$$

証明

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

$x > 1$ のとき $(x-1) > 0$ で $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 > 1 + 1 + \cdots + 1 = n$

$x = 1$ のとき $(x-1) = 0$ で $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$

$0 < x < 1$ のとき $(x-1) < 0$ で $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 < 1 + 1 + \cdots + 1 = n$

したがって，

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \geq n(x-1) \ ■$$

例題 1.38

Bernoulii の不等式を用いて

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r > 1) \\ 1 & (r = 1) \\ 0 & (|r| < 1) \\ \text{発散} & (r \leq -1) \end{cases}$$

を証明してみましょう．

解 まず， $x^n > n(x-1) + 1$ より $r > 0$ ならば $r^n > n(r-1) + 1$ となります．

$r > 1$ のとき $\delta = r - 1$ とおくと $r^n > n(r-1) + 1 = n\delta + 1$，ここで

$$\lim_{n\to\infty} n\delta = \infty$$

に注意すると $r^n \longrightarrow \infty$.

$r = 1$ のとき $r^n = 1^n = 1$ となるので $r^n \longrightarrow 1$.

$|r|<1$ のときには $\dfrac{1}{|r|}$ を考えます．$|r|<1$ ならば，$\dfrac{1}{|r|}>1$ となるので $x=\dfrac{1}{|r|}$ とおくと Bernoulli の定理より

$$(\frac{1}{|r|})^n > n(\frac{1}{|r|}-1)+1 \longrightarrow \infty$$

よって $|r|^n \longrightarrow 0$．これより $r^n \longrightarrow 0$.

最後に $r \leq -1$ のとき $\delta = -r-1 \geq 0$ とおくと Bernoulli の定理より

$$(-r)^n > n(-r-1)+1 = n\delta+1 \longrightarrow \infty$$

つまり n が偶数のとき r^n は大きな正の数となり n が奇数のときは r^n は絶対値が大きな負の数となります．このように正と負の間をいったりきたりしている数列を振動するといいます． ■

確認問題

1.　次の数列の極限を求めよう．

(a) $\{a_n\}=\{\sqrt{n}\}$　(b) $\{a_n\}=\{\dfrac{n+1}{n^2}\}$　(c) $\{a_n\}=\{\dfrac{n^2}{n+1}\}$

(d) $\{a_n\}=\{\dfrac{2^n-1}{2^n}\}$　(e) $\{a_n\}=\{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\}$

2.　次の数列は有界か調べよう．また，単調性についても調べよう．

(a) $\{a_n\}=\{\dfrac{2}{n}\}$　(b) $\{a_n\}=\{\sqrt{4-\dfrac{1}{n}}\}$

3.　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう．

(a) $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}a_n,\ n\geq 1$　(b) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+2,\ n\geq 1$

(c) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+2n+1,\ n\geq 1$

演習問題

1.　次の数列の極限を求めよう．

(a) $\{a_n\}=\{n^4-3n^3\}$　(b) $\{a_n\}=\{\dfrac{3n^2+5}{4n^3-1}\}$　(c) $\{a_n\}=\{\dfrac{1-n}{n-\sqrt{n}}\}$

(d) $\{a_n\}=\{\dfrac{n(n+2)}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}\}$　(e) $\{a_n\}=\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$

2.　$a>0$ のとき $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ を証明しよう．

3.　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ を用いて次の極限値を求めよう．

(a) $a>b>0$ のとき，$\{(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\}$　(b) $\{a_n\}=\{(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}\}$

1.6　オイラー e(Euler e) と超越関数

まずは，数列 $\{a_n\}=\{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ は単調増加数列か調べてみましょう．

$\{a_n\} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}$ より

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$$
$$a_{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^{n-1} = (\frac{n}{n-1})^{n-1},$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= (\frac{n+1}{n})^n(\frac{n-1}{n})^{n-1} = \frac{n}{n-1}[(\frac{n+1}{n})(\frac{n-1}{n})]^n \\ &= \frac{n}{n-1}(\frac{n^2-1}{n^2})^n \\ &\geq \frac{n}{n-1}(1+n(\frac{n^2-1}{n^2}-1)) \quad \text{Bernoulli の不等式参照} \\ &= \frac{n}{n-1}(\frac{n-1}{n}) = 1\end{aligned}$$

したがって， $a_n \geq a_{n-1}$ より， $\{a_n\}$ は単調増加であることがわかりました．

さてこの数列は収束するのでしょうか．数列の極限値が求められる場合は問題ないのですが，この数列のように何に収束するか，それどころか収束するかどうかもわからない場合があります．そんなとき，次の定理は基本です．

定理 1.14

[数列の基礎定理] 上に有界な単調増加数列は収束する．また下に有界な単調減少数列も収束する．

この定理の証明も実数の連続性をもとにしています．証明はこの章の最後で示すことにして，とりあえずこの定理が成り立つことを認めて次の問題を考えてみましょう．

例題 1.39

$a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, a_1 = 1$ で与えられている数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めてみましょう．

解 まず，数列 $\{a_n\}$ が収束することを示します．そのためには数列の基礎定理より， $\{a_n\}$ が上に有界な単調増加数列か，下に有界な単調減少数列か示せばよいでしょう．

$a_1 = 1, a_2 = \sqrt{3a_1} = \sqrt{3}$ より， $a_1 < a_2$．そこで数学的帰納法を使います．

$n = 1$ のとき， $a_n < a_{n+1}$ は成り立ちます．次に $a_k < a_{k+1}$ を帰納的仮定とすると，

$$a_{k+1} = \sqrt{3a_k} < \sqrt{3a_{k+1}} = a_{k+2}$$

したがって，帰納法によりすべての自然数 n に対して $a_n < a_{n+1}$．

次に上に有界であることを示します．$a_1 = 1 < \sqrt{3} < 3$

$a_k < 3$ を帰納的仮定とすると， $a_{k+1} = \sqrt{3a_k} < \sqrt{3 \cdot 3} = 3$．したがって，すべての自然数 n に対して $a_n < 3$ となります．よって $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列となり $\{a_n\}$ は収束します．

さてこの数列はどんな値に収束するのでしょうか．まず $\{a_n\} \to \alpha$ とすると $\{a_{n+1}\} \to \alpha$ となります．なぜそうなるのか考えてみましょう．$\{a_n\}$ は単調増加数列で上に有界なので

$$0 < a_{n+1} - \alpha < a_n - \alpha$$

が成り立ちます．ここで $\{a_n\}$ が α に収束することに注意すると，全ての正の数 ε に対して，$n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる自然数 N が存在する．よって

$$0 < a_{n+1} - \alpha < a_n - \alpha < \varepsilon$$

となり，$\{a_{n+1}\}$ も α に収束することがわかります．

次に漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ より両辺の極限値を求めると

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n}$$

ここで，演習問題 1.4-2 より $\sqrt{x}$ は $[0, \infty)$ で連続であることに注意すると

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 3a_n} = \sqrt{3\alpha}$$

したがって，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n} = \sqrt{3\alpha}$$

これより

$$\alpha = \sqrt{3\alpha}$$

よって，$\alpha = 0, 3$ となります．しかし $\{a_n\}$ は単調増加で $a_1 = 1$ より，$\alpha \neq 0$．したがって，$\alpha = 3$ となります．■

ちょっと面倒なやり方ですね．そこで漸化式の極限値の求め方には次のようなものがあります．

定理 1.15

実数 $0 < \lambda < 1$ に対して $n > N$ のとき

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq \lambda |a_n - \alpha|$$

となるような自然数 N が存在するならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

である．

証明

$$\begin{aligned}
|a_{N+1} - \alpha| &\leq \lambda |a_N - \alpha| \\
|a_{N+2} - \alpha| &\leq \lambda |a_{N+1} - \alpha| \\
&\vdots \\
|a_{N+n} - \alpha| &\leq \lambda |a_{N+n-1} - \alpha|
\end{aligned}$$

より

$$|a_{N+n}-\alpha| \le \lambda|a_{N+n-1}-\alpha| \le \cdots \le \lambda^n|a_N-\alpha|$$

ここで $0<\lambda<1$ より $\lim_{n\to\infty}\lambda^n=0$．よって $\lim_{n\to\infty}|a_{N+n}-\alpha|=0$．これより

$$\lim_{n\to\infty} a_{N+n}=\alpha$$

となるので

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \ \blacksquare$$

系 1.1

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} a_n=0$$

例題 1.40

この定理を用いてもう一度 $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$，$a_1=1$ を考えてみましょう．

解 この定理を用いるには，数列がある値に収束することを仮定しなければなりません．そこで，$\{a_n\}$ が α に収束するなら $\{a_{n+1}\}$ も α に収束することを用いると

$$\alpha=\sqrt{3\alpha}$$

となります．これを解くと $\alpha=0,3$ となるけれど $a_1=1$ より $\alpha=0$ は不可能だとわかります．そこで $\alpha=3$ が極限値であることを示しましょう．

定理 1.6 より $|a_{n+1}-3|\le\lambda|a_n-3|$ となる $0<\lambda<1$ が存在することを示せばよいでしょう．

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-3| &= |\sqrt{3a_n}-3| = \frac{|3a_n-9|}{|\sqrt{3a_n}+3|}\\ &= \frac{3|a_n-3|}{|\sqrt{3a_n}+3|} = \frac{3}{|\sqrt{3a_n}+3|}|a_n-3|\end{aligned}$$

ここで $\lambda=\dfrac{3}{|\sqrt{3a_n}+3|}<1$ より

$$|a_{n+1}-3|\le\lambda|a_n-3|$$

が示せました．$\blacksquare$

2 項定理 (binomial theorem)

例題 1.41

$(a+b)^n$ を展開したらどんな形になるのでしょうか．

解

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2\\ (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)=a^3+a^2b+aba+ba^2+ab^2+bab+b^2a+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

より，$(a+b)^n$ を展開したとき現われる係数は $(a+b)$ を n 回かけたときに現われる $a^j b^{n-j}$ の回数を数えればよいことが分かります．a は全部で n 個あり，そのうちの j 個を使うので，その組み合わせの総数を $\binom{n}{j}$ と表わすことにします．

では $\binom{n}{j}$ とは何通りなのでしょうか．数えてみましょう．まず，それぞれの a に番号を 1 から n までつけたとします．そして n 個の a から j 個の a を 1 つずつとりだして並べると，最初の a は n 個の中のどの a でもよいので，n 通りの選び方があります．次にくるのは $n-1$ 個の中のどの a でもよいので，$n-1$ 通りの選び方があります．このようにして全部で $n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)$ 通りあることが分かります．これを ${}_nP_j$ で表わし，n 個から j 個のもの取り出し順序をつけて並べたときの数，つまり順列の数といいます．しかし，この問題では a はすべて同じものと考えられるので，とりだした j 個の a は並び方に関係がありません．そこで $n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)$ 通りのうち a の並び方を無視すると $j(j-1)(j-2)\cdots 2 = j!$ 通りの繰り返しがあることが分かります．よって求める組み合わせの総数は

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

となります．これより

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

これを 2 項定理といい，$\binom{n}{j}$ を 2 項係数といいます．■

さてもう一度数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ を考えてみましょう．すでにこの数列が単調増加数列であることは示しました．そこで次に上に有界であることを示しましょう．

そのためには，2 項定理を用いて $(1+\frac{1}{n})^n$ を展開する必要があります．

$$\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

よって，$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列となり数列の基礎定理より収束します．

さて $\{a_n\}$ の極限値は何でしょうか．この極限値は スイスの数学者 Leonhard Euler (1707-1783) によって初めて定義されたので Euler の頭文字をとって e で表わします．つまり

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

となります．

例題 1.42

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ を示してみましょう．
解 $x \to \infty$ より $n < x < n+1$ となる n が存在します．よって

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} < 1+\frac{1}{n}$$

ここでもう一度 $n < x < n+1$ を用いると

$$(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

となります．

$$(1+\frac{1}{n+1})^n = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})},\ (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})$$

に注意すると

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n \le \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x \le \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$$

よってはさみうちの定理より

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

となります．■

超越関数の定義 (definition of transcendental functions)

$A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x)$ を x の多項式とするとき，y についての方程式

$$A_0(x)y^n + A_1(x)y^{n-1} + \cdots + A_n(x) = 0$$

の解として定まる x の関数 y を x の **代数関数 (algebraic function)** といい，それ以外の関数を **超越関数 (transcendental function)** といいます．

以前 $y = x^{\sqrt{2}}$ をどう定義したらよいのだろうかという質問をしましたが，いまそれに答えることができます．まず $\sqrt{2}$ に収束する有理数からなる増加数列 $\{\alpha_n\}$ を考えます．例えば，

$$\{1.4, 1.41, 1.414, \ldots\}$$

などです．

次に， $x > 0$ とし， $a_n = x^{\alpha_n}$ とおくと，$\alpha_m > \alpha_n$ のとき

$$\frac{x^{\alpha_m}}{x^{\alpha_n}} = x^{\alpha_m - \alpha_n} > x^0 = 1$$

となります．したがって， $\{a_n\}$ は増加数列．また $x^{\alpha_n} \le x^{\sqrt{2}}$ より， $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列となるので収束します．そこで

$$x^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n}$$

と定義します．これでよさそうなのですが，x に収束する有理数列はいくらでもあります．そこで $\sqrt{2}$ に収束する別の有理数列 $\{\beta_n\}$ を用いても $\lim_{n\to\infty} x^{\beta_n}$ が同じ値になることを示す必要があります．このことを数学では **一意性 (uniquness)** とよんでいます．

x に収束する任意の 2 つの増加数列を $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ とすると，$\alpha_n \to x, \beta_n \to x$ であるので，$\alpha_1 \leq \beta_n$ である任意の β_n に対して，$\alpha_m \leq \beta_n < \alpha_{m+1}$ となるような α_m, α_{m+1} があるはずです (なぜでしょう)．まず，$x \geq 1$ とすると

$$x^{\alpha_m} \leq x^{\beta_n} \leq x^{\alpha_{m+1}}$$

また $0 < x < 1$ のときは

$$x^{\alpha_m} \geq x^{\beta_n} > x^{\alpha_{m+1}}$$

となります．ここで $n \to \infty$ とすると，$m \to \infty$ となり，はさみうちの定理より，

$$\lim_{m\to\infty} x^{\alpha_m} = \lim_{n\to\infty} x^{\beta_n}$$

となります．したがって，$x^{\sqrt{2}}$ は有理数列 $\{\alpha_n\}$ に関係しません．

一般に α が無理数のとき

$$x^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n}, \alpha_n \to \alpha, \{\alpha_n\} \text{ 有理数列}$$

で定義します．

ベキ関数

$y = x^{\alpha}$ (α : 無理数) の形の関数をベキ関数といいます．

定義域は $(0, \infty)$ で次の性質が成り立ちます．

定理 1.16

$x, y > 0$，任意の実数 α, β において，次の法則が成り立つ．

(1) $x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$　(2) $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}$　(3) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$　(4) $(\dfrac{x}{y})^{\alpha} = \dfrac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}$

証明 (1) の証明．$n \to \infty$ のとき，$\alpha_n \to \alpha, \beta_n \to \beta$ とすると，

$$\begin{aligned} x^{\alpha} \cdot x^{\beta} &= \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n} \cdot \lim_{n\to\infty} x^{\beta_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n+\beta_n} \\ &= x^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

(2)，(3)，(4) も同様にして示せます．■

例題 1.43

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$ $(\alpha > 0)$ を示してみましょう．

解 $x > 1$ とし， $n \leq x < n+1$ となる自然数を n とすると，

$$e^n \leq e^x$$

また， $x < n+1 \leq 2n$ かつ $\alpha > 0$ より

$$x^\alpha < (2n)^\alpha = 2^\alpha n^\alpha$$

よって

$$0 < \frac{x^\alpha}{e^x} < \frac{2^\alpha n^\alpha}{e^n}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0$ を示しましょう．

$a_n = \dfrac{n^\alpha}{e^n}$ とおくと，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^\alpha} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha < 1$$

よって系 1.6 より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0$$

これより

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \ \blacksquare$$

べき関数の定義と同様に， a^x $(a > 0)$ は x が無理数 α のとき a^α を

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n},\ \alpha_n \to \alpha, \{\alpha_n\} \text{ 有理数列 }, a > 0$$

で定義します．

指数関数

$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ の形の関数を **指数関数 (exponential function)** といいます．

定義域は $(-\infty, \infty)$, 値域は $(0, \infty)$ で次の性質をもちます．

定理 1.17

$a > 0$，任意の実数 x, y において，次のことが成り立つ．

(1) $a^0 = 1$

(2) $a^{x+y} = a^x a^y$

(3) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

(4) $(a^x)^y = a^{xy}$

(5) e^x は $(-\infty, \infty)$ で連続で狭義の単調増加関数

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

証明 (2) $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n},\ a^y = \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n}$ とおくと

$$a^x a^y = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha+\beta_n} = a^{x+y}$$

残りは各自に任せます．■

指数関数 a^x の中でも特に $a=e$ のときは重要です．

対数関数

指数関数 $y=a^x$ は定義域は $(0,\infty)$ で狭義の単調増加かつ連続です．したがって，逆関数が存在し，それを $x=f^{-1}(y)=\log_a y$ と表わします．中間値の定理より $\log_a y$ は $(0,\infty)$ で定義された連続関数になります．この $\log_a y$ を a を底とする**対数関数 (logarithmic function)** といい， $a=e$ の場合を自然対数といって $x=\log y$ で表わします．

定理 1.18

$a>0$，任意の実数 $x>0, y>0$ において，次のことが成り立つ．

(1) $\log_a 1=0, \log e=1$

(2) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(4) $\log_a x^y=y\log_a x$

(5) $\log x$ は $(0,\infty)$ で連続で，単調増加である．

(6) $\lim_{x\to\infty}\log x=\infty,\ \lim_{x\to 0+}\log x=-\infty$

証明 (2) $\alpha=\log_a x,\ \beta=\log_a y$ とおくと $x=a^\alpha,\ y=\alpha^\beta$ より

$$xy=a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta}$$

よって

$$\log_a x+\log_a y=\alpha+\beta=\log_a xy$$

残りは各自に任せます．■

例題 1.44

対数関数の性質を用いて $f(x)=\log(x\sqrt{1+3x})$ の定義域を求めてみましょう．

解

$$\begin{aligned}D(f)&=\{x\in\mathcal{R}:f(x)\in\mathcal{R}\}=\{x\in\mathcal{R}:\log(x\sqrt{1+3x})\in\mathcal{R}\}\\&=\{x\in\mathcal{R}:\log x+\frac{1}{2}\log(1+3x)\in R\}\\&=\{x\in\mathcal{R}:x>0,1+3x>0\}\\&=(0,\infty)\cap(-\frac{1}{3},\infty)=(0,\infty)\ \blacksquare\end{aligned}$$

双曲線関数

次の関数を **双曲線関数 (hyperbolic function)** といいます．

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$\mathrm{sech}x=\frac{1}{\cosh x},\ \mathrm{csch}x=\frac{1}{\sinh x},\ \coth x=\frac{1}{\tanh x}$$

空中に張ったロープを自然にたわませたときにロープが描く曲線のことを **懸垂線 (catenary)** といい，この曲線を表わすのに用いられたのが $\cosh x$ でした．

確認問題

1. 次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ は収束するか判定しよう．また，収束する場合は，極限値を求めよう．

(a) $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1}{e}a_n,\ n \geq 1$　(b) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2^{n+1}a_n$

(c) $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n$

2. 表より，次の値を求めよう．

(a) $\log 20$

(b) $\log 16$

(c) $\log 3^4$

(d) $\log 0.1$

(e) $\log \sqrt{630}$

(f) $\log 0.4$

n	$\log n$	n	$\log n$
1	0.00	6	1.79
2	0.69	7	1.95
3	1.10	8	2.08
4	1.39	9	2.20
5	1.61	10	2.30

3. 次の方程式の解を求めよう．

(a) $\log x = 2$　(b) $\log x = -1$　(c) $(2 - \log x)\log x = 0$

(d) $\log(2x+1)(x+2) = 2\log(x+2)$

演習問題

1. 次の数列は有界か調べよう．

(a) $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n, \cdots$　(b) a_n は $\sqrt{2}$ の小数第 n 位までとった近似値．

2. 次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよう．

(a) $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$　(b) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$

3. 次の数列の極限値を求めよう．

(a) $a_n = (1 - \dfrac{1}{n^2})^n$　(b) $a_n = (1 + \dfrac{2}{n})^n$　(c) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$　(系 1.6 を用いる)

(d) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

4. 次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$　(b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\log x - \log a}{x - a}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$　(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$

5. 算術平均 $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ と幾何平均 $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ で定義された数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について以下の問に答えよう．

(a) $a_0, b_0 \geq 0$ のとき，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は収束することを示そう．

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ を示そう．この極限値は $\mathrm{agm}(a_0, b_0)$ と表される．

1.7 *実数の連続性 (continium)

$x^{\sqrt{2}}$ を定義するのに，上に有界な単調増加数列は収束するという定理を用いました．しかし，この定理の証明には実数の連続性が必要だということをいいました．また，中間値の定理，最大・最小値の定理の証明も実数の連続性がもとになっているといいました．そこでこの辺で，実数の連続性について考えてみましょう．

実数全体の集合 $\mathcal{R}$ を私たちはよく**数直線 (number line)** というものに置き換えて考えます．つまりすべての実数を大小の順に並べれば，どこにも穴のないぎっしりしたものになると考えます．集合 $\mathcal{R}$ がこのような構造をもっていることを実数の連続性といいます．この実数の連続性を数学的にもっとはっきりした形のものとしてとらえることができないでしょうか．そのためにいろいろな方法が考えられていますが，私たちは上限，下限という概念に基づいて考えていくことにしましょう．

定義 1.8

実数のある集合 A に属するどんな実数 x に対しても $x \leq M$ であるような数 M が存在するとき， A は **上に有界 (bounded above)** であるといい，このような数 M を A の **上界 (upper bound)** という．

同様に，実数のある集合 A に属するどんな実数 x に対しても $x \geq m$ であるような数 m が存在するとき， A は **下に有界 (bounded below)** であるといい，このような数 m を A の **下界 (lower bound)** という．また上にも下にも有界な集合を単に**有界 (bouuded)** な集合という．

例題 1.45

集合

$$A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\}$$

の上界と下界を求めてみましょう．

解 この集合には最小数はありますが最大数はありません．しかしこの集合のすべての数は 1 より小さいので 1 はこの集合の上界です．また，この集合のすべての数は 0 より大きいので 0 はこの集合の下界です． ■

この集合をもう少しよく見てみましょう．この集合の中には 1 より小さいどんな数をとっても，それより大きい数がこの集合 A のなかにあります．つまり 1 は上界の中で一番小さい数となります．このような数を上限といいます．

定義 1.9

集合 A の上界のうちで最小のものがある場合，その **最小な上界 (least upper bound)** を A の **上限 (supremum)** といい， $\sup(A)$ と表わす．また A の下界のうちで最大のものがある場

合，その **最大な下界 (greatest lower bound)** を A の **下限 (infimum)** といい， $\inf(A)$ と表わす．

例題 1.46

$$A = \{\frac{1}{n} : n \text{ 自然数 }\}$$

の上限と下限を求めてみましょう．

解 A の上限は $\sup(A) = 1$，また下限は $\inf(A) = 0$ ■

一般に， A に最大数 $(\max A)$，最小数 $(\min A)$ があるときは，それらはそれぞれ A の上限，下限になります．また A の上限または下限が A に含まれているときには，それらはそれぞれ A の最大数，最小数になります．

上の定義より，次の定理が得られます．

定理 1.19

数 α が A の上限であるというのは次の 2 つの条件を共に満たしているということと同値である．

(1) A に属するすべての x に対して， $x \leq \alpha$ である．

(2) $\beta < \alpha$ ならば $\beta < x \leq \alpha$ となるような x が A の中にある．

証明 (1) は α が A の上界であることを，(2) は α より小さい数は A の上界になりえないことを表わしています．したがって， α が A の上界のうちの最小数になる． ■

下限についても不等号の向きを逆にすれば同様です．

ここで実数全体の集合の基本的な性質をまとめておきます．

四則演算

任意の 2 つの数に対して，加減乗除の四則の演算が定義されていて，演算の結果がまた 1 つの実数になる．また交換，結合，分配などの法則が成り立つ．

大小関係

任意の実数 a，b は $a < b, a = b, a > b$ のうちどれか 1 つだけ成り立つ．また任意の実数 a, b, c に対して，

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

$$a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$$

が成り立つ．

連続性

(1) 実数の集合 A が上に有界ならば， A の上限が存在する．

(2) 実数の集合 A が下に有界ならば， A の下限が存在する．

私たちは実数がこの 3 つの基本性質をもっているものとして話を進めていきます．このうちとくに連続性は実数で初めて成り立つ重要な性質です．例えば， $A = \{x : x^2 < 2\}$ を考えると A

は上に有界なので，連続性より A の上限が存在します．この場合 A の上限は何でしょうか．定理 1.7 より $\sqrt{2}$ が A の上限となります．このように連続性を認めると有理数だけでは切れめができてしまう数直線の切れめをなくすことができます．

連続性をもとにして，集合 $\mathcal{R}$ について直感的に認めてきた諸事実を 1 つずつ証明していくことができます．ここでは中間値の定理，数列の基礎定理を証明します．

定理 1.20

[数列の基礎定理] 上に有界な単調増加数列は収束する．また下に有界な単調減少数列も収束する．

証明 数列 $\{a_n\}$ を上に有界な単調増加数列とする．実数 a_n 全体の集合を A で表わすと， A は上に有界となり，実数の連続性から A に上限が存在する．この上限を α とすると定理より次の 2 つのことが成り立つ．

(1) すべての n について $a_n \leq \alpha$

(2) ε を任意の正の数とすると， $\alpha - \varepsilon < a_N \leq \alpha$ であるような a_N が A 内に存在する．

ここで $\{a_n\}$ は単調増加だから，(2) における番号 N について，

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots \leq \alpha.$$

すなわち， $n \geq N$ ならば $\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$．したがって，$n \geq N$ ならば， $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

減少数列のときも証明は全く同じようにできる． ■

定理 1.21

[中間値の定理] 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば， $f(a) < c < f(b)$ である任意の c に対して，

$$f(\xi) = c \quad (a < \xi < b)$$

であるような ξ が存在する．

証明 $f(x) < c$ であるような x 全体の集合を A とする．つまり $A = \{x : a \leq x \leq b, f(x) < c\}$．$A$ は上に有界になるから上限が存在する．この上限を ξ とすると， $a < \xi < b$ は明らかである．実はこの ξ が $f(\xi) = c$ をみたす ξ であることが次のようにして証明される．まず仮に $f(\xi) < c$ であるとすると，演習問題 1.7 により， ξ の適当な近傍をとることによって，そこでは $f(x) < c$ になる．つまり

$$\xi < \eta,\ f(\eta) < c$$

を満たす η が存在する．ところがこれは ξ が A の上限であることに矛盾する．

次に $f(\xi) > c$ であるとすると，演習問題 1.7 により， ξ の適当な近傍をとることによって，そこでは $f(x) > c$ になる．つまり

$$\eta < \xi,\ f(\eta) > c$$

を満たす η が存在する．ところがこれは ξ が A の上限であることに矛盾する．

したがって， $f(\xi) = c$ でなければならない． ■

演習問題

1. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続で $f(a) \overset{<}{(>)} c$ ならば， $x = a$ の十分近くで $f(x) \overset{<}{(>)} c$ であることを示してみよう．

第 2 章

微分法 (DIFFERENTIATION)

2.1　導関数 (derivatives)

関数 $f(x)$ とそのグラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ が与えられたとき，どの直線を点 $(x_0, f(x_0))$ における接線とよぶことができるでしょうか．

この問題に答えるために，小さな数 $h \neq 0$ を選び，グラフ上に点 $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ を印します．ここで，この 2 つの点を通る直線 (**割線 (secant line)**) を引きます．この状況を記すと次のようになります．

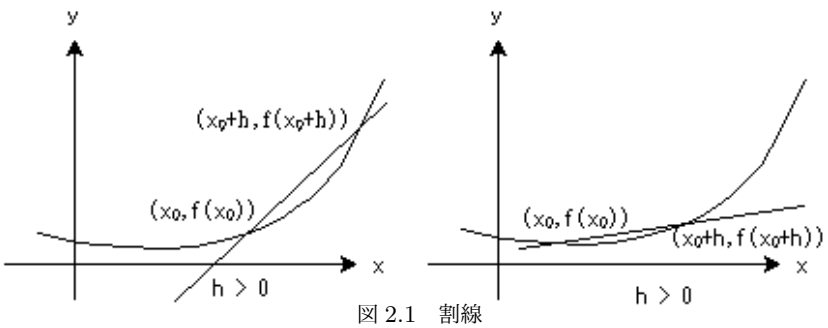


図 2.1　割線

h が徐々に右側から 0 に近づくと，割線は極限位置に近づいていきます．同様に h が 0 に左側から近づくと，割線は右側から近づいたときと同じ極限位置に近づいていきます．この極限位置の直線をグラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ における接線といいます．

割線の傾きは

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

で与えられます．これより，接線の傾きは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

となります．

これが，図形を用いた接線の考え方です．

ここからは，このような極限値をもっと系統立てて学んでいきます．

定義 2.1

関数 $f(x)$ が x_0 を含むある区間で定義されているとき，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A\ (A\neq\pm\infty)$$

が存在するならば，関数 $f(x)$ は， $x=x_0$ で**微分可能 (differentiable)** であるといいます．また，この極限値 A を点 x_0 における**微分係数**といい， $f'(x_0)$ で表わします．

例題 2.1

$f(x)=\sin x$ の微分係数 $f'(0)$ を求めてみましょう．

解

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-0}{h}=1$$

(例題 1.3 参照) したがって， $f'(0)=1$ となります． ■

これをグラフで見てみましょう．

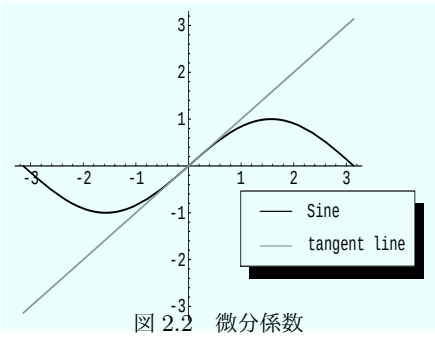


図 2.2　微分係数

図 2.2 を見て下さい．この図には $\sin x$ のグラフとその**接線 (tangent line)** $y=x$ が描かれています．ここで， $\sin x$ の $x=0$ での微分係数と接線 $y=x$ の傾きが同じであることに気付いて下さい．つまり， $f'(0)$ は関数 $f(x)$ の $x=0$ での接線の傾きを表わします．このことから，$y=f(x)$ のグラフ上の点 (x_0,y_0) での接線の方程式は，

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

となります．また，接線と垂直な線を**法線**といい，$y=f(x)$ のグラフ上の点 (x_0,y_0) での法線の方程式は，接線と法線は垂直であることから，

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

となります．

例題 2.2

$f(x) = x^2$ のグラフ上の点 $(-3, 9)$ における接線と法線の方程式を求めよ．
解 $f'(x) = 2x$ より，点 $(-3, 9)$ での接線の傾きは $f'(-3) = -6$. したがって，求める接線の方程式は，

$$y - 9 = -6(x - (-3))$$

つまり，

$$y - 9 = -6(x + 3)$$

法線の方程式は，

$$y - 9 = \frac{1}{6}(x + 3)$$

となります． ■

$f(x)$ が x_0 で微分可能でなくても

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

または

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

が存在することがあります．その場合，最初の値を **左側微分係数 (left-hand derivative)** といい， $f'_-(x_0)$ で表わし，後の値を **右側微分係数 (right-hand derivative)** といい， $f'_+(x_0)$ で表わします．微分可能の定義より， $f'_-(x_0)$ と $f'_+(x_0)$ が共に存在し，かつ両者が等しいときに限り $f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能となります．

例題 2.3

$f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能か調べてみましょう．
解 まず， $f'_-(0)$ を求めると

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

次に $f'_+(0)$ を求めると

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1$$

となります．よって $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能ではありません． ■

$f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能ではありませんでしたが， $x = 0$ で連続です．微分可能性と連続性の間にはどんな関係があるのでしょうか．

定理 2.1

関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能ならば，$f(x)$ は $x = x_0$ で連続である．
　証明 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ を示せばよいでしょう．そこで

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

と書き直し，x を x_0 に近づけると

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

ここで $f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能であることに注意すると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = 0\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \ \blacksquare$$

この逆，つまり連続ならば微分可能とはならないことは例題 2.1 でみました．では関数が連続で微分可能ではないとき，グラフはどんな形をしているのでしょうか．図 2.3 を見てみましょう．$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能でないとき，$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ となっています．これより $f'_+(x_0)$ と $f'_-(x_0)$ が存在し等しくないときには，関数 $f(x)$ は $x = x_0$ でとがっていることが分かります．

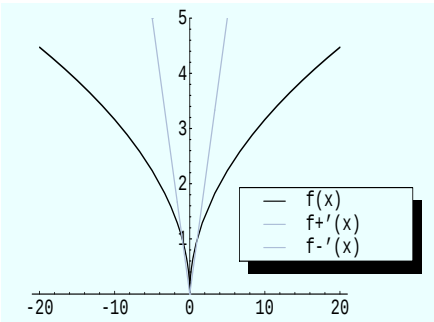


図 2.3　微分可能?

関数 $f(x)$ が，ある区間 I の各点で微分可能のとき $f(x)$ は **区間 I で微分可能 (differentiable on I)** であるといいます．この場合，区間 I の各点にそこでの微分係数を対応させることにより定まる関数を $f(x)$ の **導関数 (derivative)** といい，

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で表わします．ほかにも，

$$\frac{df(x)}{dx}, Df(x)$$

などの表わし方もあります．また, 関数 $f(x)$ の導関数を求めることを **微分する (differentiate)** といいます．

例題 2.4

$f(x) = x^n$ (n 整数) を微分してみましょう．

解

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h} \quad (2\text{ 項定理}) \\
&= nx^{n-1} + \lim_{h\to 0}[\binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \cdots + h^{n-1}] = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

となります． ■

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

例題 2.5

$f(x) = e^x$ を微分してみましょう．

解

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h - 1)}{h} \quad (e^{x+h} = e^x \cdot e^h) \\
&= e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x \ (\text{演習問題 } 1.6-1(b) \text{ 参照})
\end{aligned}$$

となります． ■

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

例題 2.6

$f(x) = \sin x$ を微分してみましょう．

解

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \quad \text{(加法定理)} \\
&= \lim_{h\to 0} [\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}] \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} + \cos x \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{-\sin h}{\cos h + 1} + \cos x \quad \text{(例題 1.3 参照)} \\
&= \sin x (1 \cdot -\frac{0}{2}) + \cos x = \cos x
\end{aligned}
$$

となります．■

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

例題 2.7

$f(x) = \cos x$ を微分してみましょう．

解

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \quad \text{(加法定理)} \\
&= \lim_{h\to 0} [\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}]
\end{aligned}
$$

ここで，$\dfrac{\cos h - 1}{h} \longrightarrow 0$. また，$\dfrac{\sin h}{h} \longrightarrow 1$ より，

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

■

関数の導関数を，定義に基づいて求めるのは容易ではないことが分かりました．そこで，導関数の計算に必要な公式をまとめておきます．

定理 2.2

[微分公式] $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ が微分可能のとき次式が成り立つ.

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ (和の微分法)

(2) $(cf(x))' = cf'(x)$ (c：定数)

(3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分法)

(4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (商の微分法)

証明 (3)の証明.

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

ほかの場合も同様にしてできます. ■

例題 2.8

微分公式を使って $y = 3x^3 + 2x + 3$ の導関数を求めてみましょう.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= (3x^3 + 2x + 3)' \\
&\underbrace{=}_{\text{和の微分法}} (3x^3)' + (2x)' + 3' \\
&= 3 \cdot 3x^2 + 2 = 9x^2 + 2
\end{aligned}
$$

となります. ■

例題 2.9

微分公式を使って $\tan x$ の導関数を求めてみましょう.

解

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= (\frac{\sin x}{\cos x})' \\
&\underbrace{=}_{\text{商の微分法}} \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}
$$

となります. ■

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

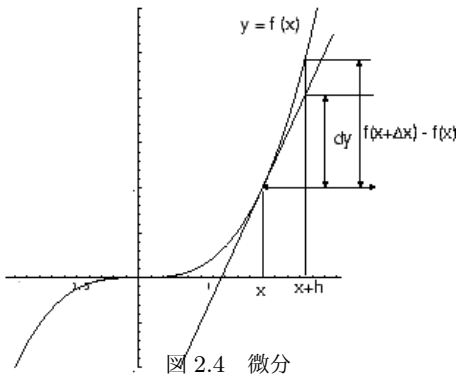


図 2.4　微分

変数 x が，ある x から $x+h$ まで変化するときの変動量 h を x の **増分 (increment)** といい， Δx で表わし，これに対応する y の変動量 $f(x+\Delta x)-f(x)$ を y の増分といい， Δy で表わすと， $f'(x)$ は次のように表わすことができます．

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

つまり，

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \circ(\Delta x) \ (\Delta x \to 0)$$

ここで $\circ(\Delta x)$ とは

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

ということです．したがって， $f'(x)\Delta x$ が Δy の主要な部分とみなせます．そこで，これを点 x における関数 $y = f(x)$ の **微分 (differential)** といい， dy または $df(x)$ で表わします．つまり

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x$$

特に， $f(x) = x$ のときは， $f'(x) = 1$ より

$$df(x) = dx = \Delta x$$

つまり，独立変数について増分と微分が一致します．これから

$$dy = f'(x)dx$$

となり， dy, dx にそれぞれ別々に意味を持たせることができました．

例題 2.10

$y = f(x) = \sin x$ の微分を求めてみましょう．

解

$$dy = f'(x)dx = \cos x dx$$

となります．■

確認問題

1.　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよう．

(a) $f(x) = c$　(b) $f(x) = \sqrt{x-1}$　(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

2.　次の関数の $x = 2$ での微分係数を定義に基づいて求めよう．

(a) $f(x) = 5x - x^2$　(b) $f(x) = (3x-7)^2$

3.　次の曲線上の与えられた a に対応する点における接線の方程式を求めよう．

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 3,\ a = 2$　(b) $f(x) = 5 - x^3,\ a = 2$　(c) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 4$

4.　次の関数の導関数を求めよう．

(a) $y = 11x^5 - 6x^3 + 8$　(b) $y = -\dfrac{1}{x^2}$　(c) $y = (x^2-1)(x-3)$

(d) $y = \dfrac{x-1}{x-2}$　(e) $y = \dfrac{x^2-1}{2x+3}$　(f) $y = \dfrac{6-1/x}{x-2}$　(g) $y = \dfrac{1+x^4}{x^2}$

演習問題

1.　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよう．

(a) $f(x) = \cos 3x$　(b) $f(x) = (x+2)^n$ (n : 整数)

2.　次の関数の微分を求めよう．

(a) $f(x) = x^4$　(b) $f(x) = e^x$

3.　次の関数の $x = 0$ における右側微分係数，および左側微分係数を求めよう．

(a) $f(x) = |x^2 + x|$　(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$　(c) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$

4.　次の関数の導関数を求めよう．

(a) $y = \dfrac{3x-1}{x^2+1}$　(b) $y = \sec x$　(c) $y = \mathrm{cosec} x$　(d) $y = \cot x$

(e) $y = x^2 e^x$　(f) $y = e^x \sin x$　(g) $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$

2.2　微分法 (Differentiation Formulas)

微分公式を学んだだけでも，かなりの関数の導関数を求めることができるようになりました．しかし，$y = (x^3+1)^{10}$ のような関数の導関数を求めるとき，積の微分法を用いて，微分していたら大変面倒です．そこで一工夫をしてみましょう．まず，$y = (x^3+1)^{10}$ を分解すると $y = (x^3+1)^{10}$ は $u = g(x) = x^3 + 1$ と $y = f(u) = u^{10}$ の合成関数でできていることがわかります．そこで y の微分 dy と u の微分 du を求めると，

$$dy = f'(u)du = 10u^9 du,\ du = g'(x)dx = 3x^2 dx$$

となり，これより

$$dy = 10u^9 du = 10(x^3+1)^9 \cdot 3x^2 dx$$

となります．これが合成関数の微分法です．

定理 2.3

[合成関数の微分法]$y = f(u), u = g(x)$ がそれぞれ u, x の関数として微分可能ならば，合成関数 $y = f(g(x))$ も x の関数として微分可能で，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

が成り立つ．

証明 $\Delta x \neq 0$ とすると，

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(\Delta u), \Delta u = g(x+\Delta x) - g(x) \tag{2.1}$$

ここで，$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ のとき，$\Delta u \to 0$ に注意する．$\Delta u \neq 0$ のとき，$\varepsilon = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} - \dfrac{dy}{du}$ とおくと，$\Delta u \to 0$ のとき，$\varepsilon \to 0$ となり，

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \varepsilon \Delta u \tag{2.2}$$

つぎに，$\Delta u = 0$ とすると，式 (2.1) より $\Delta y = 0$ となるので，この場合は $\varepsilon = 0$ と定義する．この結果，式 (2.2) は $\Delta u \neq 0$ でも $\Delta u = 0$ でも成り立つ．式 (2.2) を $\Delta x \neq 0$ で割り，$\Delta x \to 0$ とすると，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{dy}{du}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{du}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\varepsilon \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

■

例題 2.11

$y = \cos(x^2+x)$ を微分してみましょう．

解 まず，$\cos(x^2+x)$ を分解すると $u = x^2+x$ と $y = \cos u$ となります．よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\sin u(2x+1) = -(2x+1)\sin(x^2+x)$$

となります．■

例題 2.12

$y = x^{\frac{m}{n}}$, n, m 整数 を微分してみましょう．

解 まず，両辺を n 乗すると

$$y^n = x^m$$

次に， 両辺を x について微分すると，左辺は

$$\frac{d(y^n)}{dx} = \frac{d(y^n)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} \cdot y'$$

となり，また，右辺は

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$$

となります．よって，

$$ny^{n-1} \cdot y' = mx^{m-1}$$

これより

$$y' = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{y^n} \cdot y = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^m}{x^n} \cdot x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

となります． ■

$y = \sin^{-1} x$ のように $y = \sin x$ の逆関数の導関数を求める必要もでてきます．そんなとき，もとの関数 $y = \sin x$ の導関数を使えるような気がします．実際，逆関数の導関数を求めるときには，次の微分法を用います．

定理 2.4

[逆関数の微分法] ある区間で $y = f(x)$ は微分可能で $f'(x) \neq 0$ とする．もし， $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在するならば，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

である．

証明 $x_0 = f^{-1}(y_0)$ とおくと

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{dy/dx}$$

である． ■

例題 2.13

逆関数の微分法を用いて $y = \sin^{-1}(x)$ の導関数を求めてみましょう．

解 まず， $y = \sin^{-1}(x)$ とは， $x = \sin y$ で y の主値が $-1 \leq x \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ のことでした．ここで $\sin x$ の導関数なら知っているので， $x = \sin y$ の両辺を y について微分すると，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(\sin y)}{dy} = \cos y$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ では $\cos y \geq 0$ であるので，

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

よって逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となります．■

例題 2.14

逆関数の微分法になれるために $y = \log|x|$ の導関数も求めてみましょう．

解 まず $x > 0$ のときを考えてみましょう．$x > 0$ のとき，

$$y = \log|x| = \log x \Leftrightarrow x = e^y \ (x > 0, -\infty < y < \infty)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

となります．

次に，$x < 0$ のとき，$y = \log|x| = \log(-x)$．そこで $u = -x$ とおくと，$u > 0$ となり，合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

よって，いずれの場合も

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

となります．■

対数微分法

関数が複雑な形で与えられているとき，微分を行う前に少し簡単な形に直しておきたいことがあります．そんなときに用いると便利なものに対数微分法とよばれるものがあります．

例題 2.15

$y = x^2\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ を微分してみましょう．

解 まず，両辺に対数をとると，

$$\log y = 2\log(x) + \frac{1}{2}\{\log(1+x^2) - \log(1-x^2)\}$$

となります．次に，この両辺を x で微分すると例題 2.2 より

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\{\frac{2x}{1+x^2} - \frac{-2x}{1-x^2}\} \\ &= \frac{2}{x} + \frac{2x}{(1+x^2)(1-x^2)}\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} y' &= y\left(\frac{2(1+x^2-x^4)}{x(1+x^2)(1-x^2)}\right) \\ &= x^2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\left(\frac{2(1+x^2-x^4)}{x(1+x^2)(1-x^2)}\right) = \frac{2x(1+x^2-x^4)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^4}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

このように両辺の対数をとって微分する方法を **対数微分法 (logarithmic differentiation)** といいます．

$y = x^n$ の n が整数のときの導関数は，例題 2.1 で求めました．しかし， $y = x^\alpha$ の α が実数のときの導関数は例題 2.1 で用いた方法では求められません (なぜでしょう?)．しかしもう大丈夫です．なぜなら私たちには対数微分法があるからです．

例題 2.16

対数微分法を使って $y = x^\alpha$ の導関数を求めてみましょう．

解 両辺の対数をとると．

$$\log y = \alpha \log x$$

この両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{y}y' = \alpha\frac{1}{x}$$

よって，

$$y' = y(\alpha\frac{1}{x}) = x^\alpha(\alpha\frac{1}{x}) = \alpha x^{\alpha-1}$$

つまり， $y = x^\alpha$ の導関数は $y = x^n$ のときと同じ形をとることがわかりました． $\blacksquare$

ここまでの例題で求めた導関数は微分計算の基礎となるものです．次の例題の後にまとめておきますので，活用して下さい．

単位円上の点 (x, y) を $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ と表わし t を時間と考えれば $(\cos t, \sin t)$ は時刻 t における物体の位置と考えられます．このときの t のことを **媒介変数 (parameter)** といいます．このように媒介変数を用いて表わされた関数の微分を行うには，次のような方法があります．

定理 2.5

[媒介変数表示による関数の微分法]$x = f(t), y = g(t)$ がともに区間 I で微分可能で，しかも $f'(t) \neq 0$ であるならば， y は x に関して微分可能で，次の式が成り立つ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

例題 2.17

$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t,\ a > 0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めてみましょう．

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t \ \blacksquare$$

微分法が使いこなせるようになるには，いくつもの問題をこなす必要があります．そこで微分計算に必要な導関数をまとめておきます．

(1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

(2) $(e^x)' = e^x$

(3) $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(4) $(\sin x)' = \cos x$

(5) $(\cos x)' = -\sin x$

(6) $(\tan x)' = \sec^2 x$

(7) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(8) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

確認問題

1. 次の関数の導関数を逆関数の微分法を用いて求めよう．

(a) $y = x^{\frac{1}{n}},\ x > 0$　(b) $y = \sqrt{x},\ x > 0$

2. 次の関数の導関数を求めよう．

(a) $y = (x^2+1)^{2004}$　(b) $y = (x^2 + \dfrac{1}{x^2})^3$　(c) $y = [(2x+1)^2 + (x+1)^2]^3$

3. $\frac{dy}{dx}$ を求めよう．

(a) $x = t+1, y = t^2 - 1$　(b) $x^2 + y^2 = 1$

4. 次の関数の導関数を求めよう．

(a) $x^2 \log x$　(b) $x^3 \sin 2x$　(c) $\sin^{-1}(2x)$　(d) $\sqrt{e^x+1}$　(e) $(\sin(x+1))^3$

(f) $x\sin^{-1}(2x)$

演習問題

1. 次の関数の導関数を逆関数の微分法を用いて求めよう．

(a) $y = \cos^{-1} x$　(b) $y = \tan^{-1} x$

2. 次の関数の導関数を対数微分法を用いて求めよう．

(a) $y = x^2\sqrt{\dfrac{x^3+2x+1}{x^2-3x+1}}$　(b) $y = x^x$　(c) $y = (\sin x)^x$　(d) $y = x^{1/x}$

3. $\frac{dy}{dx}$ を求めよう．

(a) $x = a\cos t, y = a\sin t,\ a > 0$　(b) $x = \sqrt{t} - \dfrac{1}{t}, y = t + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

4. 次の関数の導関数を求めよう．

(a) $x^2(1+\sqrt{x})$　(b) $x^3 \tan 2x$　(c) $x\sin^{-1} x$　(d) $\dfrac{x}{x^2+1}$　(e) $x\sin x$

(f) $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$ (g) $\tan^{-1}(x^2+1)$ (h) $\cos(\sqrt{2x+1})$
(i) $\dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin x+\cos x}$ (j) $e^{2x}\cos x$ (k) $\log|x+\sqrt{x^2+A}|$ (l) $y=\sin(x^2+1)$
(m) $y=\cos(\sqrt{x+1})$ (n) $y=e^{\sin x}$

2.3 高次導関数 (higher-order derivatives)

$y=f(x)$ の導関数 $y'=f'(x)$ が微分可能ならば，その導関数 $(y')'$ が考えられます．これを $y=f(x)$ の **第 2 次導関数 (2nd derivative)** といい，

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, D^2f(x)$$

などの記号で表わします．この第 2 次導関数が微分可能ならば，さらに，第 3 次導関数を考えることができます．このようにして， $y=f(x)$ を次々に n 回微分することにより**第 n 次導関数 (nth derivative)** が定義されます．第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が存在するとき， $f(x)$ は **n 回微分可能 (n times differentiable)** であるといいます．さらに， $f^{(n)}(x)$ が連続のとき， C^n 級であるといいます．また，すべての自然数 n について $f^{(n)}(x)$ が存在するとき，**無限回微分可能 (infinitely many times differentiable)** あるいは C^∞ 級であるといいます．

例題 2.18

次の関数の第 2 次導関数を求めよ．

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$$

解答 物体を地表面の近くで自然落下させ，空気抵抗がほとんどないとすると，時刻 t における物体の位置 $y(t)$ は Galileo の公式より，

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$$

で与えられます．

$y(0)=y_0$ より，y_0 は時刻 $t=0$ の時の物体の高さを表します．これを**初期位置 (initial position)** といいます．この関数を微分すると，

$$y'(t)=-gt+v_0$$

となります．ここで，$y'(0)=v_0$ より，v_0 は時刻 $t=0$ の時の物体の速度を表します．これを**初速度 (initial velocity)** といいます．第 2 次導関数を求めると，

$$y''(t)=-g$$

となります．ここで，$y''(0)=-g$ より，$-g$ は時刻 $t=0$ の時の物体の加速度を表します．ここでの負の符号は方向を表しています．定数 g を**重力加速度定数 (gravitational constant)** といいます． ■

第 n 次導関数に関して次の定理が成り立ちます．

定理 2.6

$f(x), g(x)$ が C^n 級のとき，次の公式が成り立つ．

(1) $\{f(x) \pm g(x)\}^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$

(2) $\{cf(x)\}^{(n)} = cf^{(n)}(x)$ （c：定数）

(3) $\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x)$

(4) $\dfrac{dt}{dx} = c$ 定数 $\Rightarrow \dfrac{d^n f(t)}{dx^n} = c^n \dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$

上の定理の (3) は **Leibniz の定理 (Leibniz theorem)** といい，$\binom{n}{i}$ は $\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ を表わします (例題 1.6 参照)．

証明 (3) の証明

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

より Leibniz の定理は $n = 1$ のときに成り立ちます．次に $n = k$ のときに成り立つと仮定し，$n = k + 1$ のときを考えましょう．

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))^{(k+1)} &= [(f(x)g(x))^{(k)}]' = [\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(x)g^{(i)}(x)]' \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(x)g^{(i+1)}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))^{(k+1)} &= [(f(x)g(x))^{(k)}]' = [\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(x)g^{(i)}(x)]' \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(x)g^{(i+1)}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x) \\
&= f^{(k+1)}(x)g(x) + \sum_{i=1}^{k} (\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}) f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x) + f(x)g^{(k+1)}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x)
\end{aligned}$$

よって，帰納法より

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x)$$

(1),(2),(4) の証明は各自に任せます． ■

例題 2.19

次の関数の第 n 次導関数を求めてみましょう．

(1) $f(x) = \sin x$　　(2) $f(x) = \sin 2x$

解 (1)

$$f'(x) = \cos x = \sin\,(x + \frac{\pi}{2})$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin\,(x + \pi)$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin\,(x + \frac{3\pi}{2})$$

より $f^{(n)}x = \sin\,(x + \frac{n\pi}{2})$ が帰納法で示せます． ■

(2) $t = 2x$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = 2$ 定数．したがって，

$$\frac{d^n \sin 2x}{dx^n} = 2^n \frac{d^n \sin t}{dt^n} = 2^n \sin(t + \frac{n\pi}{2}) = 2^n \sin(2x + \frac{n\pi}{2}).$$

例題 2.20

$f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ の第 n 次導関数を求めてみましょう．

解 まず，

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x})$$

と分解し，$(\dfrac{1}{1+x})^{(n)}$ と $(\dfrac{1}{1-x})^{(n)}$ の第 n 次導関数を計算するのがよい．$(\frac{1}{1-x})' = (1-x)^{-2}, (\frac{1}{1-x})'' = 2(1-x)^{-3}$ より，$(\frac{1}{1-x})^{(n)} = n!(1-x)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ となることが帰納法により示せる．次に，$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$ を考える．$t = -x$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = -1$ 定数 より，

$$(\frac{1}{1+x})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

したがって，

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{1}{2}\left((-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)} + n!(1-x)^{-(n+1)}\right) \ ■$$

例題 2.21

$h(x) = x^n e^{-x}$ の第 n 次導関数を求めてみましょう．

解 $g(x) = x^n,\ f(x) = e^{-x}$ とおくと，

$$g^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k},\ f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

したがって，Leibniz の定理より，

$$h^{(n)}(x) = (f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{-x} \frac{n!}{k!} x^{n-k}$$
$$= (-1)^n n! \left(x^n - x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \ ■$$

確認問題

1. 物体の運動が次の式で表されるとき，初期値 $t_0 = 0$ での位置，速度，加速度と速さを求めよう．

(a) $y(t) = 4 + 3t - t^2$　(b) $y(t) = t^3 - 6t$　(c) $y(t) = \dfrac{18}{t+2}$

2. 次の関数の第 2 次導関数を求めよう．

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$　(b) $f(x) = x \log x$　(c) $f(x) = e^x \sin x$

演習問題

1. 次の公式が成り立つことを示そう．

(a) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$　(b) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(c) $\left[(1+x)^\alpha\right]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

2. 次の関数の第 n 次導関数を求めよう．

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$　(b) $f(x) = x^2 \sin x$　(c) $f(x) = e^x \sin x$

2.4 平均値の定理と関数の性質 (mean-value theorem and properties of functions)

連続関数の基本的性質として，中間値の定理と最大・最小値の定理がありました．では微分可能な関数の基本的性質としてどんなことがいえるのでしょうか．まず，フランスの数学者 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) によって初めて証明された平均値の定理から始めましょう．

定理 2.7

[平均値の定理] 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能ならば，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \ (a < \xi < b)$$

を満たす ξ が少なくとも 1 つ存在する．

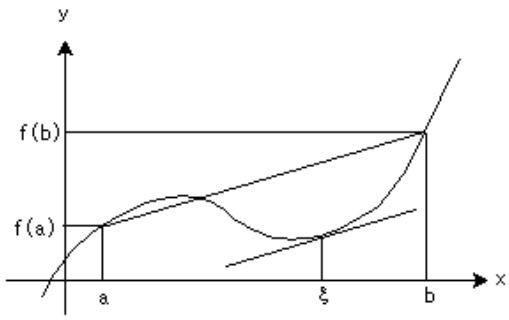


図 2.5　平均値の定理

平均値の定理を証明する前に，平均値の定理はどんなことをいっているのか考えてみましょう．$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を結ぶ直線の傾きと考えることができます．すると，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)\ (a < \xi < b)$$

は，2 点を結ぶ直線と等しい傾きをもった接線が，区間 (a, b) 内に少なくとも 1 つあるということになります．ここで $f(x)$ は走っている車の位置を表わしているとし，区間 $[a, b]$ は時間を表わしていると考えましょう．すると $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は時間 $b-a$ の間に走った距離を表わします．つまり，平均時速を表わしていることになります．では $f'(\xi)$ は何を表わしているのでしょうか．これは微小時間内の距離の変化．つまり瞬間の速さを表わしています．ちょうどねずみ取りのときに警察が使うレーザーの速度計に現われる車のスピードです．つまり，平均値の定理は平均時速が 60km ならば，必ず一回は車のスピードメーターは時速 60km を指したことがあるはずだといっているのです．

次に平均値の定理の特別な場合で フランスの数学者 Michel Rolle (1652-1719) によって 1691 年に発表された定理を考えます．

定理 2.8

[Rolle の定理] 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能で，さらに $f(a) = f(b)$ ならば，

$$f'(\xi) = 0\ (a < \xi < b)$$

を満たす ξ が少なくとも 1 つ存在する．

証明 最大･最小値の定理より，$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で最大値と最小値をとる．いま，$a < \xi < b$ であるような点 ξ で最大値をとったとすると $f(\xi) \geq f(a) = f(b)$ となる．これより，

$$x > \xi \text{のとき}\ \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$$

$$x < \xi \text{のとき}\ \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$$

$f(x)$ は微分可能であるから，両不等式の左辺の極限値は $f'(\xi)$ であり，次の 2 式が成り立つ．

$$f'(\xi) \leq 0,\ f'(\xi) \geq 0$$

したがって，

$$f'(\xi) = 0$$

もし，最大値が $f(a) = f(b)$ ならば， $a < \xi < b$ であるような点で最小値をとるから，いまと同様にして， $f'(\xi) = 0$ となる． ■

平均値の定理の証明

Rolle の定理の条件を満たすような関数を作る．2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を結ぶ直線を $P(x)$ とすると， $P(x)$ の方程式は

$$P(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

で与えられる．そこで $g(x) = f(x) - P(x)$ とおくと，$g(a) = f(a) - P(a) = f(a) - f(a) = 0$. また，$g(b) = f(b) - P(b) = f(b) - f(b) = 0$ となり，Rolle の定理の条件を満たす．したがって，Rolle の定理より，

$$g'(\xi) = f'(\xi) - P'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

を満たす ξ が少なくとも 1 つ存在する． ■

関数の性質

関数 $f(x)$ が $x = a$ の近傍で定義されていて， $h(> 0)$ が十分小さいとき，つねに

$$f(a - h) < f(a) < f(a + h) \text{ あるいは } f(a - h) > f(a) > f(a + h)$$

である場合に， $f(x)$ はそれぞれ $x = a$ で増加の状態あるいは減少の状態にあるといいます．

このような状態を簡単に見分ける方法はないのでしょうか．そんな疑問に次の定理は答えてくれます．

定理 2.9

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であり， $f'(a) > 0$ ならば， $f(x)$ は $x = a$ で増加の状態にあり， $f'(a) < 0$ ならば， $f(x)$ は $x = a$ で減少の状態にある．

証明 $f'(a) > 0$ の場合を考え， $f'(a) < 0$ の場合は各自に任せます．

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) > 0$$

であるから， $|h|$ が十分小さければ，

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} > 0$$

したがって， $h > 0$ ならば $f(a) < f(a + h), h < 0$ ならば $f(a + h) < f(a)$ である．つまり，$f(x)$ は $x = a$ で増加の状態にある． ■

平均値の定理を利用して関数の性質を導いてみましょう．

定理 2.10

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする．

(1) (a, b) において，常に $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は $[a, b]$ で定数関数．

(2) (a, b) において，常に $f'(x) \geq 0$ であって，しかも (a, b) に含まれるどのような区間においても， $f'(x) \not\equiv 0$ ならば， $f(x)$ は $[a, b]$ で狭義の単調増加関数である．

証明 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ である任意の x_1，x_2 をとると，平均値の定理から

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)\ (x_1 < \xi < x_2)$$

したがって，常に $f'(x) = 0$ ならば， $f(x_1) = f(x_2)$ となり， $f(x)$ は定数関数である．

また常に $f'(x) \geq 0$ ならば， $f(x_1) \leq f(x_2)$ となる．もし， $x_1 < x_2$ のとき $f(x_1) = f(x_2)$ ならば，区間 $[x_1, x_2]$ で定数関数となるから，そこで， $f'(x) \equiv 0$ となって仮定に反する．したがって，

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

すなわち， $f(x)$ は $[a, b]$ で狭義の単調増加関数である． ■

系 2.1

$f(x)$ と $g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) において，常に $f'(x) = g'(x)$ ならば，そこで

$$f(x) = g(x) + c\ (c : \text{定数})$$

である．

証明 $F(x) = f(x) - g(x)$ とおくと， $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ より $F(x)$ は定数関数．よって $F(x) = f(x) - g(x) = c$. ■

例題 2.22

この定理をもちいて $f(x) = x - \sin x$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で狭義の単調増加関数であることを示してみましょう．

解 まず， $f'(x) = 1 - \cos x$ より， $f'(x) \geq 0$. また $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で $f'(x) = 0$ になるのは $x = 0$ のときだけ．したがって， $f(x)$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で狭義の単調増加関数となります． ■

関数の大小を比較するにも，単調増加，単調減少が使えます．

例題 2.23

$x > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示してみましょう．

$$1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$$

解 まず， $f(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$ とおきます．$f(0) = 0$ より，不等式は $f(x) > 0$ を示せば成り立つことがわかります．どうやったら示せるでしょうか．もし $f'(x) > 0$ を示せれば，定理 2.4 より， $f(x)$ は狭義の単調増加関数となり， $f(0) = 0$ とあわせて， $f(x) > 0$, $x > 0$ がいえます．そこで $f'(x)$ を求めると，

$$f'(x) = e^x - 1 - x$$

残念ながら，これでは $f'(x) > 0$ かわかりません．ところが $f'(0) = 0$ より， $f''(x) > 0$ がいえれば， $f'(x) > 0$ がいえます．そこで $f''(x)$ をもとめると

$$f''(x) = e^x - 1$$

指数関数 e^x は $x > 0$ のとき， $e^x > 1$ を満たすことをすでに学んだので $f''(x) = e^x - 1 > 0$ がいえます．よって， $f'(x) > 0$ となり，これより， $f(x) > 0$ となります． ■

連続関数の性質として，ある区間での最大・最小値の定理がありましたが，ある点の近くでの関数の性質として，極大・極小は重要です．

a の近傍のすべての x において $f(x) < f(a)$ のとき， $f(x)$ は $x = a$ で**極大 (local maximum)**， $f(x) > f(a)$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で**極小 (local minimum)** であるといいます．また， $f(a)$ をそれぞれ極大値，極小値といい，両方をあわせて**極値 (extrema)** といいます．

頭の中に微分可能な関数を思い浮かべてください．この曲線上の極値となるところで，微分係数または接線の傾きはどうなっているのか考えてみましょう．

定理 2.11

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能で，かつこの点で極値をとれば， $f'(a) = 0$ である．

証明 もし $f'(a) > 0$ ならば，関数 $f(x)$ は $x = a$ で増加の状態にあり，また $f'(a) < 0$ ならば，関数 $f(x)$ は $x = a$ で減少の状態にある．したがって，どちらの場合にも $f(a)$ は極値にならない．ゆえに $f'(a) = 0$ でなければならない． ■

つまり微分可能な関数は極値をとる点では接線の傾きは 0 になることがわかりました．次に連続な関数はどんなときに極値をとるのか考えてみましょう．

定理 2.12

関数 $f(x)$ は $x = a$ の近傍で連続で， $h(> 0)$ は十分小さいとする．

(1) $(a - h, a)$ では $f'(x) > 0, (a, a + h)$ では $f'(x) < 0$ であるならば， $f(x)$ は $x = a$ で極大になる．

(2) $(a - h, a)$ では $f'(x) < 0, (a, a + h)$ では $f'(x) > 0$ であるならば， $f(x)$ は $x = a$ で極小になる．

(3) $f'(x)$ が $x = a$ の前後で符号を変えなければ， $f(a)$ は極値でない．

証明 定理 2.4 により， $f(x)$ は区間 $[a - h, a]$ では狭義の単調増加関数，区間 $[a, a + h]$ では狭義の単調減少関数になるから， $f(x)$ は $x = a$ で極大になる．その他の場合の証明も同様にできます． ■

この定理から関数が微分可能でない点でも極値をとることがあることがわかったでしょうか．そんな例として $f(x) = |x|$ を考えてみましょう．$f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能ではありません．しかし $x = 0$ で極小値 $f(0) = 0$ をとります．

微分係数は接線の傾きを表わしていました．では 2 回微分係数はどんなことを表わしているのでしょうか．まずは 2 回微分係数とグラフの関係から考えましょう．

関数のグラフ上の点 P の近くで，グラフが点 P における接線 (y 軸に平行でない) の上側にあるとき，グラフは点 P で**下に凸 (concave up)** であるといい，グラフが下側にあるとき**上に凸 (concave down)** であるといいます．また，グラフが点 P の片側で接線の上側，もう片側では接線の下側にあるとき点 P を **変曲点 (inflection point)** といいます．

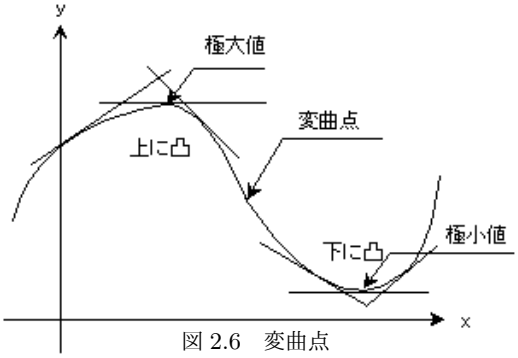


図 2.6　変曲点

定理 2.13

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含むある区間で C^2 級で，

$$f'(a) = 0$$

であるとする．

(1) $f''(a) > 0$ ならば，グラフは下に凸で $f(a)$ は極小値

(2) $f''(a) < 0$ ならば，グラフは上に凸で $f(a)$ は極大値

証明 (1) の証明．関数 $f'(x)$ に定理 2.4 を適用すると，$f'(x)$ は $x = a$ で増加の状態．いま，$f'(a) = 0$ であるから，$f'(x)$ は $x = a$ の近傍で左側では負，右側では正になる．よってグラフは下に凸となる．また定理 2.4 より，$f(x)$ は $x = a$ で極小．(2) の証明も同様にできます．■

例題 2.24

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$ の極値およびグラフの凹凸を調べ，グラフの概形を描いてみましょう．また，区間 $[-1, 1]$ での最大値を求めてみましょう．

解 まず，$f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で微分可能より，極値をとれば，$f'(x) = 0$ となります．そこで，$f'(x) = 0$ を満たす x を求めます．

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x - 4) = 0$$

より $x = 0, 4$ が極値の候補となります．次にグラフの凹凸を調べるため，$f''(x)$ を求めます．

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3)$$

ここで極値の候補と変曲点の候補を x 軸上に，その下に $f'(x)$ の符号，その下に $f''(x)$ の符号，最後に $f(x)$ の増減を表わした，増減表とよばれる表を書いてみましょう．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	-255	$\nearrow$
凸	上	上	上	変曲点	下	下	下

1 回微分を用いると， $x = 0$ で極大値 $f(0) = 1$ をとり， $x = 4$ で極小値 $f(4) = -255$ をとることがわかります．次に 2 回微分を用いると $x = 3$ が変曲点で，その左側では上に凸，その右側では下に凸になっています．最後にグラフを描いてみましょう．

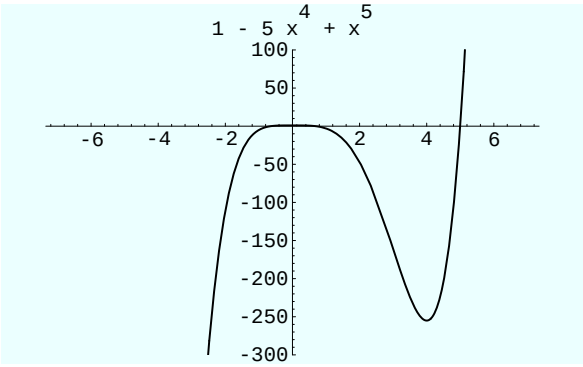


図 2.7　極大

次に閉区間 $[-1, 1]$ を考えます．最大最小値の定理より，連続関数は閉区間の中で必ず最大値，最小値をとるので，端点 $x = -1$ と $x = 1$ での値と区間 $(-1, 1)$ 内での極大値，極小値を比べ，最も大きい値が最大値となります．よって

$$f(-1) = -5,\ f(1) = -3,\ f(0) = 1$$

より最大値は $f(0) = 1$．■

確認問題

1.　次の関数は与えられた区間上で平均値の定理の条件を満たすことを示し，平均値の定理における ξ の値を求めよう．

(a) $f(x) = x^2,\ [1, 2]$　(b) $f(x) = x^3,\ [1, 3]$　(c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ [0, 1]$

2.　次の関数の増減表，凹凸，極値，変曲点を調べよう．

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$　(b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$　(c) $f(x) = x(x + 1)(x + 2)$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$　(e) $f(x) = |x - 1||x + 2|$

3.　次の問いに答えよう．

(a)　$x+y=40$ のとき，xy の最大値を求めよ．

(b)　正四角形の 2 頂点が $y=4-x^2$ 上にあり，残りの 2 頂点が x 軸上にあるとき，正四角形の面積の最大値を求めよ．

(c)　半径 4 の円に内接する正四角形の面積の最大値を求めよ．

(d) 楕円 $x^2+2y^2=2$ と直線 $x+y=6$ の最短距離を求めよ．

演習問題

1.　Rolle または平均値の定理における ξ の値を，次の関数と区間について求めよう．

(a) $f(x)=x^3-x^2,\ [-1,1]$　(b)　$f(x)=\sin^{-1}x,\ [0,1]$　(c)　$f(x)=\log x,\ [1,e]$

2.　$f(x)=x-\tan x$ は $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ で狭義の単調減少関数となることを示そう．

3.　次の不等式を証明しよう．

(a)　$x>0$ のとき，$\dfrac{x}{1+x}<\log(1+x)$　(b)　$x>0$ のとき，$\dfrac{x}{1+x^2}<\tan^{-1}x<x$

(c) $e^{\pi}>\pi^{e}$

4.　次の関数の極値および凹凸を調べグラフの概形を求めよう．

(a)　$f(x)=x^3-6x^2+9x+3$　(b) $f(x)=x^2e^{-x}$

2.5　曲線の概形 (curve sketching)

与えられた方程式が表わしている曲線の性質を調べ，その曲線の概形を描くことを考えましょう．そのためには次のことに注意しなければなりません．

1. 曲線の対称性の有無
2. 曲線の存在範囲
3. 曲線が座標軸と交わる点
4. 漸近線と，曲線の漸近線への近づき方
5. 曲線の増減，曲線の凹凸，極値と極値をとる点，変曲点

問題によっては，まだ調べなければならないこともあり，またこのうちのいくつかを省いても実際に曲線の概形を描くことができることもあります．

例題 2.25

曲線 $y=\dfrac{x^3}{x^2-2}$ の概形を描いてみましょう．

解

1. 右辺は x の奇関数なので原点に対して対称となります．
2. 有理関数なので分母が 0 以外でこの関数は存在．

3. x 軸との交点は $y=0$ より $x=0$，また y 軸との交点は $x=0$ より $y=0$ となり，原点でしか座標軸に交わりません．
4. まず， $x^2-2=0$ より $x=\pm\sqrt{2}$ は漸近線です．次に

$$y=\frac{x^3}{x^2-2}=x+\frac{2x}{x^2-2}$$

とかけるので， $y=x$ も漸近線です．

5.

$$y'=\frac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2}, y''=\frac{4x(x^2+6)}{(x^2-2)^3}$$

より $x=0,\pm\sqrt{6}$ が極値の候補となります．ここで増減表を書くと

x		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$

となります．これより曲線の概形は次のようになります．

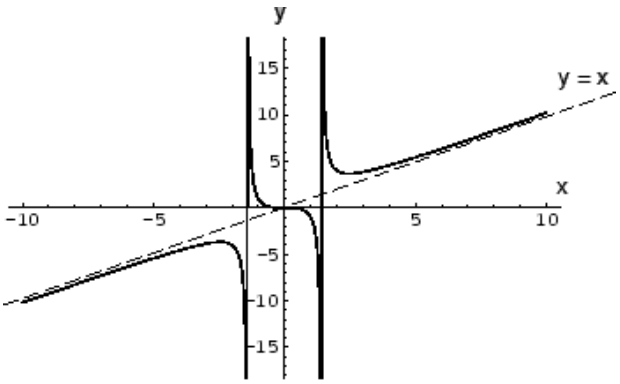


図 2.8　概形

次に極座標で与えられた曲線の概形について考えてみましょう．まず，その前に極座標とは何なのかを学びましょう．

座標を用いる理由は点の位置を決めるためです．ただ，どういう基準で決めるかによって違ってきます．たとえば直交座標系では垂直に交わる 2 本の直線を基準に座標を決めます．**極座標系 (polar coordinate system)** では **極 (pole)** とよばれる点と極からのびる**極軸 (polar axis)** とよばれる軸によって座標を決めます．

直交座標平面上に 1 点 $\mathrm{P}(x,y)$ が与えられたとします．このとき点 P を極座標で表わすとどうなるでしょうか．まず，原点 O を極として極から点 P を通る光線を放ちます．このとき極軸とこの光線の作る角が θ ならば，この光線を θ で表わします．次に極から点 P までの距離を $|r|$

で表わします．すると，点 P の位置は r と θ の組 $[r, \theta]$ によって完全に決めることができます．この $[r, \theta]$ を点 $\mathrm{P}(x, y)$ の **極座標 (polar coordinate)** とよびます．

このとき点 P の直交座標 (x, y) と極座標 $[r, \theta]$ の間には

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

という関係があります．したがって

$$\tan\theta = \frac{y}{x},\ r^2 = x^2 + y^2$$

となります．これより，r と θ の値が与えられれば，点 $\mathrm{P}(x, y)$ の位置は決まります．しかし，点 $\mathrm{P}(x, y)$ の位置が与えられても r と θ の値は一意的に定まりません．次の例題を考えてみましょう．

例題 2.26

点 P の直交座標 $(1, \sqrt{3})$ を極座標で表わしてみましょう．

解 $x = 1, y = \sqrt{3}$ より $\tan\theta = \sqrt{3}, r^2 = 1 + 3 = 4$ となります．これより点 P は光線 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ で極から点 P までの距離は 2 となるので，点 P の極座標は $[2, \dfrac{\pi}{3}]$ と表わすことができます．ところが，光線 $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ で $r = -2$ ととると点 P を表わすことができます．よって点 P の極座標は $[-2, \dfrac{4\pi}{3}]$．他にも $[2, \dfrac{7\pi}{3}]$ などいろいろあります．図 2.9 参照 ■

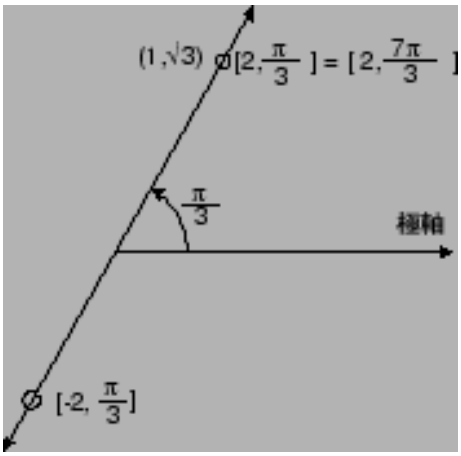


図 2.9　極座標

曲線の方程式が直交座標で

$$g(x, y) = 0$$

で与えられるとき，この方程式を極座標で表わすと，

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$

となります．このように極座標で表わされた曲線の方程式を **極方程式 (polar equation)** といいます．

例題 2.27

$x^2 + y^2 = 4$ を極方程式で表わしてみましょう．

解 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと， $r^2 = x^2 + y^2 = 4$ より $r = 2, -2$ ■

ここで極方程式の代表的なものをいくつか見てみましょう．

例題 2.28

$r(\theta) = 1 + \cos\theta$ を描いてみましょう．

解

1. $\cos\theta$ は偶関数より $r(-\theta) = r(\theta)$ よって x 軸に対称．これよりグラフを描くには $\theta = 0$ から $\theta = \pi$ まで調べればよいことが分ります．
2. 次に θ を 0 から π まで変化させたときの r の変化を調べます．

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	2	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1+\frac{1}{2}$	1	$1-\frac{1}{2}$	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

これより**心臓形 (cardiod)** とよばれる図 2.10 を得ます．

例題 2.29

$r(\theta) = 1 + 2\cos\theta$ を描いてみましょう．

解

1. $\cos\theta$ は偶関数より $r(-\theta) = r(\theta)$ よって x 軸に対称．これよりグラフを描くには $\theta = 0$ から $\theta = \pi$ まで調べればよいことが分ります．
2. 次に θ を 0 から π まで変化させたときの r の変化を調べます．

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	3	$1+\sqrt{3}$	$1+1$	1	$1-1$	$1-\sqrt{3}$	-1

これより**リマソン (Limaçon)** とよばれる図 2.11 を得ます．

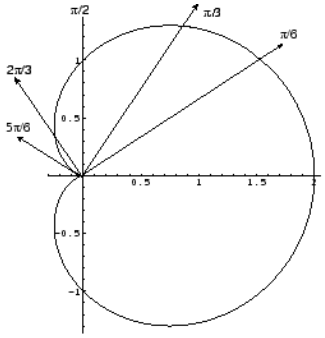


図 2.10　cardioid

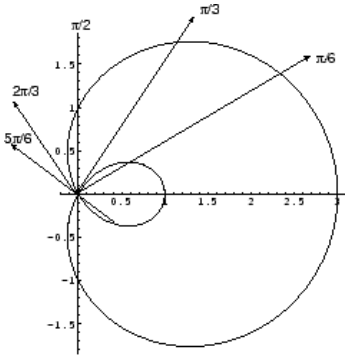


図 2.11　limaçon

確認問題

1.　次の曲線の漸近線を求めよう．

(a) $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$　(b) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$　(c) $y = \dfrac{2x}{x^2-9}$

2.　次の曲線は垂直接線または**垂直カスプ (尖点)** を持っているか判断しよう．垂直接線とは，点 $(c, f(c))$ において，$x \to c$ のとき，$f'(x) \to \infty$ または $-\infty$ が成り立つことであり，垂直カスプとは，$f'(c-0) = \pm\infty$ で $f'(c+0) = \mp\infty$ が成り立つことである．

(a) $f(x) = x^{1/3}$　(b) $f(x) = x^{2/3}$　(c) $f(x) = \sqrt{|x-2|}$

演習問題

1.　次の曲線の概形を描いてみよう．

(a) $y = \dfrac{1}{1+e^x}$　(b) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

2.　次の曲線の概形を描いてみよう．

(a) $r = a\cos\theta,\ a > 0$　円 (circle)

(b) $r = 3\theta$，**アルキメデスの渦線 (spiral)**

(c) $r^2 = 4\cos 2\theta$　**ベルヌーイのラムニスケイト (lemniscate)**

2.6　不定形の極限値 (limit of indeterminate forms)

1 章で極限値について学びましたが，$x \to a$ のとき $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ だとすると，

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

はどうなるのでしょうか．この場合を形式的に $\frac{0}{0}$ と書くことにすると，同じように極限値が明白でない場合が, 和，差，積，商，累乗などのときにも起こります．例えば，

$$\infty - \infty, \infty \cdot 0, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, \infty^{0}$$

などです．このような場合をまとめて**不定形 (indeterminate form)** といいます．1 章でも不定形の極限値を求めましたが，複雑なテクニックを覚えなければならず，数学をつまらないと感じた人も少なくないでしょう．そこでここでは，不定形の極限値を微分法を使って求める方法について考えてみましょう．この方法のもとになっているものに，フランスの数学者 Augustine Louis Cauchy (1789-1854) によって一般化された Cauchy の定理とよばれている定理があります．

定理 2.14

[Cauchy の平均値の定理]2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする．$g(a) \neq g(b)$ で，しかも $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 にならないならば，

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \ (a < \xi < x)$$

を満たす ξ が少なくとも 1 つ存在する．

平均値の定理を $f(x)$，$g(x)$ に適用すると，

$$f(b) - f(a) = f'(\xi_1)(b - a)$$

$$g(b) - g(a) = g'(\xi_2)(b - a)$$

となり，これより両辺の商を求めると，

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

残念ながら ξ_1 と ξ_2 の値は一般に等しくないので，この方法では Cauchy の平均値の定理は得られません．

証明 平均値の定理のときと同じように，Rolle の定理の条件を満たすような関数を考えます．

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) - f(a)$$

という関数を考えると， $G(a) = G(b) = 0$ となり， $G(x)$ は Rolle の定理の条件を満たす．したがって，Rolle の定理より，

$$G'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0$$

を満たす ξ が少なくとも 1 つ存在する．ところで，

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0$$

より， $g'(\xi) = 0$ ならば $f'(\xi) = 0$ となり仮定に反する．したがって， $g'(\xi) \neq 0$ となり，

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

を得る． ■

極限値を求めるのに苦労した人もいると思いますが，次の定理はそんな人の味方です．この定理はフランスの数学者 G. F. A. L'Hospital (1661-1704) の名前をとってつけられました．最初に証明したのは彼の先生の Jakob Bernoulli (1654-1705) です．

定理 2.15

[L'Hospital の定理]2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする．$f(a) = g(a) = 0$ で，しかも

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

が存在するならば，

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

である．

証明　$a < x < b$ である x をとると，Cauchy の平均値の定理より，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \ (a < \xi < x)$$

を満たす ξ が少なくとも 1 つ存在する．したがって，

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l \ ■$$

この定理は $l = \infty, -\infty$ の場合も成り立ちます．

例題 2.30

次の極限値を求めてみましょう．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin x - x}$$

解

これは $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形です．そこで，分母，分子を別々に微分し，その商の極限値を求めると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$$

これも $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形です．そこでもう一度，分母，分子を別々に微分し，その商の極限値を求めると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{-\sin x}$$

これもまた，$\dfrac{0}{0}$ の形の不定形です．そこでもう一度，分母，分子を別々に微分し，その商の極限値を求めると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\sin x}{-\cos x}=\frac{2}{-1}=-2$$

したがって，L'Hospital の定理を順に使うことにより，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin x-x}=-2$$

となります．■

さて L'Hospital の定理は $\left(\dfrac{0}{0}\right),\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ の不定形のときにしか使えないのでその他の不定形のときは，次のようにして $\left(\dfrac{0}{0}\right),\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ の形に変形します．

(1)　$f(x)g(x)\to(0\cdot\infty)$ の場合，

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to(\frac{0}{0})$$

に変形

例題 2.31

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin x$ を求めてみましょう．

解 これは $\infty\cdot 0$ の不定形をしています．そこで $\dfrac{1}{x^2}\sin x$ を $\dfrac{\sin x}{x^2}$ と書き直すと $\dfrac{0}{0}$ の不定形になり，L'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x}$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{\cos x}{2x}=-\infty,\ \lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{2x}=\infty$ より極限値は存在しません．■

不注意で $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x}$ に L'Hospital の定理を用いると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=0$ と書きたくなりますが，これは間違いです．

(2)　$(f(x)-g(x)) \to (\infty-\infty)$ の場合，

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \to (\frac{0}{0})$$

に変形

例題 2.32

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)$ を求めてみましょう．

解 これは $\infty-\infty$ の不定形をしています．そこで $\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}$ を $\dfrac{e^x-1}{x}$ と書き直すと $\dfrac{0}{0}$ の不定形になり，L'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x}{1}=1$$

よって

$$\lim_{x\to 0+}(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x})=1$$

となります．■

(3)　$(f(x)^{g(x)}) \to (1^\infty$ または $\infty^0)$ の場合，

$$f(x)^{g(x)}=e^{\log f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\log f(x)} \to (e^{\infty\cdot 0} \text{ または } e^{0\cdot\infty})$$

に変形

例題 2.33

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を求めてみましょう．

解 これは 1^∞ の不定形をしています．そこで $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を $e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}$ と書き直すと $\dfrac{1}{x}\cdot\log(1+x)$ は $\infty\cdot 0$ の不定形なので $\dfrac{1}{x}\cdot\log(1+x)$ を $\dfrac{\log(1+x)}{x}$ と書き直すと，$\dfrac{0}{0}$ の不定形になり，L'Hospital の定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{\log(1+x)}{x}}\\ &\underbrace{=}_{\text{L'Hospital}}\lim_{x\to 0+}e^{\frac{1/(1+x)}{1}}=e\end{aligned}$$

となります．■

確認問題

1.　次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$　(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x}$　(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}$　(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin x}{x}$　(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

演習問題

1. 次の極限値を求めよう．

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$　(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$　(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}$　(d) $\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$

(e) $\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x})$　(f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cos x}$　(g) $\lim_{x\to 0}(\dfrac{e^x-1}{x})^{1/x}$

(h) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$

2.7 Taylor の定理 (Taylor's theorem)

超越関数 $f(x)$ を多項式を用いて表わすことができないでしょうか．もしそうなれば，整関数さえ知っていれば他の関数のことを知らなくてすむのです．そんな疑問に イギリスの数学者 Brook Taylor (1685-1731) は 1712 年に答えてくれました．

定理 2.16

[Taylor の定理]$f(x)$ が点 a, b を含むある区間で C^n 級であるならば,

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n,\ a<\xi<b$$

となるような ξ が存在する．

証明 定数 K を

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{(b-a)^n}{n!}K$$

を満たすようにとり,

$$F(x)=f(b)-f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k-\frac{(b-x)^n}{n!}K$$

とおくと， $F(a)=0, F(b)=0$ となり， $F(x)$ は Rolle の定理の条件を満たす．したがって，Rolle の定理より

$$\begin{aligned}F'(\xi)&=-f'(\xi)-\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(b-\xi)^{k-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(b-\xi)^{k-1}+\frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}K\\&=-f'(\xi)+f'(\xi)-\frac{f^n(\xi)}{(n-1)!}(b-\xi)^{n-1}+\frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}K=0\end{aligned}$$

よって

$$K=f^{(n)}(\xi)\ \blacksquare$$

ここで用いられた R_n を **Lagrange の剰余数 (Lagrange's remainder)** といい，

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

を **Taylor の多項式 (Taylor's polynomial)** といいます．特に $a = 0$ とおいて得られる定理を **Maclaurin の定理** といい， $b = x$ とおくと

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\ 0 < \theta < 1$$

となります．

ここで誤差の評価は

$$|R_n| = |\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n| \leq (\max_{\theta \in [0,1]} |f^{(n)}(\theta x)|)\frac{|x|^n}{n!}$$

で与えられます．

例題 2.34

Maclaurin の定理を使って $f(x) = e^x$ の Taylor の多項式と Lagrange の剰余数の誤差の評価を求めてみましょう．

解 $f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(0) = 1$ よって

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

ここで $R_n = \dfrac{e^{\theta x}x^n}{n!}$ $(0 < \theta < 1)$ が成り立ちます．ところが，

$$\lim_{n\to\infty} |R_n| \leq \lim_{n\to\infty} (\max_{\theta \in [0,1]} |e^{\theta x}|)\frac{|x|^n}{n!} \leq |e^x| \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0 \ \blacksquare$$

$f(x)$ は $x = 0$ を含む区間 I で C^∞ 級関数とすると，Maclaurin の定理より任意の自然数 n に対して，

$$f(x) = f(x) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

が成り立ちます．このとき，もし $R_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であるならば

$$f(x) = f(x) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots$$

と表わせます．この式を $f(x)$ の **Maclaurin 展開 (Maclaurin expansion)**，または $x = 0$ での **Taylor 展開 (Taylor expansion)** といいます．

定理 2.17

次の級数展開が成り立つ．

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$, $(-\infty < x < \infty)$

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$, $(-\infty < x < \infty)$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$, $(-\infty < x < \infty)$

(4) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \cdots$, $(-1 < x \leq 1))$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

ただし，$(-1 < x < 1)$

証明 (1) はすでに例題で行いました．

(2) $f(x) = \sin x$ とすると $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$ より

$$f^{(2m)}(x) = (-1)^m \sin x,\ f^{2m+1}(x) = (-1)^m \cos x$$

と表わせる．よって

$$f^{(2m)}(0) = 0,\ f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$$

となる．これより R_n を計算すると

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

よって

$$|R_n| = |\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n| \leq |\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}||x|^n \leq \frac{1}{n!}|x|^n \to 0\ (n \to \infty)$$

(3)，(4)，(5) の証明は演習問題にまわしますのでやってみましょう．

ここで E.G.H.Landau(1877-1938) によって用いられたちょっと便利な記号を紹介します．例えば関数 $f(x), g(x)$ の間に

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l\ (l \neq \pm\infty)$$

が成り立つとき

$$f(x) = O(g(x))$$

と表わし，この O を **Landau のビッグオー (Landau O)** といいます．また $l = 0$ のとき，つまり

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

が成り立つとき

$$f(x) = o(g(x))$$

と表わし，この o を **Landau のスモールオー (Landau o)** といいます．ここで MacLaurin の定理をもう一度みてみましょう．関数 f が無限回微分可能だとし，n 次の多項式を作ってみます．すると，剰余項 R_n は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

で与えられ，$f(x)$ が C^∞ 級より $f^{(n)}(x)$ は連続となります．よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_n - f^{(n)}(0)x^n/n!}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

となります．ここで Landau の記号を用いると

$$R_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = o(x^n)\ (x\to 0)$$

となるので，次の定理が成り立ちます．

定理 2.18

関数 $f(x)$ が 0 を含むある区間で C^∞ 級ならば

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)\ (x\to 0)$$

が成り立つ．

例題 2.35

Landau の記号を用いて次の極限値を求めてみましょう．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

解

$\cos x$ の MacLaurin 展開より $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ と表わせます．よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}\ \blacksquare$$

確認問題

1. 次の関数の MacLaurin 展開を定理 2．17 を用いて求めよう．(a) $\dfrac{1}{1+x}$

(b) $\dfrac{1}{1-x^2}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\sqrt{1-x^2}$

演習問題

1. 次の MacLaurin 展開が成り立つことを示そう．

(a) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$, $(-\infty < x < \infty)$

(b) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots$, $(-1 < x \leq 1))$

(c) $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

ただし，$(-1 < x < 1)$

(d) $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$, $(-1 < x < 1)$

2. 次の極限値を Landau の記号を用いて求めてみよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$　(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$

3.

(a) 演習問題 1(d) より，$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots$ を得ることができる．これを用いて，プログラムを組み π を小数点以下 2 桁まで求めてみよう．

(b) $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}(\frac{1}{5}) - \tan^{-1}(\frac{1}{239})$ と表した式を **Machin の公式**という．この公式を用いて π を小数点以下 100 桁まで求めてみよう．

第 3 章

積分法 (INTEGRATION)

3.1 不定積分 (indefinite integrals)

ある区間で定義されている関数 $f(x)$ に対して，この区間のすべての x について

$$F'(x) = f(x)$$

が成り立つような関数 $F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数 (primitive function)** といいます．例えば，$(\frac{x^3}{3})' = x^2$ なので，$\frac{x^3}{3}$ は $f(x) = x^2$ の原始関数です．同様に，$(\frac{x^3}{3} + 1)' = x^2$ となるので $\frac{x^3}{3} + 1$ も $f(x) = x^2$ の原始関数です．ここで定数 C の導関数は 0 であることに注意すると $(\frac{x^3}{3} + C)' = x^2$ となり，$\frac{x^3}{3} + C$ も $f(x) = x^2$ の原始関数です．この他にも $f(x) = x^2$ の原始関数はあるのでしょうか．そんな疑問に次の定理は答えてくれます．

定理 3.1

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとすると，$f(x)$ のすべての原始関数は $F(x) + c$ の形で与えられる．ただし c は任意の定数である．

証明 $G(x)$ を $f(x)$ の任意の原始関数とすると，$G'(x) = f(x)$ なので，$G'(x) = F'(x)$ となります．したがって，系 2.4 より

$$G(x) = F(x) + c \ (c : \text{定数})$$

また，$F(x) + c$ が $f(x)$ の原始関数であることは $(F(x) + c)' = F'(x)$ より明らかです．■

$f(x)$ の原始関数全体を $f(x)$ の **不定積分 (indefinite integral)** といい，$\int f(x)dx$ で表わします．つまり，$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数の 1 つならば定理 3.1 より，

$$\int f(x)dx = F(x) + c \ (c : \text{定数}) \tag{3.1}$$

となります．また，$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を **積分する (integrate)** といい，式 3.1 に出てくる定数 c を **積分定数 (constant of integration)** といいます．．なお不定積分

を求めることができるできるということは，原始関数を初等関数だけを用いて表わすことができるということです．

原始関数の定義をみると，変数が x であることは特別重要なことではないことに気づきます．例えば，関数 $f(t)$ を考えてみてください．ここで t についての導関数が $F'(t) = f(t)$ となる関数 $F(t)$ があれば，これは $f(t)$ の原始関数となり，

$$\int f(t)dt = F(t) + c$$

が成り立ちます．このように dx や dt はどの変数について積分したかを表わしていて，**ダミー変数 (dummy variable)** とよばれます．

ここで，不定積分とは何かが分ったと思いますので，次の例題を見てみましょう．

例題 3.1

$\int(\cos x + \sec^2 x)dx$ を求めてみましょう．

解

$F'(x) = \cos x + \sec^2 x$ となる $F(x)$ を求めます．

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\tan x)' = \sec^2 x$$

また，和の導関数は導関数の和より

$$(\sin x + \tan x)' = \cos x + \sec^2 x$$

よって，

$$F(x) = \sin x + \tan x + c \quad \blacksquare$$

例題 3.2

$\int(\sec x \tan x + \frac{1}{x})dx$ を求めてみましょう．

解

$F'(x) = \sec x \tan x + \frac{1}{x}$ となる $F(x)$ を求めます．

$$(\sec x)' = \sec x \tan x,\ (\log x)' = \frac{1}{x}$$

また，和の導関数は導関数の和より

$$(\sec x + \log x)' = \sec x \tan x + \frac{1}{x}$$

よって，

$$F(x) = \sec x + \log x + c \quad \blacksquare$$

次に不定積分を求めるのに有用な基本的な公式をあげておきます．これらは右辺を微分することにより確かめることができます．

定理 3.2

[積分公式]

(1) $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c$

(3) $\displaystyle\int e^{x}dx = e^{x} + c$

(4) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + c$

(5) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + c$

(6) $\displaystyle\int \tan x dx = \log|\sec x| + c$

(7) $\displaystyle\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$

(8) $\displaystyle\int \mathrm{cosec}^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log|\frac{x-a}{x+a}| + c$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log|x+\sqrt{x^2+A}| + c$

証明 (1) $\displaystyle(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c)' = x^{\alpha}$ より $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
以下同様にして証明できます．■

積分公式の (1) から (5) までは是非覚えましょう．(6) から (12) までは次に習う置換積分を用いることにより導くことができるので，できれば導き方を学びましょう．

積分公式を使って積分をするとき，次の定理は便利です．

定理 3.3

連続関数 $f(x), g(x)$ において，次の式が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

証明

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx) &= \frac{d}{dx}\int f(x)dx \pm \frac{d}{dx}\int g(x)dx \\ &= f(x) \pm g(x)\end{aligned}$$

これより，$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ は $f(x) \pm g(x)$ の不定積分です．(2) の証明も同様にできます．
■

例題 3.3

$f''(x) = 6x - 2,\ f'(1) = -5,\ f(1) = 3$ である $f(x)$ を求めてみましょう．
解 まず，f'' を積分することにより f' を求めます．

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (6x-2)dx = 3x^2 - 2x + c$$

ここで，初期条件 $f'(1) = -5$ より，$-5 = f'(1) = 3 - 2 + c$．したがって，$c = -6$．これより，$f'(x) = 3x^2 - 2x - 6$ となります．

次に，f' を積分して f を求めます．

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 2x - 6)dx = x^3 - x^2 - 6x + K,\ K \text{ 積分定数}$$

ここで，初期条件 $f(1) = 3$ より，$3 = f(1) = 1 - 1 - 6 + K$．したがって，$K = 9$．これより，$f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 9$ ■

例題 3.4

$\displaystyle\int (3\sin x + x^2)dx$ を求めてみましょう．
解

$$\begin{aligned}\int (3\sin x + x^2)dx &\underbrace{=}_{\text{定理 3.1(1)}} \int 3\sin x dx + \int x^2 dx \\ &\underbrace{=}_{\text{定理 3.1(2)}} 3\int \sin x dx + \int x^2 dx \\ &\underbrace{=}_{\text{定理 3.1}} -3\cos x + \frac{x^3}{3} + c \ \blacksquare\end{aligned}$$

確認問題

1. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int (2x-3)dx$　(b) $\displaystyle\int 5x^4 dt$　(c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}dx$　(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$　(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$　(g) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$　(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}dx$

演習問題

1. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int (3x^{-3} + 4x^5)dx$　(b) $\displaystyle\int (t^3 + \frac{1}{t^2+1})dt$　(c) $\displaystyle\int -2\tan^2 x dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}dx$　(e) $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{x^2+4}dx$　(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt$　(g) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}dt$　(i) $\displaystyle\int \frac{1}{4-x^2}dx$

3.2　置換積分法 (integration by substitution)

不定積分 $\int f(x)dx$ を求めるときに，被積分関数 $f(x)$ の原始関数が四則の演算により積分公式 (1) から (12) の形に直せないことがよくあります．そんなとき， $f(x)dx$ の x をある t の関数 $\phi(t)$ に置き換えることにより， $f(x)dx$ を $f(\phi(t))\phi'(t)dt$ という，公式 (1) から (12) を用いることにより積分できる形に変形することを **置換積分法 (integration by substitution)** といいます．

定理 3.4

[置換積分法] $f(x)$ が連続であるとき， $x=\phi(t)$ とおくと， $\phi(t)$ が微分可能であれば，

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

が成り立つ．

証明 $\int f(x)dx = F(x)$ とすると， $F'(x)=f(x)$ である．そこで $x=\phi(t)$ とおき， $F(\phi(t))$ を考えると，

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

となるので，

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) = F(x) = \int f(x)dx$$

となります． ■

この定理により， $\int f(x)dx$ を求めるのに， $x=\phi(t)$ とその微分 $dx=\phi'(t)dt$ とをもとの式に形式的に代入し， $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ としてこれを計算すればよいことがわかります．

例題 3.5

$\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx$ を求めてみましょう．

解 このままの形では，公式 (1) から (12) のどれも使えないことがわかります．そこで $t=x^2+x$ とおきます．すると $dt=(2x+1)dx$ となるので，これを用いて元の不定積分を書き直すと

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx = \int \frac{dt}{t}$$

となります．右辺をよく見てください．これは定理 3.1(2) の形でダミー変数 t が用いられています．よって

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|x^2+x| + c$$

となります． ■

この例題に用いたテクニックを一般化すると次の公式を得ます．

$$\int \frac{kg'(x)}{g(x)}dx = k\log|g(x)| + c$$

この公式を用いると

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\log|\cos x| + c$$

となります．これを定理 3.1(6) と比較すると，

$$-\log|\cos x| + c = \log 1 - \log|\cos x| + c = \log\frac{1}{|\cos x|} + c = \log|\sec x| + c$$

より同じものだとわかります．このように定理 3.1 の (6) から (12) までの公式は，置換積分を用いることにより定理 3.1(2)，(4)，(5) からすべて求めることができることを次の何節かで学びます．

例題 3.6

$\int x^2\sqrt{x+1}dx$ を求めてみましょう．

解 $t = x+1$ とおくと， $dt = dx$．また $x = t-1$ より，

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x+1}dx &= \int (t-1)^2\sqrt{t}dt \\ &= \int (t^2-2t+1)t^{\frac{1}{2}}dt \\ &= \int (t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}})dt \\ &= \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c \ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 3.7

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ を求めてみましょう．

解 $t = x^2-4$ とおくと， $dt = 2xdx$ となるので，

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx &= \int \frac{dt/2}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt = \frac{1}{2}2t^{1/2} + c = \sqrt{x^2-4} + c \ \blacksquare\end{aligned}$$

確認問題

1.　次の積分を求めよう．

(a) $\int \sin 2x\ dx$　(b) $\int \frac{x}{x^2+1}\ dx$　(c) $\int e^{2x}\ dx$　(d) $\int \frac{1}{x\log x}\ dx$

(e) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\,dx$ (g) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

演習問題

1. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int e^{2-x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sec^2(1-x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{3\tan\theta+1}}\,d\theta$ (g) $\displaystyle\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ (j) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,dx$

3.3 部分積分法 (integration by parts)

置換積分法を用いて．かなりの積分が求められるようになりました．しかし，$\int \log x dx$ のような単純に思えるものも，置換積分法では手に負えないのです．実際，$t=\log x$ とおくと $dt=\dfrac{dx}{x}$．これより，$dx=xdt,\ x=e^t$ となり，

$$\int \log x dx = \int te^t dt$$

これでは先に進めません．ではどうすればいいのでしょうか．そこで，置換積分を用いても不定積分が求められないとき，最後の手段として用いるものに，**部分積分法 (integration by parts)** があります．

定理 3.5

[部分積分法] $f(x), g(x)$ が連続であるとき，次の式が成り立つ．

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

証明

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\} &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\\ &= f(x)g'(x)\end{aligned}$$

これより，$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ は $f(x)g'(x)$ の不定積分となります． ■

上の式で，$u=f(x), v=g(x)$ とおくと，次の式が成り立ちます．

$$\int udv = uv - \int vdu$$

例題 3.8

部分積分法を用いて，$\displaystyle\int \log x dx$ を求めてみましょう．

解

$$\begin{aligned} u &= \log x, \quad dv = dx \text{ とおくと} \\ du &= \tfrac{1}{x}dx, \quad v = \textstyle\int dv = \int dx = x + c \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\log x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} &= \underbrace{(x+c)}_{v} \underbrace{\log x}_{u} - \int \underbrace{(x+c)}_{v} \underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} \\ &= x\log x + c\log x - x - c\log x + c \\ &= x\log x - x + c \end{aligned}$$

これより，$v = \int dv$ を求めるときは任意の定数 c を無視できます．■

例題 3.9

$\displaystyle\int \sin^{-1} x dx$ を求めてみましょう．

解 まず，$t = \sin^{-1} x$ とおくと，$x = \sin t, -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ より，$dx = \cos t dt$．よって

$$\int \sin^{-1} x dx = \int t\cos t dt$$

となり，積分公式 (1) から (12) を用いて積分できません．そこで，部分積分を用います．

$$\begin{aligned} u &= \sin^{-1} x, \qquad dv = dx \text{ とおくと} \\ du &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad v = \textstyle\int dv = \int dx = x \quad (\text{定数 c は無視}) \end{aligned}$$

よって

$$\int \underbrace{\sin^{-1} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin^{-1} x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{du}$$

ここで，$t = 1 - x^2$ とおくと，$dt = -2xdx$．よって

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \frac{dt/2}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt = -t^{1/2} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

これより，

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c \ ■$$

例題 3.10

$\displaystyle\int xe^{-x}dx$ を求めてみましょう．

解

$$u = x, \qquad dv = e^{-x}dx \text{ とおくと}$$
$$du = dx, \quad v = \int dv = -e^{-x} \quad (\text{定数 c は無視})$$

よって

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{-e^{-x}}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + c \ \blacksquare$$

確認問題

1.　次の不定積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int xe^x\ dx$　(b) $\displaystyle\int x\sin x\ dx$　(c) $\displaystyle\int xe^{2x}\ dx$　(d) $\displaystyle\int x^2e^x\ dx$

(e) $\displaystyle\int x^2\sin x\ dx$　(f) $\displaystyle\int x^5e^{x^3}\ dx$　(g) $\displaystyle\int x\cos x\ dx$

演習問題

1.　次の不定積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int x\log x\ dx$　(b) $\displaystyle\int x^2e^{-x}\ dx$　(c) $\displaystyle\int (\log x)^2\ dx$

(d) $\displaystyle\int x(x+5)^{14}\ dx$　(e) $\displaystyle\int x^2\cos x\ dx$　(f) $\displaystyle\int e^x\sin x\ dx$

(g) $\displaystyle\int \log(1+x^2)\ dx$　(h) $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\ dx$　(i) $\displaystyle\int x^n\log x\ dx$　(n は整数)

(j) $\displaystyle\int x^3\sin x\ dx$　(k) $\displaystyle\int x\sinh x\ dx$

3.4　有理関数の積分法 (integration of rational functions)

ここでは, 有理関数の不定積分は必ず求めることができることを示しましょう．そこで，$f(x)$, $g(x)$ が整式のとき，その商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の不定積分について考えます．

$f(x)$ の次数 $>$ $g(x)$ の次数 の場合は， $f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $q(x)$，余りを $r(x)$ とすると，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \ (r(x) \text{ の次数} < g(x) \text{ の次数})$$

となります．$q(x)$ は整式なので，その積分は容易に求められます．そこで $f(x)$ の次数 $<$ $g(x)$ の次数の場合を考えます．

代数学の基本定理 (fundamental theorem of algebra) によると，すべての整式は 1 次式と 2 次式の積で表わすことができます．よって $g(x)$ は次のように因数分解されます．

$$g(x) = c(x-\alpha)^l(x-\beta)^m\cdots\{(x-a)^2+b^2\}^r\{(x-c)^2+d^2\}^s\cdots$$

次に $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ を部分分数分解します．**部分分数分解 (partial fraction)** とは $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ を分子の次数が分母の括弧内の次数より 1 次少ない分数で，その数が $g(x)$ の因数の数となるように分解することをいいます．ちょっと分かりにくいので例を用いて説明します．まず，$\dfrac{r_1(x)}{(x-\alpha)^l}$ を部分分数分解してみましょう．

分母の因数の数は l より，l 個の部分分数が必要となります．また，分母の括弧内の次数が 1 より分子は定数となることに注意すると，

$$\frac{r(x)}{(x-\alpha)^l} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l}$$

次に，$\dfrac{r_2(x)}{((x-a)^2+b^2)^r}$ を部分分数分解してみましょう．

分母の因数の数は r より，r 個の部分分数が必要となります．また，分母の括弧内の次数が 2 より分子は 1 次式となることに注意すると，

$$\frac{r(x)}{((x-a)^2+b^2)^r} = \frac{C_1x+D_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{C_2x+D_2}{((x-a)^2+b^2)^2} + \cdots + \frac{C_rx+D_r}{((x-a)^2+b^2)^r}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{g(x)} &= \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_m}{(x-\beta)^n} \\ &\quad + \frac{C_1x+D_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{C_2x+D_2}{((x-a)^2+b^2)^2} + \cdots + \frac{C_rx+D_r}{((x-a)^2+b^2)^r} + \cdots \qquad (3.2)\end{aligned}$$

と表わせます．次に，$A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, C_r.D_r, \ldots$ を求めます．これらの定数の求め方にはいろいろな方法が考案されています．2 つほど紹介しましょう．

1 つは $g(x)$ を両辺にかけて，分母を払います．すると両辺に多項式が生まれます．この多項式はすべての x で等しいので，対応する係数どうしは等しくなければなりません．そこで左辺の x^k の係数と右辺の x^k の係数を等しくおくことにより連立方程式が作れます．この連立方程式を解けば定数 $A_i, B_i, C_i, D_i, \ldots$ が求まり，部分分数分解が完成します．ただしこの方法は分母の次数が大きくなると連立方程式の数が増え，計算が煩雑になります．

例題 3.11

ここで説明した方法で次の有理関数を部分分数分解してみましょう．

$$\frac{x^4}{x^3-1}$$

解 まず，分子の次数が分母の次数より大きいので，分子を分母で割ります．

$$\frac{x^4}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1}$$

次に， x^3-1 はまだ因数分解が可能なので因数分解し，部分分数分解すると

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

となります．ここで分母を払い整理すると

$$x=A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)$$

となります．ここで左辺と右辺の係数が等しいことに注意すると

$$A+B=0, A-B+C=1, A-C=0$$

これを解くと $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$ となります． ■

もう 1 つの方法は微分を用います．この方法は **ヘービサイド展開 (Heaviside expansion)** とよばれています．

まず， 式 3.2 の両辺に $(x-\alpha)^l$ をかけると

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^l\frac{r(x)}{g(x)}&=A_1(x-\alpha)^{l-1}+A_2(x-\alpha)^{l-2}+\cdots+A_l\\&+(x-\alpha)^l[\frac{B_1}{(x-\beta)}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\cdots+\frac{B_m}{(x-\beta)^n}\\&+\frac{C_1x+D_1}{(x-a)^2+b^2}+\frac{C_2x+D_2}{((x-a)^2+b^2)^2}+\cdots+\frac{C_rx+D_r}{((x-a)^2+b^2)^r}+\cdots]\end{aligned}$$

となります．これより A_i は

$$A_i=\frac{1}{(l-i)!}\frac{d^{l-i}}{dx^{l-i}}((x-\alpha)^l\frac{r(x)}{g(x)})|_{x=\alpha}$$

で求まることがわかります．同様にして， B_i は

$$B_i=\frac{1}{(n-i)!}\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}((x-\beta)^l\frac{r(x)}{g(x)})|_{x=\beta}$$

で求まります．最後に C_i, D_i を求めるには $((x-a)^2+b^2)^r$ を 式 3.2 の両辺にかけます．すると

$$\begin{aligned}((x-a)^2+b^2)^r\frac{r(x)}{g(x)}&=((x-a)^2+b^2)^r[\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_l}{(x-\alpha)^l}\\&+\frac{B_1}{(x-\beta)}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\cdots+\frac{B_m}{(x-\beta)^n}]\\&+(C_1x+D_1)((x-a)^2+b^2)^{r-1}\\&+(C_2x+D_2)((x-a)^2+b^2)^{r-2}+\cdots+C_rx+D_r+\cdots\end{aligned}$$

となるので，順に $C_r, D_r, C_{r-1}, D_{r-1}, \ldots, C_1, D_1$ を求めることができます．

例題 3.12

ヘービサイド展開を用いて，次の有理関数を部分分数分解してみましょう．

$$\frac{x^4}{x^3-1}$$

解 まず，分子の次数が分母の次数より大きいので，分子を分母で割ります．

$$\frac{x^4}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1}$$

次に， x^3-1 はまだ因数分解が可能なので因数分解し，部分分数分解すると

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

となります．これより

$$A = (x-1)\frac{x}{x^3-1}\ |_{x=1} = \frac{x}{x^2+x+1}\ |_{x=1} = \frac{1}{3}$$

次に x^2+x+1 を両辺にかけ $x^2+x+1=0$ となるように x を選ぶと

$$Bx+C\ |_{x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} = \frac{x}{x-1}\ |_{x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i} = \frac{6-2\sqrt{3}i}{12}$$

これより

$$-\frac{B}{2} + C + B(\frac{\sqrt{3}i}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{6}$$

よって $B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{1}{3}$ となります． ■

例題 3.13

次の有理関数を部分分数分解してみましょう．

$$\frac{3x^2-1}{x^3(x^2+1)^2}$$

解 まず， x^3 より x^3 の 3 個の因数 x, x^2, x^3 と， $(x^2+1)^2$ より $(x^2+1)^2$ の 2 個の因数，$(x^2+1), (x^2+1)^2$ が分母をなす部分分数を用いて分解できます．つまり

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-1}{x^3(x^2+1)^2} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} \\ &\quad + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+1)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

となります．次に，定数 $A_1, A_2, A_3, B_1, C_1, B_2, C_2$ を求めます．まず，

$$A_3 = x^3\frac{3x^2-1}{x^3(x^2+1)^2}\ |_{x=0} = \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^2}\ |_{x=0} = -1$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{d}{dx}[x^3\frac{3x^2-1}{x^3(x^2+1)^2}]\mid_{x=0} = \frac{d}{dx}[\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^2}]\mid_{x=0} \\
&= \frac{d}{dx}(3x^2-1)(x^2+1)^{-2}\mid_{x=0} \\
&= 6x(x^2+1)^{-2} - 4x(3x^2-1)(x^2+1)^{-3}\mid_{x=0} = 0 \\
A_3 &= \frac{1}{2!}\frac{d}{dx}[6x(x^2+1)^{-2} - 4x(3x^2-1)(x^2+1)^{-3}]\mid_{x=0} \\
&= \frac{1}{2!}[6(x^2+1)^{-2} - 24x^2(x^2+1)^{-3} - 4(3x^2-1)(x^2+1)^{-3} \\
&- 24x^2(x^2+1)^{-3} - 4x(3x^2-1)(-6x(x^2+1)^{-4})]\mid_{x=0} \\
&= \frac{1}{2!}[6+4] = 5
\end{aligned}
$$

次に $(x^2+1)^2$ を両辺にかけると

$$
\frac{3x^2-1}{x^3} = (x^2+1)^2[\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3}] \tag{3.3}
$$

$$
+ (B_1x + C_1)(x^2+1) + B_2x + C_2 \tag{3.4}
$$

ここで $x^2+1=0$ となるように x を選ぶと，

$$
B_2x + C_2\mid_{x=i} = \frac{3x^2-1}{x^3}\mid_{x=i} = \frac{-4}{-i} = -4i
$$

よって $B_2i + C_2 = -4i$ となり，これより $B_2 = -4, C_2 = 0$ を得ます．最後に B_1, C_1 を求めます．式 3.4 を微分し， $x^2+1=0$ とおくと，

$$
(\frac{3x^2-1}{x^3})'\mid_{x=i} = B_1(x^2+1) + (B_1x + C_1)(2x) + B_2\mid_{x=i} \tag{3.5}
$$

$$
((3x^2-1)x^{-3})'\mid_{x=i} = (B_1i + C_1)(2i) - 4 \tag{3.6}
$$

$$
6x(x^{-3}) - 3x^{-4}(3x^2-1)\mid_{x=i} = -2B_1 - 4 + 2C_1i \tag{3.7}
$$

$$
6i(i) - 3(-4) = -2B_1 - 4 + 2C_1i \tag{3.8}
$$

$$
6 = -2B_1 - 4 + 2C_1i \tag{3.9}
$$

よって $C_1 = 0, B_1 = -5$ を得ます． ■

このように $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の部分分数分解はいくつかの次の形の分数の和として表わせます．

$$
\frac{A}{(x-\alpha)^n},\quad \frac{Bx+C}{\{(x-a)^2+b^2\}^n}
$$

左の関数の不定積分は簡単ですので，右のほうを考えましょう．

$x-a=t$ とおくと，次の形の関数に帰着します．

$$
\frac{1}{(x^2+b^2)^n},\quad \frac{x}{(x^2+b^2)^n}
$$

まとめると，有理関数の不定積分は次の 3 つの関数の不定積分ができれば必ず求められることがわかりました．

定理 3.6

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + c & (n = 2, 3, 4, \ldots) \\ \log|x-a| + c & (n = 1) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n} dx = \begin{cases} \frac{-1}{2(n-1)(x^2+b^2)^{n-1}} + c & (n = 2, 3, 4, \ldots) \\ \frac{1}{2}\log|x^2+b^2| + c & (n = 1) \end{cases}$

(3) $\displaystyle I_n = \int \frac{dx}{(x^2+A)^n}$ とおくと，次の漸化式が成り立つ．

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nA}\{\frac{x}{(x^2+A)^n} + (2n-1)I_n\} \ (n \geq 1)$$

証明 (1) $t = x - a$ とおく t，$dt = dx$ より

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{dt}{t^n} = \int t^{-n} dt$$
$$= \begin{cases} \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c & (n \neq 1) \\ \log|t| + c & (n = 1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c & (n \neq 1) \\ \log|x-a| + c & (n = 1) \end{cases}$$

(2) $t = x^2 + b^2$ とおく t，$dt = 2xdx$ より

$$\int \frac{xdx}{(x^2+b^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2}\int t^{-n} dt$$
$$= \begin{cases} \frac{t^{-n+1}}{2(-n+1)} + c & (n \neq 1) \\ \frac{1}{2}\log|t| + c & (n = 1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x^2+b^2)^{-n+1}}{2(-n+1)} + c & (n \neq 1) \\ \frac{1}{2}\log|x^2+b^2| + c & (n = 1) \end{cases}$$

(3) の証明．

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{dx}{(x^2+A)^n} &= \frac{x}{(x^2+A)^n} + 2n\int \frac{x^2 dx}{(x^2+A)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+A)^n} + 2n\int \frac{x^2+A-A}{(x^2+A)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+A)^n} + 2nI_n - 2nAI_{n+1} \ \blacksquare \end{aligned}$$

例題 3.14

$\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-1} dx$ を求めてみましょう．

解 例題 3.4 より

$$\frac{x^4}{x^3-1} = x + \frac{1/3}{x-1} + \frac{-x/3+1/3}{x^2+x+1}$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^3-1}dx &= \int (x+\frac{1/3}{x-1}+\frac{-x/3+1/3}{x^2+x+1})dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{3}[\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx] \\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{3}[\int \frac{x-1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx]\end{aligned}$$

ここで $x+\dfrac{1}{2}=t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx &= \int \frac{t-3/2}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt \\ &= \int \frac{t}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt-\frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\log|t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2|-\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)+c \\ &= \frac{1}{2}\log|x^2+x+1|-\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c \ \blacksquare\end{aligned}$$

確認問題

1.　次の関数を部分分数分解しよう．

(a)　$f(x)=\dfrac{7}{(x-2)(x+5)}$　(b)　$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$　(c)　$f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-3x+2}$

(d)　$f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$　(e)　$f(x)=\dfrac{x^5}{(x-2)^2}$　(f)　$f(x)=\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$

演習問題

1.　次の積分を求めよう．

(a)　$\displaystyle\int \frac{7}{(x-2)(x+5)}\,dx$　(b)　$\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx$　(c)　$\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-3x+2}\,dx$

(d)　$\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$　(e)　$\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+16)^2}$　(f)　$\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-2)^2}\,dx$

(g)　$\displaystyle\int \frac{x^5}{x^9-1}\,dx\ \ (x^3=t)$　(h)　$\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^4+1)}\ \ (x^4=t)$

3.5　三角関数の積分法 (integration of trigonometric functions)

前節ですべての有理関数は積分できることを学びました．そこで，三角関数の積分も三角関数を有理関数に直すことができればよいわけです．実は三角関数を有理関数に必ず直す方法があります．その最も一般的な方法として，$t=\tan\frac{x}{2}$ とおく置換があります．$t=\tan\frac{x}{2}$ より，$x=2\tan^{-1}t$．次に，

$$\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$$

より，

$$1+\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

ここで， $t=\tan\frac{x}{2}$ に注意すると

$$1+t^2=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\text{となり}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}$$

また，

$$\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos^2\frac{x}{2}=\frac{t^2}{1+t^2}$$

これより，

[1] $t=\tan\frac{x}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned}dx&=d(2\tan^{-1}t)=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x&=\sin 2\cdot\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x&=\cos 2\cdot\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

となり，すべての三角関数の積分は必ず有理関数の積分に直せます．しかし，この置換はあくまで最後に用いるもので，もっと簡単に有理関数に変えれる場合はそちらを用います．次のような場合があります．

$R(u)$ が u の有理関数のとき

[2] $\sin x=t$ とおくと，$\cos x dx=dt$ より，

$$\int R(\sin x)\cos x dx=\int R(t)dt$$

[3] $\cos x=t$ とおくと，$-\sin x dx=dt$ より，

$$\int R(\cos x)\sin x dx=-\int R(t)dt$$

$\int R(\tan x)dx, \int R(\sin^2 x)dx, \int R(\cos^2 x)dx$ は $\tan x=t$ とおくと，

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \text{ より } 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

よって

[4] $t=\tan x$ より，

$$\begin{aligned}\cos^2 x&=\frac{1}{1+t^2}\\ \sin^2 x&=1-\cos^2 x=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}\\ dx&=d(\tan^{-1}x)=\frac{dt}{1+t^2}\end{aligned}$$

となり， t の有理関数に変換できます．

例題 3.15

$\displaystyle\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ を求めてみましょう．

解 この積分は $\sin^3 x \cos^3 x$ を

$$\sin^3 x \cos^2 x \cos x = \sin^3 x(1 - \sin^2 x) \cos x$$

と書き換えると， $\sin x$ の有理関数と $\cos x$ の積となります．そこで， $\sin x = t$ とおくことにより $dt = \cos x dx$ となり， t の有理関数に帰着することができます．よって

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^3 x dx &= \int \sin^3 x(1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int t^3(1 - t^2)dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + c \\ &= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + c \ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 3.16

$\displaystyle\int \tan^2 x dx$ を求めてみましょう．

解 $\tan x$ の有理関数は $\tan x = t$ とおくと， $x = \tan^{-1} t$ より

$$dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$$

よって $\tan^2 x$ は t の有理関数．また， dx も t の有理関数と dt の積で表わせることがわかります．これより

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt \\ &= \int \frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} dt \\ &= \int [1 - \frac{1}{1 + t^2}]dt = t - \tan^{-1} t + c \\ &= \tan x - x + c\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + c \ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 3.17

$\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos x}$ を求めてみましょう．

解 [2],[3],[4] のどちらの形もしていないので，最後の手段 $x = 2\tan^{-1} t$ を用います．

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

より

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{1+t^2+1-t^2}dt$$
$$= \int dt = t + c = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + c \ \blacksquare$$

確認問題

1. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\ dx$　(b) $\displaystyle\int \sin^2 3x \cos 3x\ dx$　(c) $\displaystyle\int \cos^2 x\ dx$

(d) $\displaystyle\int \cos^3 x\ dx$　(e) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^3 x\ dx$　(f) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x\ dx$

(g) $\displaystyle\int \sin 2x \sin x\ dx$　(h) $\displaystyle\int \cos x \cos 2x\ dx$　(i) $\displaystyle\int \tan x \sec^2 x\ dx$

(j) $\displaystyle\int \sec^3 x\ dx$

演習問題

1. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int \sin^3 x\ dx$　(b) $\displaystyle\int \sin^2 3x\ dx$　(c) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x\ dx$

(d) $\displaystyle\int \cos 3x \sin 2x\ dx$　(e) $\displaystyle\int \sin^5 x\ dx$　(f) $\displaystyle\int \sec^2 \pi x\ dx$　(g) $\displaystyle\int \tan^3 x\ dx$

(h) $\displaystyle\int \tan^2 x \sec^2 x\ dx$　(i) $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^3 x\ dx$　(j) $\displaystyle\int \sec^5 x\ dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2\cos x}$　(l) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2-\sin x}\ dx$　(m) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\ dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}\ dx$　(o) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\tan x}$

3.6 無理関数の積分法 (integration of irrational functions)

無理関数の積分は残念ながらいつでも求められるとは限りません．ここでは適当な変換により，有理関数に帰着できるものを扱います．$R(x,y)$ を x, y の有理関数とすると，

(1) $\displaystyle\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$，$(a,b,c,d:$ 定数$, ad-bc \neq 0)$ は $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ より，有理関数になります．

例題 3.18

$\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$ を求めてみましょう．

解 無理関数の積分は，無理関数を有理関数に変えれればよいので $\sqrt{x}=t$ とおいてみましょう．すると $x=t^2$ より $dx=2tdt$ となります．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}} &= \int \frac{2t}{1-t}dt = \int (-2+\frac{2}{1-t})dt \\ &= -2t-2\log|1-t|+c = -2\sqrt{x}-2\log|1-\sqrt{x}|+c \ \blacksquare\end{aligned}$$

(2) $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx,\ (a\neq 0)$ は ax^2+bx+c が $ax^2+bx+c=a(x+\alpha)^2+\beta^2$ または $ax^2+bx+c=a(x+\alpha)^2-\beta^2$ のいずれかで表わされます．そこで，$a(x+\alpha)^2+\beta^2$ のときは斜辺が $\sqrt{a(x+\alpha)^2+\beta^2}$ となるような直角三角形を考えます．

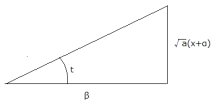


図 3.1　$\sqrt{a(x+\alpha)^2+\beta^2}$

すると $\sqrt{a}(x+\alpha)=\beta\tan t$ より

$$x=\frac{\beta}{\sqrt{a}}\tan t-\alpha,\ \sqrt{a(x+\alpha)^2+\beta^2}=\beta\sec t,\ dx=\frac{\beta}{\sqrt{a}}\sec^2 tdt$$

となり三角関数の有理式の積分に変換できます．

$ax^2+bx+c=a(x+\alpha)^2-\beta^2$ の場合は $\sqrt{a(x+\alpha)^2-\beta^2}$ が対辺となるような直角三角形を考えます．

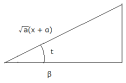


図 3.2　$\sqrt{a(x+\alpha)^2-\beta^2}$

すると $\sqrt{a}(x+\alpha)=\beta\sec t$ より

$$x=\frac{\beta}{\sqrt{a}}\sec t-\alpha,\ \sqrt{a(x+\alpha)^2-\beta^2}=\beta\tan t,\ dx=\frac{\beta}{\sqrt{a}}\sec t\tan tdt$$

となり三角関数の有理式の積分に変換できます．

(3) ax^2+bx+c が実数解 α,β を持つときは，$t=\sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$ とおくと，x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理関数の積分は t の有理関数の積分に変換できます．

例題 3.19

$\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$ を求めてみましょう．

解 分母が 2 乗の差の平方根なので，これが対辺にくるような直角三角形を考えます．すると $x=2\sec t$ と表わせるので， $dx=2\sec t\tan tdt$．また， $\sqrt{x^2-4}=2\tan t$ と表わせます．よって

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx&=\int\frac{2\sec t}{2\tan t}2\sec t\tan tdt\\&=2\int\sec^2 tdt=2\tan t+c\\&=\sqrt{x^2-4}+c\ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 3.20

$\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ を求めてみましょう．

解 $x^2-4=(x+2)(x-2)$ より，$t=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ とおくと，$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{(x+2)(x-2)}=t(x+2)$ となります．両辺を 2 乗して x について解くと，$x=\frac{-2(t^2+1)}{t^2-1}$, $\sqrt{x^2-4}=t(\frac{-2(t^2+1)}{t^2-1}+2)=\frac{-4t}{t^2-1}$, $dx=\frac{8t}{(t^2-1)^2}$.

よって，

$$\begin{aligned}I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}&=\int\frac{-(t^2-1)}{2(t^2+1)}\cdot\frac{t^2-1}{-4t}\cdot\frac{8t}{(t^2-1)^2}dt\\&=\int\frac{1}{t^2+1}dt=\tan^{-1}(t)+c=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\right)+c\ \blacksquare\end{aligned}$$

確認問題

1. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$　(b) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$　(c) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$　(d) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$　(f) $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$　(g) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

(h) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

演習問題

1. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,dx$　(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$　(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$　(d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

2.　次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$　(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$　(c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{9-e^{2x}}\,dx$　(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$　(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{4+e^{2x}}}$　(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

(h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$　(i) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-3}}\,dx$　(j) $\displaystyle\int \sqrt{6x-x^2-8}\,dx$

(k) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+6x}\,dx$

3.7　定積分 (definite integral)

ここではドイツの数学者 G.F.B. Riemann (1826-1917) によって示された Riemann 積分について学んでいきます．

$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で定義されているとします．この区間 $[a,b]$ を次のような点 $x_i(i=1,2,\ldots,n)$ で n 個の小区間に分割します．

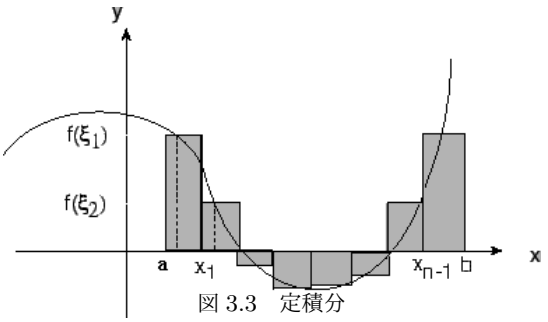


図 3.3　定積分

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$$

この分割を Δ で表わし， $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ のうちで最も大きい値を $|\Delta|$ で表わします．いま，それぞれの小区間 $[x_{i-1},x_i]$ のなかに任意の点 ξ_i をとり，**Riemann 和 (Riemann sum)** とよばれる次の和を考えます．

$$S(\Delta) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

このとき，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S$$

となる実数 S が存在するならば，この S を $f(x)$ の **定積分 (definite integral)** といい，$f(x)$ は $[a,b]$ で**積分可能 (integrable)** であるといいます．また，この S を次のように表わします．

$$S = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

つまり関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で積分可能であるということは，分割の仕方および点 $\xi_i(i = 1,2,\ldots,n)$ のとり方に関係なく一通りに定まるということです．これより，**区分求積法**とよばれ，次のようにして積分を求める方法があります．$h = \frac{b-a}{n}$ とすると，

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+(i-1)h) & (\xi = x_{i-1}) \\ \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+ih) & (\xi = x_i) \end{cases}$$

では，どんな関数が $[a,b]$ で積分可能になるのでしょうか．次の定理はそんな疑問に答えてくれます．

定理 3.7

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続ならば，$[a,b]$ で積分可能である．

今後，特に断らない限りこの章にでてくる $f(x)$，$g(x)$ などの関数は，考えている区間で連続であるとします．

定積分の定義より，ただちに次の公式が得られます．

定理 3.8

$f(x), g(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であるとすると，

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ (c : 定数)

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(4) $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

(5) $[a,b]$ で $f(x) \geq g(x)$ ならば，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

証明 (1)　$a < b$ の場合．$[a,b]$ の任意の分割を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

とし，ξ_i を $[x_{i-1}, x_i]$ 内の任意の点として Riemann 和を考えると，

$$\sum_{i=1}^{n}\{f(\xi_i) + g(\xi_i)\}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

ここで，$|\Delta| \to 0$ とすると，定理 3.7 より，

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(3)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \lim_{|\Delta|\to 0} -\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = -\int_b^a f(x)dx$$

(2)，(4)，(5) の証明は各自に任せます． ■

微分積分学の基本定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続であるとき， $[a,b]$ 内の任意の点 x に対して定積分 $\int_a^x f(t)dt$ を考えると，これは $[a,b]$ を定義域にもつ関数になります．この関数について，次の定理が成り立ちます．

定理 3.9

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続であれば， $\int_a^x f(t)dt$ は x について微分可能であって，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)\ (a \le x \le b)$$

となる．

証明 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とおくと， $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ は $F(x)$ の導関数を求めることになるので， $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ を考えます．まず， $h > 0$ のとき，

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$
$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

ここで M_h を $[x, x+h]$ における $f(x)$ の最大値， m_h を $[x, x+h]$ における $f(x)$ の最小値とすると (なぜ最大値，最小値が存在するとわかる?)， $[x, x+h]$ で

$$m_h \le f(x) \le M_h$$

したがって，定理 3.7 より

$$m_h[(x+h)-x] \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le M_h[(x+h)-x]$$

となる．そこで，両辺を h でわると，仮定より， $f(x)$ は $[x, x+h]$ で連続なので，

$$\lim_{h\to 0+} m_h = f(x) = \lim_{h\to 0+} M_h$$

よって，はさみうちの定理より

$$\lim_{h\to 0+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

同様に $h < 0$ のとき

$$\lim_{h \to 0-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

となり， $F(x)$ は微分可能であり， $F'(x) = f(x)$ となる． ■

この定理より， $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ は $f(x)$ の原始関数となります．よって，連続な関数は必ず原始関数をもっていることがわかり，その原始関数は定積分で与えられます．

例題 3.21

$f(t)$ が連続のとき

$$\frac{d}{dx} \int_a^{x^2} f(t)dt$$

を求めてみましょう．

解 まず， $u = x^2$ とおくと $du = 2xdx$．よって

$$\frac{d}{dx} \int_a^{x^2} f(t)dt = \frac{d(\int_a^u f(t)dt)}{du} \frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx} = f(x^2)(2x) \blacksquare$$

定理 3.10

[微分積分学の基本定理] 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ の 1 つの原始関数を $G(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

である．

証明 定理 3.7 より， $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ も $f(x)$ の原始関数です．よって，定理 3.1 より $F(x) = G(x) + c$ (c : 定数)．ここで $F(a) = 0$ だから， $F(a) = G(a) + c = 0$．よって，$c = -G(a)$．このとき $F(x) = G(x) - G(a)$ となるから， $x = b$ とすると，

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \blacksquare$$

ここで， $G(b) - G(a)$ は $G(x)|_a^b$ または $[G(x)]_a^b$ と略記されます．

この定理より，定積分の計算は被積分関数の不定積分を求め，積分範囲の端点を代入しその差を求めればよいことがわかります．

例題 3.22

次の定積分の値を求めてみましょう．

$$\int_0^1 (2x - 3)dx$$

解

$$\int_0^1 (2x - 3)dx = \left[x^2 - 3x\right]_0^1 = 1 - 3 = -2 \blacksquare$$

確認問題

1. 区分求積法を用いて，$\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ を求めよう．

2. 次の定積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3)\ dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{x}\ dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^3}\ dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\pi \cos x\ dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 6,\ \int_0^2 f(x)dx = 4,\ \int_2^5 f(x)dx = 1$ のとき，次の問いに答えよう．

(a) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ dx$ (c) $\displaystyle\int_1^5 f(x)\ dx$ (d) $\displaystyle\int_0^0 f(x)\ dx$

(e) $\displaystyle\int_2^0 f(x)\ dx$

4. 関数 $f(t)$ が連続であるとき， $g(x)$ を求めよう．

(a) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \sin t dt$ (b) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^1 \cos t dt$ (c) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{\sin t} dt$

5. 次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{3}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

演習問題

1. 関数 $f(t)$ が連続であるとき， $g(x)$ を求めよう．

(a) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ (b) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$

(c) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{2x} x^2 f(t)dt$

2. 次の定積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\int_1^5 2\sqrt{x-1}dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2-t}{t^3}dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{e^x+1}dx$

3. 定理 3.7(2)，(3)，(4)，(5) を証明しよう．

4. 次の不等式を証明しよう．

(a) $\dfrac{\pi}{4} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx < 1\ \ (n>2)$ (b) $\dfrac{1}{2n+2} \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \frac{1}{n}\ \ (n\ge 1)$

5. 次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2+i^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \tan(t^2)dt$

3.8　定積分の計算 (calculation of integrals)

不定積分の置換積分と部分積分についてすでに学んだので，ここでは定積分の置換積分と部分積分についての話から始めます．

定理 3.11

[置換積分法] $x = \phi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ のとき次の式が成り立つ．

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f\{\phi(t)\}\phi'(t)dt$$

証明 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると， $F(\phi(t))$ は $f(\phi(t))\phi'(t)$ の原始関数である．したがって，微分積分学の基本定理より，

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx \ \blacksquare$$

定理 3.12

[部分積分法] $u = f(x), v = g(x)$ について次の式が成り立つ．

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

証明 $\int_a^b udv + \int_a^b vdu = [uv]_a^b$ $\blacksquare$

例題 3.23

次の定積分の値を求めてみましょう．

$$\int_0^1 3x^2(x^3+1)^4dx$$

解 $t = x^3 + 1$ とおくと， $dt = 3x^2dx$ となるので，被積分関数は t^4 で表わすことができます．また積分範囲は $x : 0 \longrightarrow 1$ のとき， $t = x^3 + 1$ なので $t : 1 \longrightarrow 2$ となります．よって

$$\int_0^1 3x^2(x^3+1)^4dx = \int_1^2 t^4dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_1^2 = \frac{32-1}{5} = \frac{31}{5} \ \blacksquare$$

定積分でよく使われる積分に次のものがあります．

定理 3.13

(1) $f(x)$ が偶関数ならば， $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(2) $f(x)$ が奇関数ならば， $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

(4) $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ 偶数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ 奇数}) \end{cases}$ **Wallis の公式**

ただし， $n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 4 \cdot 2 & (n \text{ 偶数}) \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 3 \cdot 1 & (n \text{ 奇数}) \end{cases}$

ここで， $f(x)$ が **偶関数 (even function)** とは $x \in D(f)$ において， $f(-x) = f(x)$ が成り立つことです．これを $f(x)$ のグラフで考えると y 軸対称となります．また， $f(x)$ が **奇関数 (odd function)** とは $x \in D(f)$ において， $f(-x) = -f(x)$ が成り立つことです．これを $f(x)$ のグラフで考えると原点対称となります．

証明

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$．と表わせるので， $f(x) = f(-x)$ より

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

ここで， $t = -x$ とおくと $dt = -dx$．また， $x : -a \to 0$ より $t = -x : a \to 0$．よって $\int_{-a}^{0} f(-x)dx = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$．これより，

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

(2)，(3) の証明は各自に任せます．

(4) 演習問題 3.8-2 より $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ なので $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ について証明しよう．

$n \geq 2$ のときは，

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = -\left[\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

よって漸化式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を得ます．ところで，

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

より，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{I_n}{I_{n-2}}\frac{I_{n-2}}{I_{n-4}}\cdots\frac{I_2}{I_0}I_0 \\
&= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2},\ n \text{ 偶数} \\
I_n &= \frac{I_n}{I_{n-2}}\frac{I_{n-2}}{I_{n-4}}\cdots\frac{I_3}{I_1}I_1 \\
&= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} = \frac{(n-1)!!}{n!!},\ n \text{ 奇数} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

確認問題

1. 次の定積分の値を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sin x\ dx$　(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sin^3 x\ dx$　(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx$　(d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos 2x dx$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}dx$

演習問題

1. 次の定積分の値を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin x dx$　(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$　(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\cos x dx$　(e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos nx dx$ (n 整数)　(f) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{1}xe^x\ dx$

2. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ を示そう．

3. 関数 $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x}f(t)dt$ について以下のことについて答えよう．ただし，$f(x)$ は区間 $(-\infty,\infty)$ で微分可能な関数とする．

(a) $F(x)$ は奇関数であることを示そう．

(b) $f(x)$ が偶関数ならば $f'(x)$ は奇関数であることを示そう．

(c) $f(x) = \int_{-x}^{x}f(t)dt$ ならば $f(x) = 0$ となることを示そう．

(d) $f(x)$ は偶関数と奇関数の和で表せることを示そう．

3.9　定積分の定義の拡張 (extension of definite integrals)

いままで考えてきた定積分は，閉区間において連続な関数に対して定義されたものでした．これを区間内に有限個の不連続点をもつ場合**広義積分 (improper integral)**，および無限区間の場合**無限積分 (infinite integral)** に拡張します．

まず $f(x)$ が $[a,b]$ で連続である場合には，関数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ は $[a,b]$ で連続になるので

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

が成り立ちます．

次に， $f(x)$ が $[a,b)$ で連続であるが $x=b$ で不連続である場合を考えます．

もし

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}[F(x)]_a^{b-\varepsilon}=[F(x)]_a^{b-0}=F(b-0)-F(a)$$

が有限になるときは

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

で積分を定義し，これを **広義の定積分 (improper integral)** といいます．

$f(x)$ が $(a,b]$ で連続である場合も同様に，広義の定積分は

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

で定義されます．

例題 3.24

この定義を用いて次の広義積分を求めてみましょう．

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ (2) $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$

解

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ とおくと，$f(x)$ は $[0,1)$ で連続となり，また $f(x)$ の不定積分は $-2\sqrt{1-x}$ なので，

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-}=-\lim_{x\to 1-0}2\sqrt{1-x}+2=2$$

と表わせます．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと， $f(x)$ は $(0,1]$ で連続となり，また $f(x)$ の不定積分は $\log|x|$ なので，

$$\lim_{\varepsilon\to 0-}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx=[\log|x|]_{0+}^{1}=0-\lim_{x\to 0+}\log|x|=\infty$$

となります． ■

また $f(x)$ が (a,b) で連続である場合も同様に，広義の定積分は

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

で定義されます．

閉区間 $[a,b]$ 上に $f(x)$ の不連続点 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ がある場合を考えます．このとき，これらの点で $[a,b]$ を $[a,c_1],[c_1,c_2],\ldots,[c_n,b]$ の部分区間に分け，各部分区間で $f(x)$ の広義の定積分を考えます．そして，これらの広義の定積分がすべて存在するとき，それらの和を $[a,b]$ における定積分と定めます．つまり，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)dx$$

例題 3.25

この定義を用いて次の定積分を求めてみましょう．

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

解 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ とおくと，$f(x)$ は $(-1,1)$ で連続となり，また $f(x)$ の不定積分は $\sin^{-1} x$ なので，

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left[\sin^{-1} x\right]_{-1+}^{1-} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

と表わせます．■

ここで広義積分の収束，発散について調べるとき便利な比較判定法について考えてみましょう．

定理 3.14

関数 $f(x), g(x)$ は $(a,b]$ で連続で，$f(x) \le g(x)$ であるとする．このとき $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も存在する．

この定理で $g(x) = (x-a)^{-\lambda}, 0 < \lambda < 1$ ととると，

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \left[\frac{1}{1-\lambda}(x-a)^{1-\lambda}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} < \infty.$$

よって $(x-a)^\lambda f(x)$ が有界となるような $\lambda < 1$ が存在すれば，$\int_a^b f(x)dx < \infty$ がいえます．

[I]　$\lambda > 1, (x-a)^\lambda f(x) < M \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx < \int_a^b \frac{M}{(x-a)^\lambda}dx < \infty$

例題 3.26

$\displaystyle\int_0^1 x^{\lambda-1}e^{-x}dx,\ 0 < \lambda < 1$ は収束するか調べてみましょう．

解 $f(x) = x^{\lambda-1}e^{-x}$ とおくと，$0 < \lambda < 1$ のとき $f(x)$ は $x = 0$ で不連続ですが，$0 < x \le 1$ では

$$0 < x^{1-\lambda} f(x) = e^{-x} < 1$$

よって $\int_0^1 f(x)dx < \infty$．■

$f(x)$ が $[a,\infty)$ で連続であるとき，有限な極限 $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ が存在するならば，この極限値を $f(x)$ の無限区間における定積分といい，

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^{\infty-}$$

で表わします．このように積分区間が無限区間であるものを **無限積分 (infinite integral)** といいます．

同様に， $f(x)$ が $(-\infty,b]$ で連続であるとき，有限な極限 $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ が存在するならば，この極限値を $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ で表わします．

例題 3.27

この定義を用いて次の広義積分を求めてみましょう．

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p},\ p>0$$

解 $p\neq 1$ のとき，

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ \infty, & p<1 \end{array}\right]$$

$p=1$ のとき，

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x} = \lim_{b\to\infty}\log|x|-1=\infty \quad \blacksquare$$

また $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で連続であるとき，有限な極限 $\lim_{a\to-\infty,b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ が存在するならば，この極限値を $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ で表わします．

例題 3.28

この定義を用いて次の無限積分を求めてみましょう．

$$I=\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to-\infty,b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1}x\right]_{-\infty+}^{\infty-} \\ &= \lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x - \lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi \ \blacksquare \end{aligned}$$

ここで無限積分の収束，発散について調べるとき便利な比較判定法を述べておきます．

定理 3.15

関数 $f(x), g(x)$ は $[a, \infty)$ で連続で，$f(x) \leq g(x)$ であるとする．このとき無限積分 $\int_a^\infty g(x)dx$ が存在すれば，無限積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ も存在する．
　この定理で $g(x) = x^{-\lambda}, \lambda > 1$ ととると，

$$\int_a^\infty x^{-\lambda}dx = \left[\frac{1}{1-\lambda}x^{1-\lambda}\right]_a^\infty = -\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} < \infty.$$

よって $\lim_{x\to\infty} x^\lambda f(x)$ が有界となるような $\lambda > 1$ が存在すれば，$\int_a^\infty f(x)dx < \infty$ がいえます．

例題 3.29

比較判定法を用いて次の広義積分を求めてみましょう．

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

解

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{1+x^3}} = 1$$

また，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx < \infty$ より，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ は収束．

[II]　$\lambda > 1, x^\lambda f(x) < M \Rightarrow \displaystyle\int_a^\infty f(x)dx < \int_a^\infty \frac{M}{x^\lambda}dx < \infty$

例題 3.30

$\Gamma(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx,\ (\lambda > 0)$ は収束することを示してみましょう．

解 $0 < x < 1, 0 < \lambda < 1$ のときはすでに例題 3.9 で示しました．そこで，$\lambda \geq 1$ を考えます．このとき，$f(x) = x^{\lambda-1}e^{-x}$ は閉区間 $[0, 1]$ で連続ですから，$\int_0^1 f(x)dx < \infty$ となります．次に $0 < \lambda < 1,\ 1 \leq x$ について考えてみます．

$$x^2 f(x) = x^{\lambda+1}e^{-x} = \frac{x^{\lambda+1}}{e^x} < M$$

よって $\int_1^\infty f(x)dx < \infty$．したがって

$$\int_0^\infty f(x)dx < \infty$$

となり，$\Gamma(\lambda)$ は $\lambda > 0$ で収束することが示せました．■

　ここにでてきた関数 $\Gamma(\lambda)$ を **Gamma 関数 (gamma function)** といい次の性質が知られています．

定理 3.16

$\Gamma(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx$ について，次のことが成り立つ．

(1) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ $(n > 0)$

(2) n が自然数のとき， $\Gamma(n) = (n-1)!$

(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

証明 (1)

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty x^n e^{-x}dx \quad \left(\begin{array}{ll} u = x^n & dv = e^{-x}dx \\ du = nx^{n-1}dx & v = -e^{-x}\end{array}\right) \\ &= \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{\infty-} + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \\ &= \lim_{x\to\infty-}\frac{-x^n}{e^x} + n\Gamma(n) \text{ (1.6 参照)} \\ &= n\Gamma(n)\end{aligned}$$

(2) (1) より漸化式 $\Gamma(n+1) = \Gamma(n)$ が $n > 0$ で成り立ちます．よって

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 2\Gamma(1)$$

ここで $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$ より

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

となります．

(3) の証明には 2 重積分が必要となるので，証明はあとにまわします．(演習問題 7.4.1-2 参照)

$\int_a^b |f(x)|dx$ が収束するならば，関数 $f(x)$ の a から b までの積分は **絶対収束 (absolute convergent)** であるといいます．また，$\int_a^b f(x)dx$ は収束するが， $\int_a^b |f(x)|dx$ が発散するとき，関数 $f(x)$ の a から b までの積分は **条件収束 (conditional convergent)** であるといいます．

確認問題

1. 次の広義積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \cos\pi x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

演習問題

1. 次の広義積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$

2. 次の無限積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$ (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha}dx$ (c) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha \log x}dx$

3. 次の積分の収束，発散について調べよう．

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}$

4. enshu:3-9-4 $K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx$ を第 1 種完全楕円積分とします．また，$agm(a_0, b_0), a_0 \geq b_0 > 0$ を算術幾何平均とすると，次のことが知られている．

$$\frac{\pi}{2} = agm(1, \sqrt{1-k^2}) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$k^2 = 0, 0.75$ のとき成り立つことを確かめよ．

3.10 定積分の応用 (applications of definite integral)

ここでは，定積分の応用として，面積，体積，曲線の長さなどについて考えてみましょう．まずは面積から

閉区間 $[a, b]$ で常に $g(x) \leq f(x)$ のとき，2 曲線 $y = f(x), y = g(x)$ および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積を A とし定積分で表わしてみましょう．まず 区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

をとり，各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内に任意の点 ξ_i をとります．ここで底辺 $x_i - x_{i-1}$，高さ $f(\xi_i) - g(\xi_i)$ の長方形を考え，その Riemann 和を作ると

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{[f(\xi_i) - g(\xi_i)]}_{\text{高さ}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{底辺}}$$

ここで分割 Δ を細かくすると，この Riemann 和は

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

に収束するので面積を表わします．

実際に面積を求めるときには，横に長い長方形を考えることもあります．例えば次のような場合です．

例題 3.31

次の曲線で囲まれた図形の面積を求めてみましょう．

$$x = y^2, y = x - 2$$

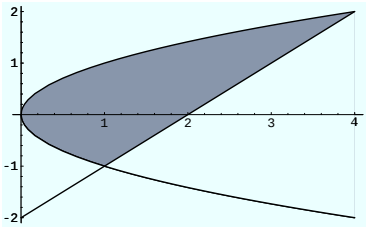


図 3.4　グラフで囲まれた面積

解 この図で縦方向の長方形を考えると $x = y^2, y = x - 2$ の交点を通る直線 $x = 1$ より左側では，長方形の高さが $\sqrt{x} - (-\sqrt{x})$ となり，右側では $\sqrt{x} - (x - 2)$ となります．よって，求める面積 A は

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2\sqrt{x}dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x-2)]dx = \left[\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{3}{2}[4^{3/2} - 1] - \frac{1}{2}[4^2 - 1] + 2[4 - 1] \\ &= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} - \frac{15}{2} + 6 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

次に，横方向の長方形を考えると，長方形の高さは求める図形内のすべての範囲で $y + 2 - y^2$，幅は Δy となり，計算が簡単になります．実際 $x = y^2, y = x - 2$ の交点を求めると，$y^2 = y + 2$ より $y^2 - y - 2 = (y + 1)(y - 2) = 0$．よって $y = -1, 2$ となります．これより求める面積 A は

$$A = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2)dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} \ \blacksquare$$

次に体積を考えてみましょう．x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口の面積が $A(x)$ となるような空間図形を考えます．この空間図形の $a \leq x \leq b$ の部分の体積を定積分で表わしてみましょう．まず $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

をとり，各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から任意の点 ξ_i をとります．この図形の $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ の部分を底面積 $A(\xi_i)$，高さ $x_i - x_{i-1}$ で置き換えて，その体積の和を作ると，

$$\sum_{i=1}^n A(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

ここで分割 Δ を細かくすると，この和は

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

に収束します．

回転体の体積を求めるには，断面が円盤の形となるように，回転軸に垂直な面で切り取る場合と，回転軸にそって半径の異なる筒をはめ込んでいく場合と 2 通りあります．式で表わすと次のようになります．

閉区間 $[a,b]$ で常に $f(x) \geq 0$ であるとき，平面図形 $0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V = \int_a^b \underbrace{\pi y^2}\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

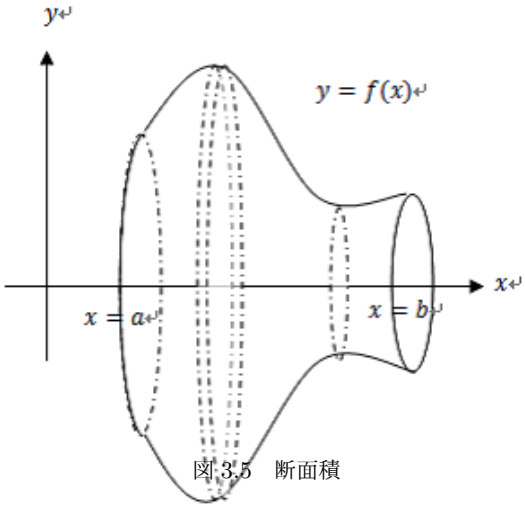


図 3.5　断面積

また，閉区間 $[a,b]$ で常に $f(x) \geq 0$ であるとき，平面図形 $0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$ を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，筒の表面積は $2\pi xy$ より

$$V = \int^b 2\pi x u dx = \int^b 2\pi x f(x) dx$$

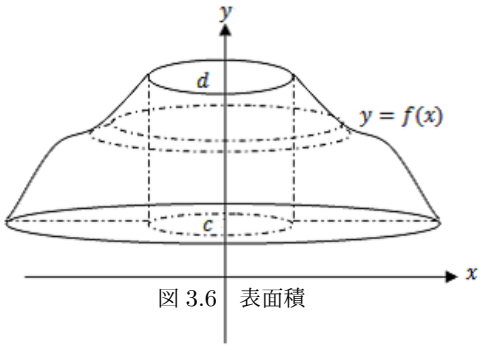


図 3.6　表面積

そこで，この 2 つの方法の違いをみるために，次のような問題を考えてみましょう．

例題 3.32

$y = x^2,\ y = 0,\ x = 1$ で囲まれる図形を y 軸の回りに回転したときにできる回転体の体積を求めてみましょう．

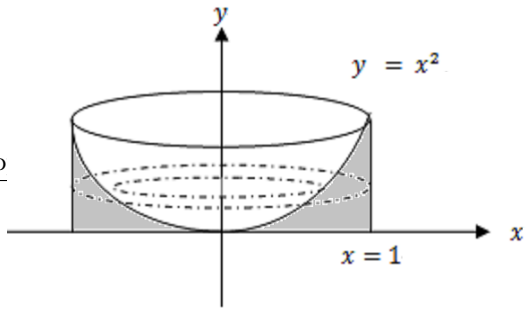


図 3.7　回転体の体積

解 まず，回転軸 y に垂直な平面で切断すると，その断面積はワッシャーの形をしています．このワッシャーの面積は $\pi - \pi x^2$ で，これに厚み Δy をつけると，その体積は $\Delta V = \pi(1-x^2)\Delta y$ となるので，求める体積 V は

$$V = \int_0^1 (\pi - \pi x^2)dy = \pi - \pi \int_0^1 ydy = \pi - \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

となります．次に筒を考えてみましょう．筒の高さは y で表わされ，その表面積は $2\pi xy$．よって少しの厚みを持った筒の体積は $2\pi xydx$ となります．よって回転体の体積 V は

$$V = \int_0^1 2\pi xydx = \int_0^1 2\pi xx^2dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \blacksquare$$

曲線の長さ

最後に曲線の長さを考えてみましょう．C^1 級の関数 $y = f(x)$ の $a \leq x \leq b$ の部分の長さを定積分で表わしてみましょう．まず $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

をとり，点 $(x_i, f(x_i))$ を P_i で表わします．$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ を順に結んで折れ線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ を作ります．この折れ線の和を作ると

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i$$

ここで分割 Δ を細かくするとき，この和がある値 s に収束するならば，この s を曲線 $y = f(x)$ の $a \leq x \leq b$ の部分の **弧の長さ (arc length)** と決めます．

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

$y = f(x)$ が C^1 級の曲線なら，

$$\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i = \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\Delta x_i,\ (x_{i-1} < \xi < x_i)$$

よって， $a \leq x \leq b$ の部分の長さ s は

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

で表わされます．まとめると

定理 3.17

[曲線の長さ]$y = f(x) \in C^1$ 級の $a \leq x \leq b$ の部分の曲線の長さ s は

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

で与えられる.

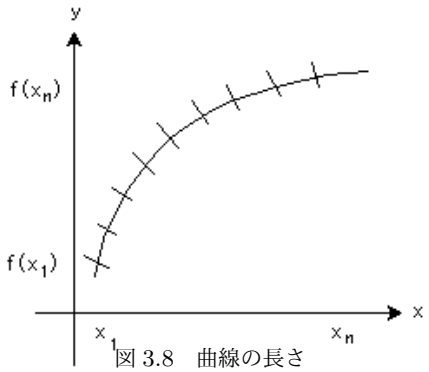


図 3.8　曲線の長さ

確認問題

1. 次の曲線で囲まれる図形の面積を求めよう.

(a) $y = x^2, y = x + 2$　(b) $y = x^3, y = x^2$　(c) $y = -\sqrt{x}, y = x - 6, y = 0$

(d) $y = x^3 - x, y = 1 - x^2$　(e) $x + 4 = y^2, x = 5$

(f) $y = 2x, x + y = 9, y = x - 1$

2. 次の曲線で囲まれる平面図形を x 軸の回りに回転してできる回転体の体積を求めよう.

(a) $y = x, y = 0, x = 1$　(b) $y = x^2, y = 9$　(c) $y = \sqrt{x}, y = x^3$

(d) $y = x^2, y = x + 2$

3. 次の曲線の長さを求めよう.

(a) $y = 2x + 3$ の $x = 0$ から $x = 2$ まで　(b) $y = x^{3/2}$ の $x = 0$ から $x = 44$ まで

(c) $x(t) = t^2, y(t) = 2t$ の $t = 0$ から $t = \sqrt{3}$ まで

(d) $r = e^\theta$ の $\theta = 0$ から $\theta = 4\pi$ まで

演習問題

1. 次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよう.

(a) $x = y^2, x = 3 - 2y^2$　(b) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t,\ (0 \leq t \leq \pi)$ と x 軸

2. 次の平面図形を x 軸の回りに回転してできる回転体の体積を求めよう.

(a) $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$

(b) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$ と x 軸で囲まれる部分.

3.　次の曲線の長さを求めよう.

(a) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ の全長　(b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の全長　(c) $r = 1 + \cos\theta$ の全

第 4 章

級数 (SERIES)

4.1 級数の定義 (definition of series)

深さ 2m の井戸にカエルが落ちました．カエルは必死に井戸からでようとしています．一回目のジャンプで 1m とびあがり，二回目のジャンプで $\frac{1}{2}$m, 三回目のジャンプで $\frac{1}{4}$m と次々に前回の半分の距離をジャンプしていきました．ここで質問です．このカエルはやがて外にでれたでしょうか．考えてみましょう．まず， $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \ldots,$ とおくと， 質問は

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

はどうなるかと聞いているのと同じです．そこで，

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ が数列のとき，この数列を用いて新たに数列

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

を作ります．このとき第 n 項までの部分和 S_n を **第 n 部分和 (nth partial sum)** といいます．

数列 $S_1, S_2, S_3, \ldots$ は形式的に

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

で表わされ，これを **級数 (series)** といいます．数列 $\{S_n\}$ が収束するとき，つまり

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

であるような実数 S が存在するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に**収束する (convergent)** といい，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

と表わし，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和は S であるといいます．また，数列 $\{S_n\}$ が収束しないとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は **発散する (divergent)** といいます．

例題 4.1

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$ を求めてみましょう．

解

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

より

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^n-1}{2^{n+1}}$$

よって

$$S_n=\frac{2^n-1}{2^n}$$

これより

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n-1}{2^n})=1$$

つまり $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は収束し，その和は $S=1$ です． ■

これを一般化したものに次の定理があります．次の級数は簡単に収束，発散の判定ができるのでよく用いられます．

定理 4.1

[無限等比級数]　$a\neq 0$ のとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots=\begin{cases}\frac{a}{1-r} & |r|<1\\ \text{発散} & |r|\geq 1\end{cases}$$

証明 $a\neq 0,\ r=1$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\sum_{n=0}^{\infty}a$ より発散．よって $r\neq 1$ について考えます．

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^n, rS_n=ar+ar^2+\cdots+ar^{n+1}$$

より

$$S_n(1-r)=a-ar^{n+1}$$

よって

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^{n+1}}{1-r}=\begin{cases}\frac{a}{1-r} & |r|<1\\ \text{発散} & |r|\geq 1\end{cases}\quad ■$$

例題 4.2

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ を求めてみましょう．

解 まず $\displaystyle\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ を部分分数で書き直してみると，

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}[\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}]$$

となります．これより第 n 部分和 S_n を求めると

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(3j-2)(3j+1)}=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{3j-2}-\frac{1}{3j+1}\right)\\&=\frac{1}{3}[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}]\\&=\frac{1}{3}[1-\frac{1}{3n+1}]\end{aligned}$$

これより，

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}[1-\frac{1}{3n+1}]=\frac{1}{3}\ \blacksquare$$

この級数の第 n 部分和は途中がすべて消えてしまうので，**telescoping sum**(望遠鏡級数) ともよばれています．

ここで収束する級数すべてにおいて成り立つ定理を示します．

定理 4.2

[発散条件]

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ が収束するならば，} \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

証明 $a_n=\sum_{n=1}^{n}a_j-\sum_{n=1}^{n-1}a_j$ よって

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{n}a_j-\sum_{j=1}^{n-1}a_j)=S-S=0\ \blacksquare$$

この定理の対偶をとると数列 a_n が収束しなければ，級数 $\sum a_n$ は発散することになります．これより，級数の収束，発散を調べるときには，この定理をまず用いてみて下さい．

例題 4.3

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ の収束，発散について調べてみましょう．

解 まず，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}$ を計算してみましょう．

$$n!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n\leq n^n$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n^n} = 1 \neq 0$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ は発散します．

この定理の逆は必ずしも正しくありません．例えば級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

を考えてみて下さい．この場合，数列 $\{\frac{1}{n}\}$ は 0 に収束しますが，この級数は次に示すように調和級数なので発散します．

定理 4.3

[一般調和級数]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\begin{cases} \text{収束} & p>1 \\ \text{発散} & p\leq 1 \end{cases}$$

証明 まず，$p \leq 0$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} \neq 0$$

となるので，発散条件よりこの級数は発散します．そこで，$p > 0$ の場合を考えます．

$f(x) = \dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$ とおくと，

$$f'(x) = -px^{-p-1} = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0$$

よって， $f(x) > 0$ は $(0,\infty)$ で単調減少となるので，

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq 1 + \int_1^{\infty} f(x)dx$$

が成り立つ．ここで $p > 1$ の場合を考えてみましょう．

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{\infty-0} = \frac{1}{p-1} < \infty$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq 1 + \int_1^{\infty} f(x)dx = 1 + \frac{1}{p-1} < \infty$$

これより $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ は上に有界な単調増加数列となるので収束．また $p < 1$ の場合

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{\infty-0} = \infty$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty$$

最後に $p = 1$ の場合

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = [\log x]_1^{\infty-0} = \infty$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty \ \blacksquare$$

確認問題

1.　次の級数の和を求めよう．

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{10^n}$　(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$　(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}$

2.　次の循環小数を有理数で表そう．

(a) $1.\bar{3}$　(b) $2.4\bar{1}$　(c) $0.\bar{9}$

演習問題

1.　次の級数の収束，発散を判定しよう．

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+1}$　(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})$　(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n}$

2.　次の級数の和を求めよう．

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$　(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$　(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

4.2　正項級数 (nonnegative term series)

前節で見たように，級数の収束や発散を支配するのは，項の番号 n が大きくなってからです．そこで，$\displaystyle\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ と表す代わりに，$\sum a_n$ と表すことにします．

すべての項が正である級数を **正項級数 (nonnegative term series)** といいます．第 n 部分和を S_n とすれば，S_n は単調増加であり，$\sum a_n$ は収束するか $\sum a_n = \infty$ かのどちらかです．したがって，$\sum a_n$ が収束するのと $\sum a_n < \infty$ とは同等であることがわかります．先に示した無限等比級数と一般調和級数は正項級数の代表的な例です．

さて級数の収束，発散を調べるのに，よく性質のわかっている別の級数と比較して調べることがあります．

定理 4.4

[比較判定法]2 つの正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ において, 有限な極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\rho$$

が存在するとき,

(1) $0<\rho<\infty$ ならば, $\sum a_n<\infty \Leftrightarrow \sum b_n<\infty$

(2) $\rho=0$ ならば, $\sum b_n<\infty \Rightarrow \sum a_n<\infty$

(3) $\rho=\infty$ ならば, $\sum b_n=\infty \Rightarrow \sum a_n=\infty$

証明 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\rho$, $0<\rho<\infty$ より $n>N$ ならば, $r_1<\frac{a_n}{b_n}<r_2$, $0<r_1<\rho<r_2<\infty$ となる整数 N が存在する．よって $r_1b_n<a_n<r_2b_n$．これより

$$\sum a_n=M<\infty \Rightarrow \sum b_n<\sum\frac{a_n}{r_1}=\frac{1}{r_1}\sum a_n=\frac{M}{r_1}<\infty$$

また,

$$\sum b_n=M<\infty \Rightarrow \sum a_n<\sum r_2b_n=r_2\sum b_n=r_2M<\infty$$

よって

$$\sum a_n<\infty \Leftrightarrow \sum b_n<\infty$$

(2), (3) も同様にして証明できます． ■

例題 4.4

次の級数の収束，発散は比較判定法を用いて調べてみましょう．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$$

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}=\infty$ と比較します．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\pi/n}{\pi/n}=1$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}=\infty \ \blacksquare$$

定理 4.5

[積分判定法]$f(x)$ を区間 $[N,\infty)$ (N は自然数) で連続な狭義の単調減少関数で, $f(x)\geq 0$ であるとする．このとき

$$a_n=f(n)\ (n=N,N+1,\ldots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\int_N^{\infty}f(x)dx<\infty \Longleftrightarrow \sum a_n<\infty$$

$$\int_N^\infty f(x)dx = \infty \Longleftrightarrow \sum a_n = \infty$$

証明 $f(x)$ は $x \geq N$ で狭義の単調減少関数であるから，$n > N$ に対しては

$$\int_n^{n+1} f(x)dx < \int_n^{n+1} f(n)dx = f(n),$$

$$\int_n^{n+1} f(x)dx > \int_n^{n+1} f(n+1)dx = f(n+1)$$

したがって

$$\int_{N+1}^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=N+1}^\infty f(n) \leq \int_N^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=N}^\infty f(n) \blacksquare$$

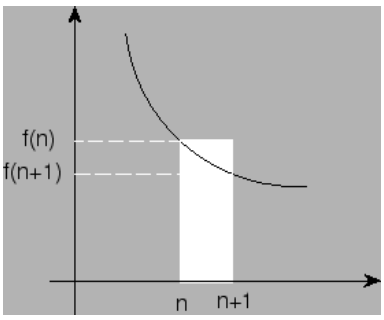


図 4.1　積分判定法

例題 4.5

次の級数の収束，発散は積分判定法を用いて調べてみましょう．

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^2}$$

解 $f(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_2^\infty f(x)dx &= \int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}dx \quad \left(t = \log x, dt = \frac{1}{x}dx\right) \\ &= \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\log 2}^{\infty-0} = \frac{1}{\log 2} < \infty\end{aligned}$$

よって積分判定法より

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^2} < \infty \blacksquare$$

次に，フランスの数学者 Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) によって示された正項級数が収束するための十分条件について学びます．

定理 4.6

[D'Alembert の判定法] 正項級数 $\sum a_n$ において

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$$

が存在するとき，

(1) $0\le\rho<1$ ならば，$\displaystyle\sum a_n<\infty$

(2) $\rho>1$ ならば，$\displaystyle\sum a_n=\infty$

証明 (1) の証明．$\rho<r<1$ であるような r をとり，この r に対して適当な自然数 N をとると，$n\ge N$ であるすべての自然数 n に対して，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r$$

が成り立つようにできます．したがって，

$$a_{N+m}=a_N\cdot\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}<a_N\cdot r^m$$

よって第 n 部分和 S_n は

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}+a_N+\cdots+a_n\\&<a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}+a_N(1+r+\cdots+r^{n-N})\\&<a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}+\frac{a_N}{1-r}.\end{aligned}$$

これより $\{S_n\}$ は上に有界な単調増加数列となり収束します．

(2) の証明は各自試みて下さい．■

例題 4.6

D'Alembert の判定法を用いて次の級数は収束することを示してみましょう．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x>0)$$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0$$

よって，D'Alembert の判定法により，この級数は収束します．■

確認問題

1. 次の級数の収束，発散を比較判定法を用いて判定しよう．

(a) $\displaystyle\sum\frac{n}{n^3+1}$　(b) $\displaystyle\sum\frac{1}{3n+2}$　(c) $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2+1}$　(d) $\displaystyle\sum\frac{\log n}{n}$

2. 次の級数の収束，発散を積分判定法を用いて判定しよう．

(a) $\displaystyle\sum\frac{1}{n}$　(b) $\displaystyle\sum\frac{1}{n\log n}$　(c) $\displaystyle\sum\frac{1}{n(\log n)^2}$　(d) $\displaystyle\sum\frac{\log n}{n}$

3. 次の級数の収束，発散をダランベールの判定法を用いて判定しよう．
(a) $\sum \frac{1}{2^n}$ (b) $\sum \frac{10^n}{n!}$

演習問題

1. 次の級数の収束，発散を判定しよう．
(a) $\sum \frac{n}{3^n}$ (b) $\sum \frac{n!}{n^n}$ (c) $\sum \frac{n^n}{n!}$ (d) $\sum \frac{n^2}{2^n}$ (e) $\sum \frac{2^n}{n!}$
(f) $\sum (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

4.3 交項級数 (alternating series)

正の項と負の項が交互にあらわれる級数を **交項級数 (alternating series)** といいます．

ここで，ドイツの数学者 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) によって示された交項級数が収束するための十分条件を学びます．

定理 4.7

[Leibniz の定理] 次の 2 つの条件が満たされれば，交項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$$

は収束する．

(1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

証明 この級数の第 n 部分和を S_n とすると，

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

よって $\{S_{2n}\}$ は上に有界な単調増加数列となるので収束します．ここで， $S_{2n} \to S$ とすると，$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ より

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S \ (n \to \infty)$$

となるので， $\{S_n\}$ は S に収束します．したがって $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n < \infty$ ■

交項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ は Leibniz の定理の条件を満たしているので収束します．ところがこの級数の各項の絶対値をとって作った級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は調和級数となり発散します．このように $\sum a_n$ が収束し $\sum |a_n|$ が発散する級数を **条件収束 (conditionally convergent)** するといいます．また $\sum |a_n|$ も収束する級数 $\sum a_n$ を **絶対収束 (absolute convergent)** するといいます．

$\sum a_n$ が収束しても $\sum |a_n|$ は収束しない場合があることは分かりました．では，その逆はどうなのでしょうか．つまり，$\sum |a_n|$ が収束して $\sum a_n$ が収束しない場合はあるのでしょうか．ちょっと考えてみて下さい．

定理 4.8

$\sum |a_n|$ が収束すれば，$\sum a_n$ も収束する．

証明 $\sum |a_n|$ の第 n 部分和を T_n，$\sum a_n$ の第 n 部分和を S_n とおくと，

$$|S_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = T_n$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} T_n = \sum |a_n| < \infty$$

となり，$\sum |a_n|$ が収束すれば，$\sum a_n$ も収束します．

ここで，収束する級数と発散する級数の決定的な違いを調べてみましょう．まず，次のような交項級数を考えます．

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n-1}{3n-2} = \frac{2}{1} - \frac{5}{4} + \frac{8}{7} - \frac{11}{10} + \cdots$$

この級数は $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ となるので発散条件より発散します．この級数を隣り合った 2 つの項をかっこでくくって作った級数

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{1} - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{8}{7} - \frac{11}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{3m-1}{3m-2} - \frac{3m+2}{3m+1}\right) + \cdots \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{3m-1}{3m-2} - \frac{3m+2}{3m+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(3m-2)(3m+1)}
\end{aligned}$$

を考えてみましょう． この級数は例題 4.1 より 1 に収束します．次に同じ級数をかっこをつける場所を変えてくくってみましょう．

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{1} - \left(\frac{5}{4} + \frac{8}{7}\right) - \left(\frac{11}{10} - \frac{14}{13}\right) - \cdots - \left(\frac{3m-1}{3m-2} - \frac{3m+2}{3m+1}\right) + \cdots \\
&= 2 - \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{3m-1}{3m-2} - \frac{3m+2}{3m+1}\right) = 2 - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{3}{(3m-2)(3m+1)} \\
&= 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \cdots\right) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

このように，かっこをつける場所を変えると異なる値に収束するのは，発散する級数の特徴なのです．収束する級数は数列の順序を変えても同じ値に収束します．

確認問題

1.　次の級数は条件収束か絶対収束か判定しよう．

(a) $1+(-1)+1+\cdots+(-1)^n+\cdots$

(b) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}+\cdots+(-1)^n\dfrac{n}{n+1}+\cdots$

(c) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+3}-\dfrac{1}{3n+4}+\cdots$

演習問題

1. 次の級数は条件収束か絶対収束か判定しよう．

(a) $\sum(-1)^n\dfrac{\log n}{n}$ (b) $\sum(-1)^n\dfrac{n}{3^n}$ (c) $\sum(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})$

(d) $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (e) $\sum\dfrac{(-1)^n}{n\log n}$ (f) $\sum\dfrac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3+n}}$

4.4 *関数項級数 (series of functions)

各項が関数であるような級数を **関数項級数 (series of functions)** といいます．

$\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を区間 I で定義された関数の列とします．この関数列 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ より

$$S_1(x)=a_1(x), S_2(x)=a_1(x)+a_2(x), S_3(x)=a_1(x)+a_2(x)+a_3(x),\ldots$$

を考えます．区間 I のすべての点 x で数列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき，つまり

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

であるような関数 $S(x)$ が存在するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ は収束するといい， $S(x)$ を無限級数の和とよびます．特に収束が区間 I において一様収束である場合，つまり， I の任意の x に対して

$$n\geq N \text{ ならば } |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

となる N が I の x に無関係に存在する場合，級数 $\sum a_n(x)$ は I で**一様収束する (uniformly convergent)** といいます．

ここで $S(x)-S_n(x)=R(x)$ とおくと，無限級数の一様収束は次のように表わせます．

I の任意の x に対して

$$n\geq N \text{ ならば } |R(x)|<\varepsilon$$

となる N が存在する．

次に，ドイツの数学者 Carl Weierstrass (1815-1897) によって示された一様収束するための簡単な十分条件を学びます．

定理 4.9

[Weierstrass の判定法] ある区間 I の任意の x に対して

(1) $|a_n(x)|\leq M_n,\ n=1,2,\ldots$

(2) $\sum M_n < \infty$
であるような数列 $\{M_n\}$ が存在するとき，$\sum a_n(x)$ は I で一様収束かつ絶対収束である．
証明

$$|R_n(x)| = |a_{n+1}(x) + \cdots| \leq |a_{n+1}(x)| + |a_{n+2}(x)| + \cdots \leq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots$$

ところで $\sum M_n < \infty$ より，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても N が存在し，$n \geq N$ ならば

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots < \varepsilon$$

ここで N は明らかに x とは無関係なので，$n > N$ のとき $|R_n(x)| < \varepsilon$ が成り立ちます．■

例題 4.7

$\sum (-1)^n \dfrac{\sin nx}{n^2}, |x| \leq \pi$ は一様収束するか調べてみましょう．
解 $|(-1)^n \dfrac{\sin nx}{n^2}| \leq \dfrac{1}{n^2}$．また $\sum \dfrac{1}{n^2} < \infty$ なので，Weierstrass の判定法により一様収束します．■

ここでなぜ一様収束という考え方が生まれたのか考えてみましょう．例えば $a_n(x) = x^n$ となる級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ を考えます．関数列 $a_n(x) = x^n$ は区間 $(-\infty, \infty)$ で連続です．すると定理 1.4 より $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ も区間 $(-\infty, \infty)$ で連続となります．そこでその極限値 $S(x) = \sum x^n$ も連続だろうと考えたくなります．しかし，実際はどうでしょう．

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

より $|x| \geq 1$ のときには，発散してしまいます．つまり，たとえすべての項が連続でもその和は連続とは限らないのです．これでは不便なので，なんとか有限のときに成り立つ性質を，無限のときにも適用できるように，考え出されたのが一様収束という概念なのです．よって無限級数が一様収束するとき，級数は有限級数のもっている多くの性質を継承します．

定理 4.10

[無限級数の連続性] $a_n(x)$ が区間 I で連続で $\sum a_n(x)$ が I で一様収束ならば，$S(x) = \sum a_n(x)$ も I で連続である．
証明 区間 I の任意の点 x に対して，$\lim_{h\to 0} S(x+h) = S(x)$ がいえればよいでしょう．まず，一様収束の仮定に着目し，

$$S(x+h) - S(x) = S(x+h) - S_n(x+h) + S_n(x+h) - S_n(x) + S_n(x) - S(x)$$

と変形して，

$$|S(x+h) - S(x)| \leq |S(x+h) - S_n(x+h)| + |S_n(x+h) - S_n(x)| + |S_n(x) - S(x)|$$

とすると，一様収束の仮定から，任意の正の数 ε に対し，$n \geq N$ ならば

$$|S(x+h) - S_n(x+h)| < \varepsilon, |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

となる正の数 N が存在します．次に $S_n(x)$ の連続性から， ε に対し δ を適当にとることができ，

$$|h| < \delta \text{ ならば } |S_n(x+h) - S_n(x)| < \varepsilon$$

したがって，

$$|h| < \delta \text{ ならば } |S(x+h) - S(x)| < 3\varepsilon \ \blacksquare$$

定理 4.11

[項別積分の定理]$a_n(x)$ が区間 I で連続で $\sum a_n(x)$ が I で一様収束ならば，

$$\int (\sum a_n(x))dx = \sum \int a_n(x)dx$$

証明 区間 $I = [a, b]$ 内の任意の点 x に対して，

$$|\int_a^x S_n(x)dx - \int_a^x S(x)dx| = |\int_a^x [S_n(x) - S(x)]dx| \leq \int_a^x |S_n(x) - S(x)|dx$$

ここで $S_n(x)$ が $S(x)$ に一様収束するので，任意の正の数 ε に対し， x に無関係に N をとり，$n > N$ ならば， $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ とすることができるはずです．したがって， $[a, b]$ の任意の x について， $n > N$ ならば，

$$|\int_a^x (a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x))dx - \int_a^x \sum a_n(x)dx| \leq \int_a^x \varepsilon dx \leq \varepsilon(b-a)$$

これより

$$\sum \int a_n(x)dx = \int \sum a_n(x)dx \ \blacksquare$$

定理 4.12

[項別微分の定理]$a_n(x)$ が区間 I で $C^{(1)}$ 級で， $S(x) = \sum a_n(x)$ かつ $\sum a_n'(x)$ が一様収束するならば

$$(\sum a_n(x))' = \sum a_n'(x)$$

証明 $S_n'(x)$ が一様収束するので，その極限関数を $T(x)$ とおくと，前の 2 つの定理より，$T(x)$ は連続で，

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x S_n'(x)dx = \int_a^x T(x)dx$$

ここで， $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ に注意すると，

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x S_n'(x)dx = \lim_{n\to\infty} [S_n(x) - S_n(a)] = S(x) - S(a)$$

となるので，

$$S(x) - S(a) = \int_a^x T(x)dx$$

$T(x)$ は連続なので，$\int_a^x T(x)dx$ は微分可能でかつ

$$\frac{d}{dx}\int_a^x T(x)dx = T(x)$$

よって $S(x)$ も微分可能で，$T(x) = S'(x)$ となり，これより

$$\sum a_n'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = S'(x) = (\sum a_n(x))' \ \blacksquare$$

無限級数 $\sum a_n(x)$ において，特に $a_n(x) = a_n x^n$ のときを **整級数 (power series)** といいます．例えば $e^x, \sin x, \cos x, \log(1+x), (1+x)^\alpha$ の Taylor 級数

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n
\end{aligned}$$

は整級数の 1 つです．ここで，$\binom{\alpha}{n}$ は $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}$ を意味し一般化された 2 項係数といいます．

さて $\sum a_n x^n$ は x のどんな値に対して収束するのでしょうか．$c_n = a_n x^n$ とおき，D'Alembert の判定法を用いると

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \\
&= |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|
\end{aligned}$$

より $|x| \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ ならば $\sum |a_n x^n|$ は収束し，$|x| \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ ならば $\sum a_n x^n$ は発散するのでこの極限値

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

を **収束半径 (radius of convergence)** といいます．これをまとめると次の定理を得ます．

定理 4.13

$\sum a_n x^n$ は $|x| < \rho$ のとき絶対収束し，$|x| > \rho$ のとき発散する．

例題 4.8

$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ を用いて次の整級数の収束半径を求めてみましょう．

$$\sum \frac{x^n}{n^2}$$

解

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}| \\ &= \lim_{n\to\infty}|\frac{(n+1)^2}{n^2}| \\ &= 1 \ \blacksquare\end{aligned}$$

次に整級数の基本性質をあげておきます．

定理 4.14

[整級数の基本性質]$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を ρ とし， $f(x) = \sum a_n x^n$ とおくと，次の (1) から (6) が成り立つ．

(1) 任意の r $(0 < r < \rho)$ に対し， $\sum a_n x^n$ は $[-r, r]$ で絶対収束かつ一様収束する．

(2) $f(x)$ は $(-\rho, \rho)$ で連続である．

(3) $f(x)$ は $(-\rho, \rho)$ で項別積分可能であって，次の式が成り立つ．

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

(4) $f(x)$ は $(-\rho, \rho)$ で項別微分可能であって，次の式が成り立つ．

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(5) $(-\rho, \rho)$ において $f(x)$ の Taylor 級数は整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ である．つまり

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

証明 (1) $r < r_1 < \rho$ を満たす r_1 をとると，定理 4.4 より $\sum a_n r_1^n$ は絶対収束します．そこで $|a_n r_1^n| < M$ となる M を適当にとることができる．したがって， $|x| \le r$ ならば，

$$\sum |a_n x^n| \le \sum |a_n| r^n < \sum |a_n| (\frac{r}{r_1})^n r_1^n < M \sum (\frac{r}{r_1})^n < \infty$$

よって Weierstrass の判定法により $\sum a_n x^n$ は $[-r, r]$ で絶対収束かつ一様収束します．

(2) $a_n(x) = a_n x^n$ とおくと，無限級数の連続性により， $f(x)$ は $(-\rho, \rho)$ で連続となる．

(3) $a_n(x) = a_n x^n$ とおくと，項別積分の定理により，

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

が成り立つ．

(4) $\sum n a_n x^{n-1}$ の収束半径を求めると

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$$

したがって，$\sum n a_n x^{n-1}$ は $[-r, r]$ で一様収束するので，項別微分の定理より

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

が成り立つ．

(5) $f(x)$ の Taylor 級数を求めると

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum a_n x^n \ \blacksquare$$

例題 4.9

$\log(1+x)$ の整級数を求めてみましょう．

解 Taylor 展開すれば整級数は求まりますが，もっと簡単に求めることができます．まず，$\log(1+x)$ は $\dfrac{1}{1+x}$ の不定積分であることを思い出します．つまり，

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

次に，$\dfrac{1}{1+t}$ を級数展開すると

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \quad (t \in (-1, 1))$$

これより

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

ここで項別積分の定理を使うと

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}\right]_{n=0}^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}\end{aligned}$$

よって

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \quad (-1 < x < 1)$$

となります．ついでに $x = 1$ のときどうなるか考えてみましょう．$x = 1$ のとき，右辺は Leibniz の定理の条件を満たす交項級数となるので収束します．よって

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

となります．

確認問題

1. 項別微分，項別積分を用いて次の関数の MacLaurin 級数を求めよ．

(a) $\log(1-x)$ (b) $\tan^{-1} x$

演習問題

1. 次のベキ級数の収束半径を求めよう．

(a) $\sum \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ (b) $\sum \frac{2^{2n}}{2n!} x^{2n}$ (c) $\sum n! x^n$

2. 次の関数の $x = 0$ のまわりのベキ級数展開を求めよう．

(a) $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (b) $\frac{1}{3x^2 - 4x + 1}$

第 5 章

ベクトル関数 (VECTOR FUNCTIONS)

5.1 ベクトル関数 (vector functions)

実数 R の部分集合 D に属する各点 t に対して，実関数 $x(t), y(t), z(t)$ が与えられるとき，1 つのベクトル $(x(t), y(t), z(t))$ を考えることができます．このベクトル $\mathbf{F}(t)$ を D から R^3 への 1 変数**ベクトル値関数 (vector-valued function)** または **ベクトル関数 (vector function)** といい，

$$\mathbf{F}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

または

$$\mathbf{F}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$$

で表わします．

しばしば $\mathbf{F}(t)$ は幾何学的に実軸 t から原点と点 $(x(t), y(t), z(t))$ を結ぶベクトルへの写像として扱われます．

例題 5.1

$\mathbf{F}(t) = t\cos t\hat{\mathbf{i}} + t\sin t\hat{\mathbf{j}} + t^2\hat{\mathbf{k}}$ のとき， $\mathbf{F}(t)$ の軌跡を求めてみましょう．
解 $\mathbf{F}(t)$ の成分は $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t^2$ であるから， $z = x^2 + y^2$ となり， $\mathbf{F}(t)$ の軌跡 $(x(t), y(t), z(t))$ は放物面 $z = x^2 + y^2$ 上にあることが分かります． ■

定義 5.1

ベクトル関数 $\mathbf{F}(t)$ において， $t \to t_0$ のとき， $\mathbf{F}(t) \to \mathbf{L}$ ならば， $\mathbf{F}(t)$ の極限値は $\mathbf{L}$ であるといい，次のように表わす．

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$$

極限値の定義は 1 変数関数のときと同じなので，たぶん連続性の定義も 1 変数関数のときと同じになると期待するでしょう．実際そのとうりです．

定義 5.2

$\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}(t_0)$ が成り立つとき，ベクトル関数 $\mathbf{F}(t)$ は $t=t_0$ で連続であるという．また，区間 $[a,b]$ のすべての t で連続なとき， $\mathbf{F}(t)$ は区間 $[a,b]$ で連続であるといい， $\mathbf{F}(t)\in C[a,b]$ と表わす．

このように 1 変数関数における様々な定義はベクトル関数へと継承されます．

定義 5.3

ベクトル関数 $\mathbf{F}(t)$ は $t=t_0$ において，

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(t_0)}{t-t_0}=\mathbf{A}$$

が存在するとき $t=t_0$ で**微分可能 (differentiable)** であるという．また，この極限値 $\mathbf{A}$ を点 t_0 における微分係数といい， $\mathbf{F}'(t_0)$ で表わす．

次の節で学びますがベクトル $\mathbf{F}'(t_0)$ の方向は， $\mathbf{F}(t)$ によって描かれる曲線の $t=t_0$ での接線方向になります．図 5.1 参照

ベクトルの和やスカラー倍がそれぞれの対応する成分の和やスカラー倍で定義されたように，ベクトル関数の極限値，微分係数，不定積分の計算は，ベクトル関数の成分の極限値，微分係数，不定積分より求めることができます．

定理 5.1

$\mathbf{F}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ とすると，次のことが成り立つ．

(a) $\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)=(\lim_{t\to t_0}x(t),\lim_{t\to t_0}y(t),\lim_{t\to t_0}z(t))$

(b) $\mathbf{F}(t)$ は連続 $\Leftrightarrow x(t),y(t),z(t)$ が共に連続

(c) $\mathbf{F}\in C'[a,b]\Rightarrow\mathbf{F}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

(d) $\mathbf{F}\in C[a,b]\Rightarrow\int_a^b\mathbf{F}(t)dt=(\int_a^b x(t)dt,\int_a^b y(t)dt,\int_a^b z(t)dt)$

証明 (a)

$$\begin{aligned}|\mathbf{F}(t)-\mathbf{L}|&=|(x(t),y(t),z(t))-(l_1,l_2,l_3)|\\&=|(x(t)-l_1,y(t)-l_2,z(t)-l_3)|\\&=\sqrt{(x(t)-l_1)^2+(y(t)-l_2)^2+(z(t)-l_3)^2}\end{aligned}$$

より， $x(t)\to l_1,y(t)\to l_2,z(t)\to l_3$ ならば， $\mathbf{F}(t)\to\mathbf{L}$. また， $\mathbf{F}(t)\to\mathbf{L}$ ならば，

$$\sqrt{(x(t)-l_1)^2+(y(t)-l_2)^2+(z(t)-l_3)^2}\to 0$$

ここで，平方根の中はすべて 2 乗の和であることに注意すると

$$(x(t)-l_1)^2\to 0,(y(t)-l_2)^2\to 0,(z(t)-l_3)^2\to 0$$

となる．よって $x(t)\to l_1,y(t)\to l_2,z(t)\to l_3$ より，

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)=(\lim_{t\to t_0}x(t),\lim_{t\to t_0}y(t),\lim_{t\to t_0}z(t))\ \blacksquare$$

(b)，(c)，(d) の証明は演習問題にまわします．

例題 5.2

$\mathbf{F}(t) = (t^2, t, t^3)$ のとき，$\mathbf{F}'(t)$ を求めてみましょう．
解 それぞれの成分を微分することにより

$$\mathbf{F}'(t) = (2t, 1, 3t^2) \blacksquare$$

$\mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t)$ が t について微分可能なベクトル関数ならば，次のことが成り立ちます．

$$\begin{array}{ll}
(1) & (\mathbf{F}(t) \pm \mathbf{G}(t))' = \mathbf{F}'(t) \pm \mathbf{G}'(t) \\
(2) & (c\mathbf{F}(t))' = c\mathbf{F}'(t) \\
(3) & (\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t))' = \mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}'(t) \\
(4) & (\mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t))' = \mathbf{F}'(t) \times \mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}'(t)
\end{array}$$

例題 5.3

ベクトル関数 $\mathbf{F}(t)$ の大きさ $\|\mathbf{F}(t)\|$ が定数のとき，$\mathbf{F}(t)$ と $\mathbf{F}'(t)$ は全ての t において直交することを示してみましょう．
解 $\|\mathbf{F}(t)\| = c$ より，$\|\mathbf{F}(t)\|^2 = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t) = c^2$．よってベクトル関数の微分法より

$$(\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t))' = 2\mathbf{F}'(t) \cdot \mathbf{F}(t) = 0$$

したがって，内積が 0 より $\mathbf{F}(t)$ と $\mathbf{F}'(t)$ は直交します．$\blacksquare$

確認問題

1.　次の問に答えよう．

(a) $\mathbf{F}(t) = (\cos t, \sin t)$ のとき，$\mathbf{F}'(t)$ と $\|\mathbf{F}'(t)\|$ を求めよう．
(b) $\mathbf{F}(t) = (1 + 2t, 3 - t, 2 + 3t)$ のとき，$\mathbf{F}'(t)$ と $\|\mathbf{F}'(t)\|$ を求めよう．
(c) $\mathbf{F}'(t) = (1, 2t)$ のとき，$\mathbf{F}(t)$ を求めよう．
(d) $\mathbf{F}'(t) = (e^t, \sqrt{2}, e^{-t})$ のとき，$\mathbf{F}(t)$ を求めよう．

演習問題

1.　次の問に答えよう．

(a) $\mathbf{F}(t) = (\sin t, \cos^2 t, t^2)$ のとき，$\mathbf{F}'(t)$ を求めよう．
(b) $\mathbf{F}'(t) = (\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{1}{1+t^2}, \tan t)$ のとき，$\mathbf{F}(t)$ を求めよう．
(c) $\mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t)$ が t について微分可能なベクトル関数のとき，

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}'$$

が成り立つことを証明しよう．

(d) $\mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t)$ が t について微分可能なベクトル関数のとき，

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \mathbf{G}'$$

が成り立つことを示そう．

(e) 定理 5.1(b)，(c)，(d) を証明しよう．

5.2 曲線 (space curves)

空間の点 P (x, y, z) の描く空間曲線は

$$C = \{(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a, b]\}$$

で与えられますが，これは原点を O とする点 P の位置ベクトル $\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y, z)$ が t のベクトル関数として

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

のように与えられるのと

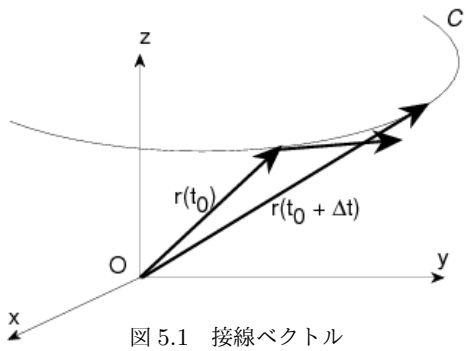


図 5.1　接線ベクトル

次に，ベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ の導関数 $\mathbf{r}'(t)$ は幾何学的に何を表しているのか考えてみましょう．

ベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ の導関数 $\mathbf{r}'(t)$ は $\mathbf{r}'(t)$ の定義より

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

ここで， $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ は $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ ならば，たとえ Δt が 0 に近づいても $\mathbf{0}$ にならず，接線の方向ベクトルに近づいていくことが分かります．よってこの極限値

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

を接線の方向ベクトルとして用いることができないでしょうか．残念ながら，この極限値を接線の方向ベクトルとして使うことはできません．なぜなら，この極限値は $\mathbf{0}$ となり， $\mathbf{0}$ には方向がありません．

そこで，これを回避するために Δt が小さいときに，大きな長さを得られるような次のベクトルを考えます．

$$\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

このベクトルは Δt が 0 でないとき $\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ と平行です．つまり，このベクトルは接線の方向ベクトルと平行です．よってこの極限値 $\mathbf{r}'(t)$ が存在するとき，この極限値を接線の方向ベクトルと考えることができるので，$\mathbf{r}'(t)$ を曲線 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ の **接線ベクトル (tangent vector)** といいます．また

$$\hat{\mathbf{t}}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

を **接線単位ベクトル (unit tangent vector)** といいます．

ここで $\|\hat{\mathbf{t}}(t)\|=1$ に注意すると，例題 5.1 より $\hat{\mathbf{t}}'(t)$ と $\hat{\mathbf{t}}(t)$ は直交します．そこで $\hat{\mathbf{t}}'(t)$ を曲線 $\mathbf{r}(t)$ の **法線ベクトル (normal vector)** といいます．また，$\mathbf{t}'(t)\neq 0$ のとき，

$$\hat{\mathbf{n}}(t)=\frac{\hat{\mathbf{t}}'(t)}{\|\hat{\mathbf{t}}'(t)\|}$$

を **主法線単位ベクト**

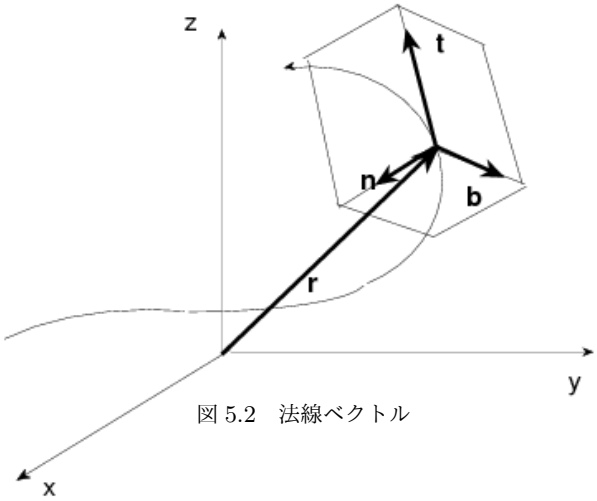


図 5.2　法線ベクトル

例題 5.4

2 点 $(-1,0,2),(1,4,3)$ を通る直線の方程式を求めてみましょう．

解 求める直線は始点を $(-1,0,2)$ にもち，方向が $(1,4,3)-(-1,0,2)=(2,4,1)$ と考えられるので，直線上の任意の点を (x,y,z) とすると，

$$(x,y,z)=(-1,0,2)+(2,4,1)t,\quad t\in R$$

またはこの式を t について解くと

$$t=\frac{x+1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{1}$$

が得られます．■

例題 5.5

平面曲線 $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \sin t)$ を描いてみましょう．
解 $x(t) = \sin t, y(t) = \sin(t)$ より $x = y$．ここで注意しなければならないのは， $\sin t$ のとる値は -1 から 1 なので，求める曲線は $y = x$，$-1 \leq x \leq 1$ となります． ■

例題 5.6

曲線 $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ の $t = \dfrac{\pi}{4}$ における接線の方程式を求めてみましょう．
解 接線ベクトルは

$$\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4}) = (-\sin t, \cos t)\ |_{t=\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

で与えられます．よって接線の方程式は

$$(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

または

$$t = \frac{x - \sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}$$

となります． ■

曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ が $\mathbf{r}'(t) \neq 0, \mathbf{r}'(t) \in C[a, b]$ のとき，曲線 $\mathbf{r}$ を **滑らかな曲線 (smooth curve)** といいます．滑らかな曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ の $a \leq t \leq b$ の部分の長さを **弧長 (arc length)** といい，s で表わします．では，弧長 s はどうやったら求まるか考えてみましょう．

区間 $[a, b]$ 内の微小区間 $[t, t + \Delta t]$ に対応する曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の弧 PQ の長さは線分 PQ で近似されると考えられます．このとき，

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta z}{\Delta t})^2}\ \Delta t$$

したがって曲線の長さ s は定積分

$$\begin{aligned} s &= \lim \sum \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta z}{\Delta t})^2}\ \Delta t \\ &= \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} dt \\ &= \int_a^b \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\| dt \end{aligned}$$

で表わされます．なお $\mathbf{r}(a)$ から $\mathbf{r}(t)$ までの弧長 $s(t)$ は

$$s(t) = \int_a^t \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\| dt$$

で与えられます．よって

$$\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|$$

となります．

定理 5.2

曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ が滑らかな曲線のとき， $\mathbf{r}(a)$ から $\mathbf{r}(t)$ までの弧長 $s(t)$ は

$$s(t) = \int_a^t \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\| dt$$

となる．

ここで気づいたと思いますが， t を時間と考えると， $\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|$ は微小時間内での位置の変化と考えられるので，点 P の動く速さを表わします．よって，曲線の長さ $s(t)$ は点 P が時間 t 内に動いた距離と考えることができます．

例題 5.7

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ の $0 \leq t \leq 2\pi$ の部分の長さを求めてみましょう．

解 $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ より， $x^2 + y^2 = 1$ となり， $\mathbf{r}(t)$ は半径 1 の円柱の回りをらせん状に回転する滑らかな曲線だということが分かります．そこで

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 1)$$

より

$$\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

よって

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

となります． ■

例題 5.8

弧長 s をパラメターとして曲線 $\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t)$ を表わしてみましょう．

解 曲線 $\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t)$ より

$$\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\| = \|(-5\sin t, 5\cos t)\| = 5$$

よって

$$s = \int_0^t 5dt = 5t$$

または，$\|\mathbf{r}(t)\|^2 = x^2 + y^2 = 25$ より曲線 $\mathbf{r}(t)$ は原点を中心とする半径 5 の円です．よって弧長 s は $s = 5t$．これより

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t(s)) = (5\cos\frac{s}{5}, 5\sin\frac{s}{5})$$

となります．■

曲線 C が弧長 s をパラメターとして $\mathbf{r}(s)$ で表わされているとき，接線ベクトルを求めると

$$\frac{\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s} = \frac{\text{弦の長さ}}{\text{弧の長さ}} \longrightarrow 1$$

よって，接線単位ベクトル $\hat{\mathbf{t}}$ は

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

でも表わせます．

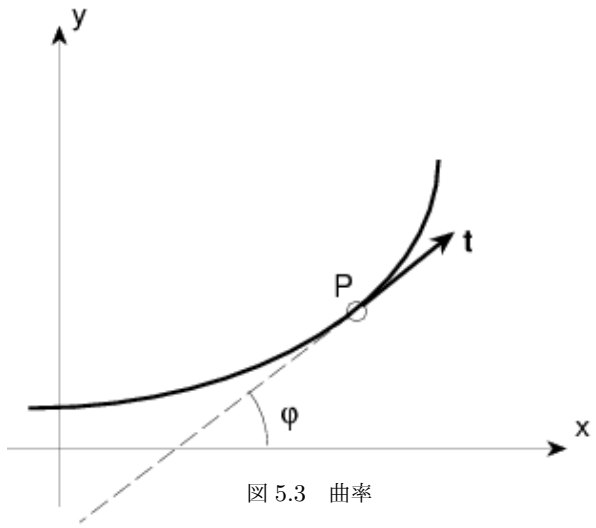


図 5.3　曲率

ここで曲線の曲がり具合について考えてみましょう．まず平面上の曲線について考えてみましょう．曲線上の点 P での接線 l と x 軸とが作る角度を ϕ とします．点 P が動くに従って接線 l と ϕ は変化します．このとき，単位弧長あたりの ϕ の変化率を **曲率 (curvature)** といい

$$\kappa = |\frac{d\phi}{ds}|$$

で表わします．

ここで接線単位ベクトル $\hat{\mathbf{t}}$ は $\hat{\mathbf{t}} = (\cos\phi, \sin\phi)$ で表わすことができます．よって単位弧長あたりの接線ベクトルの変化率を調べると

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = (-\sin\phi\frac{d\phi}{ds}, \cos\phi\frac{d\phi}{ds}) = \frac{d\phi}{ds}(-\sin\phi, \cos\phi)$$

これより

$$\|\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\| = \|\frac{d\phi}{ds}(-\sin\phi, \cos\phi)\| = |\frac{d\phi}{ds}| = \kappa$$

よって曲率 κ は，単位弧長あたりの接線ベクトルの変化率でも表わすことができます．

例題 5.9

曲線 $y = f(x)$ の曲率を求めてみましょう．

解 まず，$|\dfrac{d\phi}{ds}|$ を求めてみましょう．$\tan\phi$ は接線の傾きなので，$\tan\phi = y'(x)$ となります．よって

$$\phi = \tan^{-1}(y')$$

これを x について微分すると

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{1+(y')^2}\cdot\frac{d}{dx}(y') = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

ここで，

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{d\phi}{ds}\sqrt{1+(y')^2}$$

に注意すると

$$\frac{d\phi}{ds}\sqrt{1+(y')^2} = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

よって

$$\kappa = |\frac{d\phi}{ds}| = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

となります．■

空間の曲線の曲率は $\kappa = \|\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\|$ を定義として使います．すると，

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}/dt}{ds/dt},\ \hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{t}}'}{\|\hat{\mathbf{t}}'\|} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}/dt}{\|d\hat{\mathbf{t}}/dt\|}$$

より

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \hat{\mathbf{n}}\frac{\|d\hat{\mathbf{t}}/dt\|}{ds/dt} = \hat{\mathbf{n}}\|\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\| = \hat{\mathbf{n}}\kappa \tag{5.1}$$

確認問題

1.　次の条件を満たす直線のベクトル方程式を求めよ．

(a) 点 $(1,-1,2)$ を通りベクトル $(2,-3,1)$ に平行．

(b) 点 $(3,1,0)$ を通り線分 $\mathbf{r}(t) = (3t,-t,t)$ に平行．

(c) 点 $(1,0,3)$ と $(2,-1,4)$ を通る．

2.　次の曲線の接線ベクトルと与えられた点を通る接線の方程式を求めよう．

(a) $\mathbf{r}(t) = (1,t,t^2), t = 1$　　(b) $\mathbf{r}(t) = (2t^2, 1-t, 3+2t^2), t = 1$

3.　次の曲線の弧長を求めよう．

(a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ただし，$0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$

(b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$ ただし，$0 \le t \le 1$

4. 次の曲線の曲率を求めよう．

(a) $y = x^3$　(b) $y = x - x^2$　(c) $y = \tan x$

演習問題

1. 次の曲線の接線ベクトルと与えられた点を通る接線の方程式を求めよう．

(a) $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t}, -\log t)$ $t = 1$　(b) $\mathbf{r}(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, t)$ $t = 2$

2. 次のパラメター化された曲線を x, y, z の方程式で表わそう．

(a) $\mathbf{r}(t) = (at, bt^2)$　(b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$　(c) $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t, t)$

3. 次の曲線の弧長を求めよう．

(a) $\mathbf{r}(t) = (t, \log(\sec t), 3)$ ただし, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

(b) $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t, \sin t)$ ただし，$0 \le t \le \pi$

(c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ ただし，$y \ge 0$

4. 次の曲線の曲率を求めよう．

(a) $y = e^{-x}$　(b) $y = \log(\sec x)$　(c) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t)$

5.3 点の運動 (motion of objects)

曲線

$$C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a, b]$$

は空間を運動している点 P が描いた軌跡と考えることができます．ここで区間 $[a, b]$ は時間の区間と考え，$\mathbf{r}(t)$ を時間 t における物体の位置と考えます．すると運動 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に対して，$\mathbf{r}'(t)$ は運動の **速度ベクトル (velocity)**．また，$\mathbf{r}''(t)$ は **加速度ベクトル (acceleration)** となり，それぞれ $\mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t)$ で表わします．つまり，

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t), \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$$

すでに学んだように，接線単位ベクトルは $\hat{\mathbf{t}} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ で表わせるので，速度ベクトルは

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{t}}$$

となります．よって，速度ベクトルは点の軌跡に対して接線方向のベクトルです．速度ベクトル $\mathbf{v}$ の大きさ，$\dfrac{ds}{dt}$ は弧の長さの変化率または速さで v で表わされます．つまり，

$$v = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{ds}{dt}$$

次に加速度についてもう少しよく理解するために，速度ベクトルを考えてみましょう．

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{t}} = v\hat{\mathbf{t}}$$

の両辺を微分すると

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}} + v\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}} + v\|\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt}\|\hat{\mathbf{n}}$$

ここで

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$$

より

$$\|\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt}\| = \|v\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\| = v\|\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\| = v\kappa$$

これより

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}} + v^2\kappa\hat{\mathbf{n}} \\ &= a_{\hat{\mathbf{t}}} + a_{\hat{\mathbf{n}}}\end{aligned}$$

これが加速度の接線方向と法線方向への分解です．つまり

$$a_{\hat{\mathbf{t}}} = (\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}}, a_{\hat{\mathbf{n}}} = (\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$$

例題 5.10

$$\mathbf{r}(t) = (\cos\pi t, \sin\pi t, t)$$

$t = 1$ のとき $\mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t), v, \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}$ を求めてみましょう．

解

$$\mathbf{r}(t) = (\cos\pi t, \sin\pi t, t)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-\pi\sin\pi t, \pi\cos\pi t, 1)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = (-\pi^2\cos\pi t, -\pi^2\sin\pi t, 0)$$

より $t = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(1) &= (0, \pi, 1) \\ \mathbf{a}(1) &= (\pi^2, 0, 0)\end{aligned}$$

となるので

$$v = \|\mathbf{v}(1)\| = \sqrt{\pi^2 + 1}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v}(1)}{\|\mathbf{v}(1)\|} = \frac{(0, \pi, 1)}{\sqrt{\pi^2 + 1}}$$

ここで $\hat{\mathbf{n}}$ を求めるには色々な方法があります．ここでは計算が簡単な方法を考えます．

$$\mathbf{a} = a_{\hat{\mathbf{t}}} + a_{\hat{\mathbf{n}}}, a_{\hat{\mathbf{t}}} = (\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}} = 0$$

より

$$a_{\hat{\mathbf{n}}} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{t}}} = (\pi^2, 0, 0)$$

したがって，

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{a_{\hat{\mathbf{n}}}}{\|a_{\hat{\mathbf{n}}}\|} = (1, 0, 0).$$

他にも

$$v = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{\pi^2 \sin^2 \pi t + \pi^2 \cos^2 \pi t + 1} = \sqrt{\pi^2 + 1} \text{より}$$

$$a_{\hat{\mathbf{t}}} = \frac{dv}{dt} = 0$$

よって $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{a_{\hat{\mathbf{n}}}}{\|a_{\hat{\mathbf{n}}}\|} = (1, 0, 0)$ と求めることができます．■

接線単位ベクトル $\hat{\mathbf{t}}$，主法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ と直交するベクトル

$$\mathbf{b} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

を **従法線単位ベクトル (binormal unit vector)** といいます．また，

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \hat{\mathbf{n}}$$

を満たす τ を**ねじれ率 (torsion)** といいます．

ここで，これまでにでてきた 3 つの単位ベクトル $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$ について調べてみましょう．図 5.2 参照．

まず，$\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$ は互いに直交するベクトルです．また，これらのベクトルの間には Frenet-Serret (1819-1885) によって示された次の関係が成り立ちます．

定理 5.3

[Frenet-Serret]

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}}, \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -\kappa \hat{\mathbf{t}} + \tau \hat{\mathbf{b}}, \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \hat{\mathbf{n}}$$

証明 式 5.1 より $\dfrac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}}$ また，ねじれ率の定義より $\dfrac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \hat{\mathbf{n}}$．次に．$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}}$ を s で微分すると

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \times \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{b}} \times \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \tau \hat{\mathbf{b}} - \kappa \hat{\mathbf{t}} \ \blacksquare$$

例題 5.11

曲線 $\mathbf{r} = \left(2a(\sin^{-1} t + t\sqrt{1-t^2}), 2at^2, 4at\right)$ について，次のものを求めよう． ただし，a は任意の正の定数とする．

(a) $t_1 \leq t \leq t_2$ に対する弧長

(b) 接線単位ベクトル $\hat{\mathbf{t}}$

(c) 主法線単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ と 曲率 κ

(d) 従法線単位ベクトル $\hat{\mathbf{b}}$ とねじれ率 τ

解 (a) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (4a\sqrt{1-t^2}, 4at, 4a)$ より

$$\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\| = \sqrt{16a^2(1-t^2)+16a^2t^2+16a^2} = \sqrt{32a^2} = 4\sqrt{2}a$$

したがって，

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\| dt = 4\sqrt{2}a(t_2 - t_1)$$

(b)

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{(4a\sqrt{1-t^2}, 4at, 4a)}{4\sqrt{2}a}$$

(c) $\dfrac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, 1, 0\right), \dfrac{ds}{dt} = 4\sqrt{2}a$ より

$$\kappa = \|\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\| = \|\frac{d\hat{\mathbf{t}}/dt}{ds/dt}\| = \frac{1}{8a}\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2}+1} = \frac{1}{8a\sqrt{1-t^2}}$$

また，$\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$ より

$$\hat{\mathbf{n}} = (-t, \sqrt{1-t^2}, 0)$$

(d)

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \sqrt{1-t^2} & t & 1 \\ -t & \sqrt{1-t^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{1-t^2}, -t, 1)$$

また，

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{b}}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{8a}\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, -1, 0\right) = -\tau\hat{\mathbf{n}}$$

より $\tau = \dfrac{1}{8a\sqrt{1-t^2}}$ ■

演習問題

1.　次のベクトル値関数で与えられる点運動に対して $t=1$ のとき $\mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t), v, \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}$ を求めよう．

(a) $\mathbf{r}(t) = (a\cos\pi t + bt^2, a\sin\pi t - bt^2)$

(b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t)$　　(c) $\mathbf{r}(t) = (2, t^2, (t-1)^2)$

2.　次の曲線について，$\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$，曲率 κ，ねじれ率 τ を求めよう．

(a) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, \dfrac{2}{3}t^3)$　　(b) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

第 6 章

偏微分法 (PARTIAL DIFFERENTIATION)

6.1 関数の定義 (definition of functions)

平面 R^2 の部分集合 D に属する各点 $\mathbf{x} = (x, y)$ に対して，実数 z が 1 つ定まるような規則 f を D から $\mathcal{R}$ への 2 変数関数といい， $f : D \subset R^2 \to R$ または $z = f(x, y)$ で表わします．このとき x, y を独立変数， z を従属変数といいます．またこのような D を関数 f の **定義域 (domain)** といい $D(f)$ で表わします．つまり，

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : f(x, y) \in \mathcal{R}\}$$

また， $f(x, y)$ を (x, y) の **像 (image)** といい，その集合は **値域 (range)** といい $R(f)$ で表わします．つまり，

$$R(f) = \{z \in \mathcal{R} : z = f(x, y), (x, y) \in D(f)\}$$

(x, y) の像 $f(x, y)$ を空間上に描いたものを関数 f の **グラフ (graph)** といい， $G(f)$ で表わします．つまり，

$$G(f) = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D(f)\}$$

よって 2 変数関数のグラフは曲面を表わします．

例題 6.1

$z = f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ の定義域を求め， $z = f(x, y)$ のグラフを描いてみましょう．
解 まず，定義域は

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \in \mathcal{R}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

となります．

$z = f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ のグラフは次のように描きます．まず， $x = 0$ とおくと $z = \sqrt{1-y^2}$ となり， yz 平面上でのグラフを得ます．次に， $y = 0$ とおくと $z = \sqrt{1-x^2}$ となり， xz 平面上でのグラフを得ます．最後に， $z = c$ とおくと $x^2+y^2 = 1-c^2$ となり，平面 $z = c$ 上でのグラフを得ます．この平面 $z = c$ 上のグラフを **等高線 (level curve)** といいます．これらの情報よりク

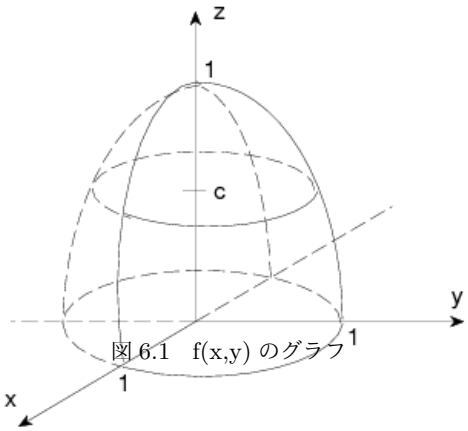


図 6.1　f(x,y) のグラフ

ただ，一般に 2 変数関数のグラフは難しすぎて，描けないことがしばしばあります．これが 3 変数関数 $w = f(x,y,z)$ となると，グラフを描くには 4 次元の空間が必要となるため描けません．そこで 3 変数関数はどんな行動をとるのか，**等位面 (level surface)** とよばれるものをもちいて調べます．等位面とは

$$f(x,y,z) = c \ (c : \text{定数})$$

を満たす点 (x,y,z) の集まりのことです．つまり

$$c : \{(x,y,z) : f(x,y,z) = c\}$$

このとき，この等位面を等位 c の等位面といいます．等高線でも同じことがいえます．

$$c : \{(x,y) : f(x,y) = c\}$$

で等高線が与えられるとき，この等高線を高度 c の等高線といいます．

2 次曲面 1 変数の関数は xy 平面を用いて表しましたが，2 変数の関数は xyz 空間を用いて表わすことを学びました．そこで，ここでは，次の 2 次式で表される曲面について分類します．

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Hx + Iy + Jz + K = 0.$$

適当な変数変換により，非退化な 2 次式は次の 9 個の型に分類されます．ここで，退化な 2 次式とは，$1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ や $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ のように，式を満たす点が無い場合や 1 点しか無い場合をいいます．

1. 楕円面 (ellipsoid) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
2. 1 葉双曲面 (hyperboloid of one sheet) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

3. 2 葉双曲面 (hyperboloid of two sheet) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
4. 2 次錐面 (quadric cone) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$
5. 楕円放物面 (elliptic paraboloid) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$
6. 双曲放物面 (hyperbolic paraboloid) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$
7. 放物柱 (parabolic cylinder) $x^2=4cy$
8. 楕円柱 (elliptic cylinder) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
9. 双曲柱 (hyperbolic cylinder) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

確認問題

1.　次の関数の定義域と値域を求めよう.

(a) $f(x,y)=\sqrt{xy}$　(b) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$　(c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$　(e) $f(x,y)=\log(1-xy)$　(f) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2-y^2}$

2.　次の曲面を分類しよう.

(a) $x^2+4y^2-16z^2=0$　(b) $x^2+4y^2+16z^2-12=0$　(c) $x-4y^2=0$

(d) $x^2-4y^2-2z=0$　(e) $2x^2+4y^2-1=0$　(f) $x^2+4y^2-4z=0$

(g) $2x^2-4y^2-6=0$　(h) $x^2+y^2-2z^2-10=0$　(i) $x^2+y^2-2z^2+10=0$

演習問題

1.　次の関数の定義域をもとめそのグラフを描こう.

(a) $f(x,y)=x^2-y^2$　(b) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$　(c) $f(x,y)=\log(1-xy)$

6.2　偏導関数 (partial derivatives)

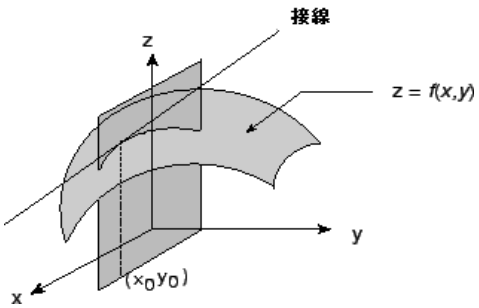


図 6.2　z = f(x,y)

$z = f(\mathbf{x}) = f(x, y)$ について点 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ で次のような極限を考えます．$y = y_0$ を一定にして， x の関数 $f(x, y_0)$ が $x = x_0$ で微分可能なとき，つまり

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

が存在するとき， $f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で x に関して**偏微分可能 (partially differentiable)** であるといいます．また，この極限値を x に関する偏微分係数といい， $f_x(x_0, y_0)$ で表わします．y の代わりに x を一定にして考えると，上と同じようにして， y に関しての偏微分可能性，偏微分係数が定義されます．また，集合 D の各点で x, y に関して偏微分可能のとき $f(x, y)$ は D で偏微分可能であるといいます．

例題 6.2

$f(x, y) = x^2 + y^2$ の偏微分係数 $f_x(1, 1)$ を求めてみましょう．

解

$$f_x(1,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h, 1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = 2 \blacksquare$$

D の各点 $\mathbf{x} = (x, y)$ に，その点における x に関する偏微分係数を対応させることにより得られる関数を $f(\mathbf{x})$ の x に関する**偏導関数 (partial derivative)** といい，

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

で表わします．同様に y に関する偏導関数を

$$f_y(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

で表わします．偏導関数を求めることを **偏微分 (partial differentiation)** するといいます．

例題 6.3

次の関数を偏微分してみましょう．

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^3,\ g(x, y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

解 $f_x(x, y)$ を求めるには， y を定数と考えて， $f(x, y)$ を x について微分します．

$$f_x(x, y) = 2x + 2y$$

また，x を定数と考えて y について微分すると

$$f_y(x, y) = 2x + 9y^2$$

同様にして，

$$g_x(x, y) = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$g_y(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \blacksquare$$

これから分かるように 1 変数の導関数が求められれば，何の問題もなく 2 変数の偏導関数が求められます．

偏導関数 f_x, f_y がさらに偏微分可能なとき，それらの偏導関数を **第 2 次偏導関数 (2nd partial derivatives)** といい，

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

などで表わします．

例題 6.4

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ のとき $f_x(0,0), f_y(0,0)$ を求め，$(0,0)$ で偏微分可能か調べてみましょう．

解を見る前にある学生の解答をみてみましょう．

$f_x(0,0)$ を求めればよいので，まず，$f_x(x,y)$ を求めます．

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$$

ここで $(0,0)$ を代入すると

$$f_x(0,0) = \frac{0}{0}$$

となるので偏微分不可能．

残念ながら，この学生の解答は正解ではありません (なぜでしょう?)．正解をみてみましょう．

解 $f(x,0) = 0$，$f(0,y) = 0$ より $f_x(x,0) = 0$，$f_y(0,y) = 0$ となるので，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で偏微分可能となります．$\blacksquare$

2 次以上の偏導関数を高次偏導関数といいます．高次偏導関数では，微分する順序に注意しなければならないことがあります．つまり，関数 $f(x,y)$ について常に $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つとは限りません．次の例題は $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ を示すのに，よく用いられる例題です．

例題 6.5

$f(x,y)=\begin{cases}(xy)\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ のとき，$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ を示してみましょう．

解

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}(hy)\frac{h^2-y^2}{h(h^2+y^2)}=-y$$

より $f_{xy}(0,0)=-1$. 次に，

$$f_y(x,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=\lim_{k\to 0}(xk)\frac{x^2-k^2}{k(x^2+k^2)}=x$$

より $f_{yx}(0,0)=1$.　■

このように f_{xy} と f_{yx} はいつも等しいとは限りません．そこで $f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つための十分条件 (この条件のもとなら必ず成り立つという条件) を述べておきます．その前に，ちょっと準備をします．

定義 6.1

関数 $f(x,y)$ が領域 D で第 n 次までの偏導関数をもち，かつそれらがすべて連続なとき，$f(x,y)$ は D で C^n 級であるといいます．

準備ができたので，$f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つための十分条件を示してみましょう．

定理 6.1

関数 $f(x,y)$ が領域 D で C^2 級であるならば，$f_{xy}=f_{yx}$ である．

証明 偏導関数の定義と平均値の定理をつかって証明できるので，各自に任せる．

確認問題

1. 次の関数の偏導関数を求めよう．

(a) $f(x,y)=3x^2-xy+y$　(b) $f(x,y)=x^2e^{-y}$　(c) $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$

(d) $z=x\sin y$　(e) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$

2. 次の関数の第 2 次までの偏導関数をすべて求めよう．

(a) $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$　(b) $f(x,y,z)=(x+y^2+z^3)^2$

(c) $f(x,y)=\sin(3x-2y)$　(d) $f(x,y)=xe^{2y}$

演習問題

1. 次の関数を偏微分しよう．

(a) $z=x^3+xy^2+y^3$　(b) $z=e^x\sin y$　(c) $z=\log(x^2+y^2)$

2. 次の関数の第 2 次までの偏導関数をすべて求めよう．

(a) $z=x^3y+xy^2$　(b) $z=xy^2e^{\frac{x}{y}}$

(c) $z=\tan^{-1}(x^2+y^2)$

3. 次の関数は原点で偏微分可能か調べよう．

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \log(1+xy+y^2)$

6.3 関数の極限 (limit of function)

関数 $z = f(\mathbf{x})$ において， $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ のとき， $f(\mathbf{x}) \to l$ ならば， l を $\mathbf{x}$ が $\mathbf{x}_0$ に近づくときの $f(\mathbf{x})$ の極限値といい，

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$$

で表わします．

1 変数のときと違い $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ を満たす近づき方は無限にあります．上の定義は $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ を満たすすべての近づき方に対して， $f(\mathbf{x}) \to l$ であるといっているのです．

定義 6.2

任意の正の数 ε に対して， $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ のとき， $|f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$ が成り立つように正の数 δ が選べるなら

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$$

である．

この定義にでてきた $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ は 2 変数のときは $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ と表わされ，半径 δ の円の中心 (x_0, y_0) を除いた部分であることがわかります．このような集合を点 $\mathbf{x}_0$ の δ 近傍といい， $N_\delta(\mathbf{x}_0)$ で表わします．

ここで，平面上の点についての理解を深めておきます． $\mathcal{R}^2$ のある部分集合を D とします．このとき平面上の点 $\mathbf{a}$ は次の 3 種類に分類されます．

(1) $\mathbf{a} \in D$ に対し，

$$\mathbf{a} \in N_\delta(\mathbf{a}) \subset D$$

となる $\mathbf{a}$ の δ 近傍が存在するとき， $\mathbf{a}$ は D の **内点 (interior point)** といいます．

(2) $\mathbf{a} \in D$ に対し，

$$\mathbf{a} \in N_\delta(\mathbf{a}) \text{ かつ } N_\delta(\mathbf{a}) \cap D = \phi$$

となる $\mathbf{a}$ の δ 近傍が存在するとき， $\mathbf{a}$ は D の **外点 (exterior point)** といいます．

(3) $\mathbf{a}$ が D の内点でも外点でもないとき，点 $\mathbf{a}$ を D の **境界点 (boundary point)** といいます．

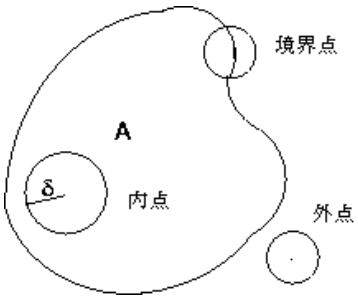


図 6.3　平面上の点

D の境界点すべての集合を D の **境界 (boundary)** といい，∂D で表わします．また，すべての点が D の内点のとき D を **開集合 (open set)** といいます．

例題 6.6

$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ は開集合であることを示してみましょう．
解 $(x_0, y_0) \in D$ を D の任意の点とします．このとき原点と点 (x_0, y_0) までの距離を求めると $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ となります．よって，δ を $\dfrac{1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2}$ より小さくとれば，

$$(x_0, y_0) \in N_\delta(x_0, y_0) \subset D$$

が成り立ちます．よって，集合 D は開集合となります．■

また，集合 D の補集合 $\sim D$ が開集合のとき D を **閉集合 (closed set)** といいます．D にその境界 ∂D を付加してできる集合を **閉包 (closure)** といい，$\overline{D}$ で表わします．

集合 D に属するどの 2 点も，D の中だけを通る連続曲線で結ぶことができるとき，D を **連結 (connected)** な集合といいます．また，連結な開集合を **領域 (region)** といいます．領域 D の閉包 $\overline{D}$ を **閉領域 (closed region)** といいます．

集合 D が半径 r の開円板 $\{x : |x| < r\}$ に含まれるとき，集合 D は **有界 (bounded)** であるといいます．

例題 6.7

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

の境界と閉領域を求め，有界な領域か調べてみましょう．
解 境界は

$$\partial D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

で閉領域 $\overline{D}$ は

$$\overline{D} = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

となります．また， $r = 2$ とおくと， $D \subset \{x : |x| < 2\}$ となるので， D は有界です．最後に D に属するどの 2 点も半径 1 の円の中にあるので，直線 (連続曲線) で結ぶことができます．よって領域となります． ■

例題 6.8

$$D = \{(x, y) \in R^2 : y \neq 0\}$$

は有界でもなく，また領域でもないことを示してみましょう．

解 D は平面から x 軸を除いた点の集合です．よって，どんな半径の開円板をとっても D を含むことができません．また，上半平面と下半平面から，1 点ずつとると，この 2 点はどんな連続曲線でも結ぶことができません．よって領域ではありません． ■

集合上での点についてはこのくらいにして，話を関数の極限にもどします．まず例として次の極限値の問題を考えてみましょう．

例題 6.9

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

を求めてみましょう．

解 $(x, y) \to (0, 0)$ のとき， $x^2 + y^2 \to 0, x^2 y \to 0$ となります．では，どちらが速く 0 に近づくのでしょうか．それを調べるために，分母のそれぞれの項の中で最小な次数と分子のそれぞれの項の中で最小な次数とを比較します (なぜなら，次数が大きいほど速く 0 に近づきます)．この場合は，分子の項の最小次数は 3 で，分母の項の最小次数は 2 です．このように分子の項の最小次数 $>$ 分母の項の最小次数のときは，平面上の任意の点 (x, y) を

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

とおくと，

$$0 \leq |\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}| = |\frac{r^3 \cos^2\theta \sin\theta}{r^2}| \leq |r|$$

となり，任意の点 (x, y) がどのように $(0, 0)$ に近づいても，原点と点 $(0, 0)$ の距離 $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$ は 0 に近づくので， $(x, y) \to (0, 0)$ と $|r| \to 0$ は同値です．よって，はさみうちの定理より，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}| = 0$$

したがって，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

となります． ■

もう 1 つ極限値の問題を解いてみましょう．

例題 6.10

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

を求めてみましょう．

解 この例では分子の項の最小次数 = 分母の項の最小次数となります．ここで， $y = mx$ とおくと，

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \ (x \neq 0)$$

したがって，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

この値は m の値によって，つまり， (x,y) が $(0,0)$ に近づく経路によって異なります．よって上の定義より $(x,y) \to (0,0)$ のとき極限値は存在しません． ■

1 変数のときと同様，

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

が成り立つとき， $f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ で連続であるといいます．また，ある集合 D の各点で連続のとき， $f(\mathbf{x})$ は D で連続であるといいます．

例題 6.11

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

の $(0,0)$ における連続性を調べてみましょう．

解 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ が成り立つか調べればよいでしょう．分子の項の最小次数 > 分母の項の最小次数より， $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，

$$|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| = |\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}| \leq |r| \longrightarrow 0 \quad (r \to 0)$$

したがって， $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. また， $f(0,0) = 0$ より， $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることがわかります． ■

確認問題

1. 次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y+1}{x+y-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-3y}{x+y}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$

2. 次の関数の $(0,0)$ における連続性を調べよう．

(a) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$ (b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

演習問題

1. 次の集合は開集合，閉集合，有界な集合，連結な集合，または，領域か調べ，境界と閉包を求めよう．

(a) $D=\{(x,y):0<x^2+y^2<1\}$ (b) $D=\{(x,y):xy\leq 0\}$

2. $(x,y)\to(0,0)$ のとき，次の関数の極限値を求めよう．

(a) $\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$ (b) $\dfrac{xy}{x^2+y^2+y^4}$ (c) $\dfrac{xy}{x^2+y^2+y}$

3. 次の関数の $(0,0)$ における連続性を調べよう．

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}xy\log(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ -1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

6.4 全微分 (total differential)

関数 $z=f(x,y)$ が領域 D で定義されているとします．$\Delta x,\Delta y$ をそれぞれ x,y の増分とするとき，これに対応する z の変動量 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ を z の増分といい， Δz で表わします．ここで， $\mathbf{h}=(\Delta x,\Delta y)$ とおき，

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{g(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=0$$

となる関数 $g(\mathbf{h})$ を $\mathrm{o}(\mathbf{h})$ で表わすとします．このとき，

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\mathbf{h})$$

となる定数 A,B が存在するとき，関数 $f(x,y)$ は点 (x,y) で**全微分可能 (totally differentiable)** であるといいます．ちょっと分りにくいですね．そこで，全微分可能のときどんなことがいえるのか調べてみましょう．

定理 6.2

関数 $f(x,y)$ が点 (x_0,y_0) で全微分可能ならば， $f(x,y)$ は点 (x_0,y_0) で連続かつ偏微分可能であり， $A=f_x(x_0,y_0)$，$B=f_y(x_0,y_0)$ が成り立つ．

証明　点 (x_0, y_0) で全微分可能なとき，

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\mathbf{h}) \tag{6.1}$$

となる定数 A, B が存在する．よって

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

これより，$f(x,y)$ は点 (x_0, y_0) で連続．次に，式 6.1 で $\Delta y = 0$ とおくと，

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

これより，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}) = A$$

となり，$f(x,y)$ は点 (x_0, y_0) で x について偏微分可能で，$A = f_x(x_0, y_0)$ である．同様にして，$\Delta x = 0$ のときを考えることにより，$f(x,y)$ は点 (x_0, y_0) で y について偏微分可能で，$B = f_y(x_0, y_0)$ を得る．■

例題 6.12

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ は全微分可能か調べてみましょう．

解 例題 6.2 より $f(x,y)$ は $(0,0)$ で偏微分可能となりますが，例題 6.3 より $(0,0)$ で連続ではありません．よって定理 6.4 より $f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能ではありません．■

この例題からも分かるように，偏微分可能であることは全微分可能であることの十分条件ではありません．何が足りないのか考えてみましょう．

$f(x,y) \in C^1$ 級 ならばどうでしょうか．$f(x,y) \in C^1$ 級 とすると

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= \Delta x f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) + \Delta y f_y(x, y+\theta_2\Delta y),\ (0<\theta_1, \theta_2<1)\end{aligned}$$

ここで $f_x(x,y)$ は連続なので，

$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) + \varepsilon_1(\mathbf{h})$$

ただし，$\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ のとき $\varepsilon_1(\mathbf{h})\to 0$．同様に，$f_y(x,y)$ も連続なので，

$$f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y) + \varepsilon_2(\mathbf{h})$$

ただし，$\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ のとき $\varepsilon_2(\mathbf{h})\to 0$．よって，

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= [f_x(x,y) + \varepsilon_1(\mathbf{h})]\Delta x + [f_y(x,y) + \varepsilon_2(\mathbf{h})]\Delta y \\ &= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1(\mathbf{h})\Delta x + \varepsilon_2(\mathbf{h})\Delta y\end{aligned}$$

次に，$\varepsilon_1(\mathbf{h})\Delta x + \varepsilon_2(\mathbf{h})\Delta y = o(\mathbf{h})$ を示しましょう．

$$|\varepsilon_1(\mathbf{h})\Delta x + \varepsilon_2(\mathbf{h})\Delta y| = |(\varepsilon_1(\mathbf{h}), \varepsilon_2(\mathbf{h})) \cdot \mathbf{h}|$$

と表わせ，Schwarz の不等式よりベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ の間に

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{b}\|$$

が成り立ちます．よって

$$\begin{aligned} |(\varepsilon_1(\mathbf{h}), \varepsilon_2(\mathbf{h})) \cdot \mathbf{h}| &\leq \|(\varepsilon_1(\mathbf{h}), \varepsilon_2(\mathbf{h}))\|\|\mathbf{h}\| \\ &\leq [|\varepsilon_1(\mathbf{h})| + |\varepsilon_2(\mathbf{h})|]\|\mathbf{h}\| = o(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

このことより，次の定理を得ます．

定理 6.3

$f(x, y)$ が (x, y) の近傍で C^1 級 ならば，$f(x, y)$ は (x, y) で全微分可能である．

$f(x, y)$ が全微分可能なとき，$f_x\Delta x + f_y\Delta y$ は Δz の主要な部分とみなせるので，これを点 (x, y) における関数 $z = f(x, y)$ の **全微分 (total differential)** といい dz または df で表わします．つまり

$$df = f_x\Delta x + f_y\Delta y$$

ここで $f(x, y) = x$ および $f(x, y) = y$ を考えることにより，$\Delta x = dx, \Delta y = dy$ とおけるので

$$df = f_x dx + f_y dy$$

と表わすことができます．このとき，ベクトル $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ を f の **勾配 (gradient)** といい，$\nabla f(x, y)$ で表わします．つまり

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

したがって，全微分 df は ∇f を用いて次のように表わすことができます．

$$df = \nabla f \cdot (dx, dy) \ (\cdot \text{ は内積})$$

ここにでてきたベクトル $\nabla f(x, y)$ は 2 変数のベクトル関数となり，**ベクトル場 (vector field)** といいます．

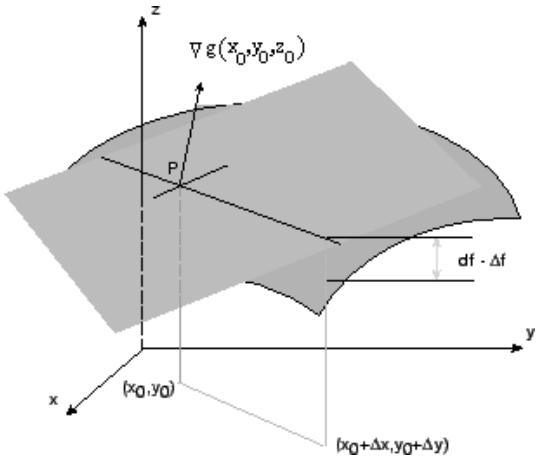


図 6.4　全微分

次に，点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ を通り法線ベクトルが $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$ であたえられる平面を考えます．このとき，平面上の任意の点 (x, y, z) と点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ が作るベクトルと法線ベクトルは直交します．したがって，

$$(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \cdot (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) = 0$$

これより，平面の方程式は，

$$z - f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

で与えられるので，点 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ に対応する z は

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

となり，$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ の近似となります．このような平面を，**接平面 (tangent plane)** といいます．また，法線ベクトルは $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$ で与えられます．

例題 6.13

$z = f(x, y) = 3x + xy + 2y$ の点 $(1, 1, 6)$ における接平面と法線を求めてみましょう．
解 $\nabla f(x, y) = (3 + y, x + 2)$ より $\nabla f(1, 1) = (4, 3)$．これより接平面の方程式は

$$z - f(1, 1) = (4, 3) \cdot (x - 1, y - 1)$$

より $z = 4x + 3y - 1$．また，法線は

$$(x, y, z) - (1, 1, 6) = t(4, 3, -1) \text{ または } t = \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-6}{-1} \quad \blacksquare$$

接平面については 8 章で詳しく学びます．

例題 6.14

$f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ の全微分と ∇f を求めてみましょう．

解

$$\begin{aligned} df &= f_x dx + f_y dy \\ &= \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy \end{aligned}$$

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}) \blacksquare$$

例題 6.15

全微分を用いて， $\sqrt{27}\sqrt[3]{1021}$ を近似してみましょう．

解 電卓，コンピュータソフトを用いれば，簡単に近似できますが，手もとにそういう道具がないときはこんなふうにして求めます．まず，関数 $f(x,y)=\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ を考えます．このとき， $x=25, y=1000$ ならば， $f(25,1000)=50$ と求めることができます．そこで，$\Delta x=2, \Delta y=21$ とおくと，求める値は $f(25+\Delta x, 1000+\Delta y)$ となります．ここで，

$$\Delta f = f(25+\Delta x, 1000+\Delta y) - f(25,1000)$$

であることを思い出してもらうと，求める値は

$$f(25+\Delta x, 1000+\Delta y) = \Delta f + f(25,1000)$$

ところが， $\Delta f \approx df$ なので，

$$f(25+\Delta x, 1000+\Delta y) \approx df + f(25,1000)$$

と表わせます．あとは $df = f_x\Delta x + f_y\Delta y$ より

$$df = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/3}\Delta x + \frac{1}{3}x^{1/2}y^{-2/3}\Delta y$$

よって $x=25, y=1000, \Delta x=2, \Delta y=21$ のとき，

$$df = (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 10)2 + (\frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{1}{100})21 = 2.35$$

これより，

$$\sqrt{27}\sqrt[3]{1021} \approx \sqrt{25}\sqrt[3]{1000} + 2.35 = 52.35$$

となります．実際 $\sqrt{27}\sqrt[3]{1021}$ を Mathematica を用いて求めると 52.32 となります． $\blacksquare$

確認問題

1.　次の関数の gradient と全微分を求めよう．

(a) $f(x,y)=x^3+y^2$　(b) $f(x,y)=3x^2-xy+y$　(c) $z=x^2y^{-2}$　(d) $z=x^2y$

(e) $z=e^x\cos y$

2. 次の条件を満たす接平面および法線の方程式を求めよう．

(a) 点 $(1,1,1)$ を通り，法線ベクトルが $(3,2,-1)$

(b) 点 $(2,1,1)$ における曲面 $z=xy$

(c) 点 $(1,1,4)$ における曲面 $z=x^2+xy+2y^2$

演習問題

1. 次の関数の全微分および gradient を求めよう．また，点 $(1,1)$ に対応する点を通る接平面と法線を求めよう．

(a) $f(x,y)=x^3y^4$　(b) $f(x,y)=x^3y+x^2y^4$　(c) $z=x^2ye^{2x}$　(d) $z=\cos xy$

2. 全微分を用いて，次の値を近似してみよう．

(a) $\sqrt{125}\sqrt[4]{17}$　(b) $\sin(\frac{6\pi}{7})\cos(\frac{\pi}{3})$

6.5 gradient と方向微分 (grad and directional derivatives)

$\nabla f(x,y)$ は 1 変数のときの導関数と同じような性質を持っています．例えば，$\nabla f(x,y)$ と $\nabla g(x,y)$ がともに存在するとき，$\nabla[f(x,y)+g(x,y)]$, $\nabla[\alpha f(x,y)]$, $\nabla[f(x,y)g(x,y)]$ も存在し，

$$\begin{aligned}\nabla[f(x,y)+g(x,y)] &= \nabla f(x,y)+\nabla g(x,y)\\ \nabla[\alpha f(x,y)] &= \alpha\nabla f(x,y)\\ \nabla[f(x,y)g(x,y)] &= f(x,y)\nabla g(x,y)+g(x,y)\nabla f(x,y)\end{aligned}$$

となります．

ここでもう一度偏導関数の定義をみましょう．$\mathbf{x}=(x,y), \hat{\mathbf{i}}=(1,0), \hat{\mathbf{j}}=(0,1)$ とおくと，

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+h\hat{\mathbf{i}})-f(\mathbf{x})}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+h\hat{\mathbf{j}})-f(\mathbf{x})}{h}\end{aligned}$$

これから分かるように，偏導関数 f_x, f_y は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+h\hat{\mathbf{u}})-f(\mathbf{x})}{h}$$

の形で与えられます．ここで $\hat{\mathbf{u}}$ は $\hat{\mathbf{i}}$ や $\hat{\mathbf{j}}$ でなければならない理由はありません．そこで $\hat{\mathbf{u}}$ を任意の単位ベクトルとしたとき，**方向微分 (directional derivative)** とよばれるものが定義されます．

定義 6.3

[方向微分] $\hat{\mathbf{u}}$ を単位ベクトルとする．次の極限値が存在するとき，その極限値を $\mathbf{x}$ における $\hat{\mathbf{u}}$ 方向への f の方向微分という．

$$f'_{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial u} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

$\hat{\mathbf{u}}$ は単位ベクトルより $\hat{\mathbf{u}} = (\cos\theta, \sin\theta)$ とおくこともできます．ただし θ は x 軸の正方向と $\hat{\mathbf{u}}$ のなす角です．

方向微分と gradient の間には次の定理で与えられるように密接な関係があります．

定理 6.4

f が $\mathbf{x}$ で 全微分可能ならば

$$f'_{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

証明 f が $\mathbf{x}$ で全微分可能より $\nabla f(\mathbf{x})$ が存在し，

$$f(\mathbf{x} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot h\hat{\mathbf{u}} + o(h\hat{\mathbf{u}})$$

となる．両辺を h で割ると，

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{x})}{h} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{o(h\hat{\mathbf{u}})}{h}$$

ここで

$$|\frac{o(h\hat{\mathbf{u}})}{h}| = \frac{|o(h\hat{\mathbf{u}})|}{|h|} = \frac{|o(h\hat{\mathbf{u}})|}{|h\hat{\mathbf{u}}|} \to 0$$

より

$$\frac{o(h\hat{\mathbf{u}})}{h} \to 0$$

よって，

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{x})}{h} \to \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \ \blacksquare$$

ここで $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \, \|\hat{\mathbf{u}}\| \cos\theta$ より，方向微分は $\hat{\mathbf{u}}$ の方向が $\nabla f(\mathbf{x})$ と同じ方向になったとき一番大きく， $\nabla f(\mathbf{x})$ と直交したとき 0 になります．これを等高線図 6.5 で考えてみましょう．

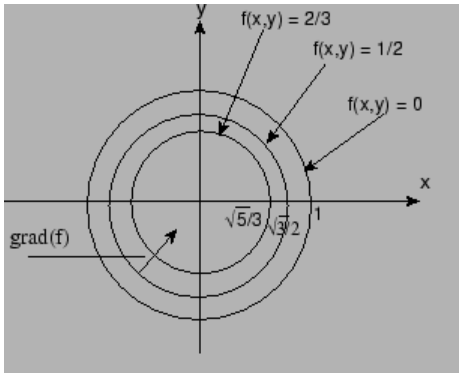


図 6.5　等高線図

$f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ の gradient を計算すると

$$\nabla f(x,y)=(\frac{-x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}},\frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}})$$

つまり gradient は等高線に直交しているベクトルです．そこで方向が gradient と同じならば方向微分は等高線に対して垂直な方向での変化率を求めることになり，確かに変化率が一番大きくなることが分かります．

例題 6.16

点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ で $f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ の $\mathbf{a}=(-1,1)$ 方向への方向微分を求めてみましょう．

解 まず，方向ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ は単位ベクトルでなければならないので，$\hat{\mathbf{u}}$ を求めると，

$$\hat{\mathbf{u}}=\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}$$

また，

$$\begin{aligned}f'_{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x})&=\nabla f(\mathbf{x})\cdot\hat{\mathbf{u}}\\&=\left(\frac{-x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}},\frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\right)\cdot\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}f'_{\hat{\mathbf{u}}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)&=\left(\frac{-1/2}{\sqrt{1/2}},\frac{-1/2}{\sqrt{1/2}}\right)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=\frac{1/2}{-}\frac{1/2}{=}0\end{aligned}$$

となります．■

確認問題

1. 次の関数を $(1,2)$ で $(1,-1)$ の方向に微分しよう．

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$ (b) $f(x,y)=xe^y-ye^x$

2. 次の関数を $(1,0)$ で $\dfrac{\pi}{3}$ 方向に微分しよう．

(a) $f(x,y)=\dfrac{2x}{(x-y)}$ (b) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$

3. 次の関数を $(0,1)$ で $(-1,3)$ 方向に微分しよう．また方向微分が最大になるような方向単位ベクトルを求めよう．

(a) $f(x,y)=(x+1)\log y$ (b) $f(x,y)=(x-1)y^2e^{xy}$

演習問題

1. 次の関数を $(0,0)$ で $(1,\sqrt{3})$ の方向に微分しよう．

(a) $f(x,y)=x^2+x+y$ (b) $f(x,y)=\cos x+\sin y$

2. 次の関数を $(1,-1)$ で $\dfrac{2\pi}{3}$ 方向に微分しよう．

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x-y}$ (b) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$

3. ある金属板の各点における温度は次の式で与えられる．

$$T(x,y)=e^x\cos y+e^y\cos x$$

(a) 点 $(0,0)$ からどの方向に進むと，温度上昇が最も大きいか．また，そのときの温度の変化率を調べよう．

(b) 点 $(0,0)$ からどの方向に進むと，温度下降が最も大きいか．また，そのときの温度の変化率を調べよう．

6.6　合成関数の偏微分法 (differentiation of composite functions)

偏微分の計算において重要な役割を果たす合成関数の微分公式を次にあげます.

定理 6.5

(1)　$z = f(x, y)$ が全微分可能であり，　$x = x(t), y = y(t)$ が微分可能ならば，合成関数 $z = f((x(t), y(t))$ は微分可能であり，次の式が成り立つ.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

(2)　$z = f(x, y)$ が全微分可能であり，　$x = x(r, s), y = y(r, s)$ がともに微分可能ならば，合成関数 $z = f(x(r, s), y(r, s))$ も微分可能であり，次の式が成り立つ.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

定理 6.6(2) の公式を樹形図にして表わすと次の図 6.6 のようになります.

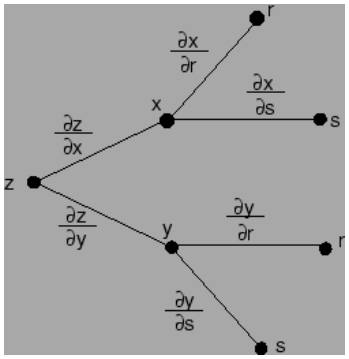


図 6.6　合成関数

証明 (2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \lim_{\Delta r \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \to 0}\{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta r} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta r} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta r}\} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 6.17

上の定理を使って $z = e^{xy^2}, x = t\cos t, y = t\sin t$ を t について微分してみましょう.

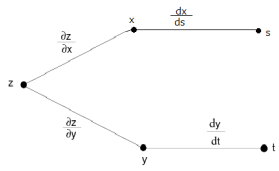


図 6.7　z-x-t, z-y-t

解

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= y^2 e^{xy^2}(\cos t - t\sin t) + 2xye^{xy^2}(\sin t + t\cos t) \ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 6.18

$z = f(x^2y)$ は $x(\dfrac{\partial z}{\partial x}) = 2y(\dfrac{\partial z}{\partial y})$ を満たすことを示してみましょう.

解 $x^2y = u$ とおくと $z = f(u)$ より図 6.8 を得ます.

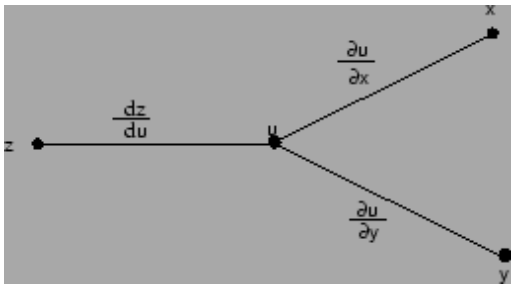


図 6.8　z-u-xy

これより

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)x^2$$

したがって

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)2x^2y = 2y\frac{\partial z}{\partial y} \ \blacksquare$$

確認問題

1. $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよう．ただし， f は C^1 級とする．

(a) $z = x^2 + 2y, x = 2t, y = t^3$　(b) $z = x^2 + y^2, x = \cos t, y = \sin t$

(c) $z = x^2 + xy + 2y^2, x = \cos t, y = \sin t$　(d) $z = x^3y^2, x = t^2, y = t^3$

2. 次の関数について， $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよう．

(a) $z = x^2 + y^2, x = u - 2v,\ y = 2u + v$

(b) $z = x^2 + xy + 2y^2, x = u + v, y = uv$　(c) $f(x, y) = x^2y^2, x = uv, y = v^2$

演習問題

1. $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよう．ただし， f は C^1 級とする．

(a) $z = \log(x^2 + y^2), x = t + \dfrac{1}{t}, y = t(t-1)$　(b) $z = f(t^2, e^t)$

(c) $z = f(2t, 4t^2)$　(d) $z = x^2 - 2y^2, x = \cos t, y = \sin t$

2. 次の関数について， $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよう．

(a) $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}, x = r^3 - 3rs^2,\ y = 3r^2s - s^3$

(b) $z = \log\dfrac{y}{x}, x = (r-1)^2 + s^2, y = (r+1)^2 + s^2$

(c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r\cos s, y = r\sin s, (r > 0)$

3. $z = f(x, y), x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき，次の式が成り立つことを示そう．

$$z_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta,\ z_\theta = r(-z_x\sin\theta + z_y\cos\theta).$$

6.7　2 変数関数の極値 (extreme values)

1 変数の極値については 3 章で学びました．ここでは 2 変数の極値について考えてみます．

定義 6.4

点 (x_0, y_0) の δ 近傍内のすべての点 (x, y) に対して

(1) $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ が成り立つとき，関数 $f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で極小になるといい，$f(x_0, y_0)$ を $f(x, y)$ の **極小値 (local minimum)** という．

(2) $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ が成り立つとき，関数 $f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で極大になるといい，$f(x_0, y_0)$ を $f(x, y)$ の **極大値 (local maximum)** という．また，極小値と極大値を一括して **極値 (extrema)** という．

1 変数のとき関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極値をとれば $f'(x_0)$ が存在し，かつ $f'(x_0) = 0$，または $f'(x_0)$ は存在しないのどちらかでした．2 変数でも同じようなことがいえるか考えてみましょう．

定理 6.6

$f(x, y)$ が (x_0, y_0) で極値をとれば，次のどちらかが成り立つ．

$$\nabla f(x_0, y_0) \text{ が存在し，かつ } \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)\text{，または } \nabla f(x_0, y_0) \text{ は存在しない}$$

証明 x だけの関数 $f(x, y_0)$ は $x = x_0$ で極値をとるから， $f_x(x_0, y_0) = 0$ または $f_x(x_0, y_0)$ は存在しない． 同様に $f_y(x_0, y_0) = 0$ または $f_y(x_0, y_0)$ は存在しない． ■

例題 6.19

ここで次の関数の極値について調べてみましょう．

$$f(x, y) = x^2 + xy + 3y^2 + x + y$$

解 $f(x, y)$ が (x_0, y_0) で極値をとるとすれば

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ したがって } 2x_0 + y_0 + 1 = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0 \text{ したがって } x_0 + 6y_0 + 1 = 0$$

これを x_0, y_0 について解くと

$$x_0 = -\frac{5}{11},\ y_0 = -\frac{1}{11}$$

つまり $f(x, y)$ は点 $(-\frac{5}{11}, -\frac{1}{11})$ で極値をとる可能性があることが分かりました．しかし，これが極小値なのか極大値なのかさらに調べてみなければなりません． ■

そこで，2 変数の関数の極値の判定には次の定理があります．

定理 6.7

ある領域 D で $f(\mathbf{x})$ は C^2 級とする．領域 D 内の点 $\mathbf{x}_0$ で $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ であるとき，

$$f_{xx}(\mathbf{x}_0) = A, f_{xy}(\mathbf{x}_0) = B, f_{yy}(\mathbf{x}_0) = C, \Delta = AC - B^2$$

とおくと次のことが成り立つ．

(1) $\Delta > 0, A > 0$ ならば　$f(\mathbf{x}_0)$ は極小値である

(2) $\Delta > 0, A < 0$ ならば　$f(\mathbf{x}_0)$ は極大値である

(3) $\Delta < 0$ ならば　$f(\mathbf{x}_0)$ は極値でない

この定理を証明するのに 2 変数関数の Taylor の定理を用います．

定理 6.8

[2 変数の Taylor の定理] $z = f(x, y)$ が点 (x_0, y_0) の近傍で C^n 級ならば，この近傍内にある $(x_0 + h, y_0 + k)$ に対して，

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) &+ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x_0, y_0) + R_n \end{aligned}$$

ただし，

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \ (0 < \theta < 1)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x, y) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-1} f(x, y), \quad m = 2, 3, \cdots$$

Taylor の定理で $(x_0, y_0) = (0, 0)$ のとき，マクローリンの定理といいます．

証明 $F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ $(0 \le t \le 1)$ とおくと， $F(t)$ は t の C^n 級関数であるから，1 変数関数の Taylor の定理より

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta t) \ (0 < \theta < 1)$$

となる．ここで $x = x_0 + ht, y = y_0 + kt$ とおくと

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) \end{aligned}$$

したがって，

$$F^{(m)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x, y), \quad m = 1, 2, \ldots$$

を示せばよい．そこで数学的帰納法を用いる．$m = 1$ はすでに成り立つので， $m - 1$ まで成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} F^{(m)}(t) &= \frac{d}{dt}F^{(m-1)}(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-1} f(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-1} f(x, y)\frac{dy}{dt} \\ &= h\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-1} f(x, y) + k\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-1} f(x, y) \\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x, y) \end{aligned}$$

が成り立つ．■

やっと 2 変数の極値に関する定理の証明ができます．

証明 Taylor の定理より，$(x_0+h, y_0+k) \in D$ に対して

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0+y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}[h^2 f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + 2hkf_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \\ &\quad + k^2 f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k),\ (0<\theta<1) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $Q = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ とおくと，$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ より

$$Q = \frac{1}{2}[h^2 f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + 2hkf_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k^2 f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)]$$

次に，$a = f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k), b = f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k), c = f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$ とおくと，$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ の符号は $ah^2+2bhk+ck^2$ の符号によってきまる．ここで

$$Q = \frac{1}{2}\left(ah^2+2bhk+ck^2\right) = \frac{a}{2}\left[(h+\frac{bk}{a})^2 + \frac{(ac-b^2)k^2}{a^2}\right]$$

に注意しておく．

$\Delta = AC - B^2 > 0, f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ のときは，$f(x, y)$ が C^2 級の関数であるから $|h|, |k|$ が十分に小さく，しかも同時に 0 とならないならば，どのような h, k をとっても

$$ac - b^2 > 0, a > 0 \text{ となるので，} Q = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) > 0$$

よって $f(x_0, y_0)$ は極小値となる．

$\Delta = AC - B^2 > 0, f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ のときは，$f(x, y)$ が C^2 級の関数であるから $|h|, |k|$ が十分に小さく，しかも同時に 0 とならないならば，どのような h, k をとっても

$$ac - b^2 > 0, a < 0 \text{ となるので，} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) < 0$$

よって $f(x_0, y_0)$ は極大値となる．

次に $\Delta = AC - B^2 < 0$ の場合を考える．もし $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$ ならば $ac - b^2 < 0, a \neq 0$ とできるが，

$h = r\cos t, k = r\sin t$ とおくと，$\cos t \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} Q &= ah^2+2bhk+ck^2 = r^2[a\cos^2 t + 2b\cos t\sin t + c\sin^2 t] \\ &= r^2\cos^2 t[a + 2b\tan t + c\tan^2 t] \end{aligned}$$

ここで $-\infty < \tan t < \infty$ だから，Q は t により正にも負にもなる．■

この定理を使って先ほどの問題を解いてみます，

例題 6.20

$$f(x,y) = x^2 + xy + 3y^2 + x + y$$

の極値を求めてみましょう．

解

$$f_{xx}(x,y) = 2, f_{xy}(x,y) = 1, f_{yy}(x,y) = 6, \Delta = 11$$

となるので $f(-\frac{5}{11}, -\frac{1}{11}) = -\frac{3}{11}$ は極小値になります． ■

例題 6.21

関数 $f(x,y) = \sin xy$ を点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ において 2 次の項までテイラー展開しよう．

解 $f_x = y\cos xy, f_y = x\cos xy, f_{xx} = -y^2 \sin xy, f_{xy} = \cos xy - xy\sin xy, f_{yy} = -x^2 \sin xy$ より，定理 6.7 において, $x = x_0 + h = \frac{\pi}{2} + h$, $y = y_0 + k = 1 + k$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(\frac{\pi}{2},1) + (x-\frac{\pi}{2})f_x(\frac{\pi}{2},1) + (y-1)f_y(\frac{\pi}{2},1) + \frac{1}{2!}\Big\{(x-\frac{\pi}{2})^2 f_{xx}(\frac{\pi}{2},1) \\ &\quad + 2(x-\frac{\pi}{2})(y-1)f_{xy}(\frac{\pi}{2},1) + (y-1)^2 f_{yy}(\frac{\pi}{2},1)\Big\} + R_3 \\ &= -\frac{1}{2!}\left\{(x-\frac{\pi}{2})^2 - (x-\frac{\pi}{2})(y-1) - \frac{\pi^2}{4}(y-1)^2\right\} + R_3 \quad ■ \end{aligned}$$

確認問題

1. 次の関数の (a,b) での Taylor 展開を x と y の 2 次の項まで求めよう．

(a) $f(x,y) = x^2 y, (a,b) = (1,1)$　(b) $f(x,y) = \cos xy, (a,b) = (1, \frac{\pi}{2})$

(c) $f(x,y) = \log(1-x+y), (a,b) = (1,1)$　(d) $f(x,y) = xe^{2x+y}, (a,b) = (0,0)$

2. 次の関数の極値を求めよう．

(a) $f(x,y) = 2x - x^2 - y^2$　(b) $f(x,y) = x^2 - 6y^2 + y^3$

(c) $f(x,y) = x^3 - 3x + y$　(d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

演習問題

1. 次の関数の極値を求めよう．

(a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$　(b) $f(x,y) = \frac{x}{y^2} + xy$

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$　(d) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$

2. 次の関数の (a,b) での Taylor 展開を x と y の 2 次の項まで求めよう．

(a) $f(x,y) = e^x \cos y$, $(a,b) = (0,0)$

(b) $f(x,y) = \log(x+y^2)$, $(a,b) = (2,1)$

6.8 陰関数 (implicit functions)

方程式 $3x + 2y + 1 = 0$ から， x の関数としての y つまり $y = -\frac{1-3x}{2}$ を考えることができます．一般に 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，1 変数関数 $y = g(x)$ が常に $f(x, g(x)) = 0$ を満た

すとき， $y = g(x)$ を方程式 $f(x, y) = 0$ から定まる**陰関数 (implicit function)** といいます．

$f(x, y) = 0$ から定まる陰関数 $y = g(x)$ を求めることは， $f(x, y) = 0$ を y について解くことと同じです．しかし f の形によっては，ある x の値に対して， $f(x, y) = 0$ を満たす y の値は 1 つもないことがあります．そこでどんな場合に陰関数が存在するかが問題になります．これについて，次の定理があります．

定理 6.9

[陰関数の存在定理]$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ を含む領域 D で $f(x, y)$ は C^1 級とする．

$$f(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

ならば， $x = x_0$ の近傍で $f(x, y) = 0$ の定める陰関数 $y = g(x)$ がただ 1 つ定まり，次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&(1)\ f(x, g(x)) = 0\\
&(2)\ g(x_0) = y_0\\
&(3)\ g(x) \text{ は } C^1 \text{級で}, \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}
\end{aligned}$$

つまり， $f_y(x, y) \neq 0$ となる点の近くでは (1) を満足する陰関数 y が存在し．さらに x に関して微分可能であることが証明されています．だから (1) の両辺の全微分をとると

$$f_x dx + f_y dy = 0$$

したがって条件 $f_y \neq 0$ により

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

と形式的に (3) を導き出すことができます．さらに上の式を x について微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{df_x}{dx} f_y - f_x \frac{df_y}{dx}}{f_y^2}$$

ここで

$$\frac{df_x}{dx} = f_{xx} + f_{xy}\frac{dy}{dx} = f_{xx} - f_{xy}\frac{f_x}{f_y}$$

$$\frac{df_y}{dx} = f_{yx} + f_{yy}\frac{dy}{dx} = f_{xy} - f_{yy}\frac{f_x}{f_y}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{(f_{xx} - f_{xy}\frac{f_x}{f_y})f_y - f_x(f_{xy} - f_{yy}\frac{f_x}{f_y})}{f_y^2}\\
&= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}
\end{aligned}$$

となります．

例題 6.22

次の式から定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めてみましょう．

$$x^2 + y^2 = 3xy$$

解 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$ とおき，$f(x,y)$ の全微分を求めると，

$$df = f_x dx + f_y dy = (2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$$

したがって，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 3y}{2y - 3x}$$

また $f_{xx} = 2,\ f_{xy} = -3,\ f_{yy} = 2$ なので，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2(2y-3x)^2 + 6(2x-3y)(2y-3x) + 2(2x-3y)^2}{(2y-3x)^3} = \frac{10(x^2 - 3xy + y^2)}{(2y-3x)^2}$$

となります．■

2 変数関数のときと同じように 3 変数関数 $f(x,y,z)$ において，

$$f(x,y,z) = 0$$

から定まる x, y の陰関数 $z = g(x,y)$ について考えることができます．

例題 6.23

$xy + yz + zx = 1$ から定まる x, y の陰関数 $z = g(x,y)$ について $z_x,\ z_y$ を求めてみましょう．
解 $f(x,y,z) = xy + yz + zx - 1$ の全微分をとると

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = (y+z)dx + (x+z)dy + (y+x)dz = 0$$

なお $z = g(x,y)$ より

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

よって

$$(y + z + (y+x)z_x)dx + (x + z + (y+z)z_y)dy = 0$$

ここで x と y は独立変数であることに注意すると，

$$z_x = -\frac{y+z}{y+x},\ z_y = -\frac{x+z}{y+z}$$

となります．■

次に 2 つの式 $f(x,y,z) = 0, g(x,y,z) = 0$ から y, z が x の陰関数として定まる場合について考えてみましょう．

例題 6.24

$x^2+y^2+z^2=1,\ 2x+3y-z=1$ から， y,z が x の関数として定まるとき $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{dz}{dx}$ を求めてみましょう．

解 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0, g(x,y,z)=2x+3y-z-1=0$ とおき，全微分をとると，

$$df=2xdx+2ydy+2zdz=0,\ dg=2dx+3dy-dz=0$$

これより dz を消去すると

$$(2x+4z)dx+(2y+6z)dy=0$$

したがって，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+4z}{2y+6z}$$

同様にして，dy を消去すると

$$(6x-4y)dx+(6z+2y)dz=0$$

したがって，

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{6x-4y}{6z+2y}$$

となります． ■

***陰関数の極値** $f(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=g(x)$ の極値を考えてみましょう．まず $x=x_0$ で極値 $y_0=g(x_0)$ をとるとすると，陰関数の存在定理より

$$f(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)\neq 0$$

また， $y=g(x)$ が極値をとるためには $\dfrac{dy}{dx}=0$ でなければならないので

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=0$$

よって $f_x(x_0,y_0)=0$．次に $y_0=g(x_0)$ が極小値か極大値か調べるために， $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めると

$$\frac{d^2y(x_0)}{dx^2}=-\frac{f_{xx}(x_0,y_0)f_y^2(x_0,y_0)}{f_y^3(x_0,y_0)}=-\frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

これより，

$$\frac{d^2y(x_0)}{dx^2}>0$$

ならば $x=x_0$ で極小値 $y_0=g(x_0)$，

$$\frac{d^2y(x_0)}{dx^2}<0$$

ならば $x=x_0$ で極大値 $y_0=g(x_0)$．ここまでをまとめると次の定理を得ます．

定理 6.10

ある領域で $f(x,y)$ は C^2 級とする．$f(x,y)=0$ より定まる陰関数 $y=g(x)$ が $x=x_0$ で極値 $y_0=g(x_0)$ をとるならば，

$$f(x_0,y_0)=0,\ f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)\neq 0$$

さらに

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ |_{(x_0,y_0)}=-\frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}>0 \text{ ならば } y_0=g(x_0) \text{ 極小値である．}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ |_{(x_0,y_0)}=-\frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}<0 \text{ ならば } y_0=g(x_0) \text{ 極大値である．}$$

例題 6.25

$x^4+2x^2+y^3-y=0$ から定まる x の関数 $y=g(x)$ の極値を求めてみましょう．
解 まず， $f(x,y)=0, f_x(x,y)=0$ を満たす (x,y) を求めます．

$$f(x,y)=x^4+2x^2+y^3-y=0,\ f_x(x,y)=4x^3+4x=0$$

より $(x,y)=(0,0),(0,1),(0,-1)$．次に

$$f_{xx}=12x^2+4,\ f_y=3y^2-1$$

より $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ |_{(0,0)}=-\frac{f_{xx}(0,0)}{f_y(0,0)}=-\frac{4}{-1}=4>0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ |_{(0,\pm1)}=-\frac{f_{xx}(0,\pm1)}{f_y(0,\pm1)}=-\frac{4}{2}=-2<0$$

したがって， $x=0$ のときの $y=0$ は極小値， $x=0$ のときの $y=1$ は極大値， $x=0$ のときの $y=-1$ も極大値です． ■

確認問題

1. 次の式から定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよう．

(a) $x - y^2 = 1$ (b) $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ (c) $x - e^y = 0$

(d) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

2. 次の式から定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよう．

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y + z = 1$ (b) $xyz = 1, x + y + z = 1$

演習問題

1. 次の式から定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよう．

(a) $2x^2 + 5xy - 3y^2 = 1$ (b) $y = e^{x+y}$ (c) $x^2 - y^2 = xy$

(d) $\log\sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

2. 次の式から定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよう．

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 4x$ (b) $xyz = 1, xy + yz + zx = 1$

3. 楕円 $2x^2 + 5y^2 = 12$ 上の点 $(1, \sqrt{2})$ における接線と法線を求めよう．

4. 曲面 $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ 上の点 $(1, 1, \frac{\pi}{2})$ における接平面と法線を求めよう．

5. 次の式から定まる陰関数 $y = g(x)$ の極値を求めよう．

(a) $8x^2 + 4xy + 5y^2 = 36$ (b) $x^2y + x + y = 0$

(c) $x^3 + y^3 - 6xy = 0$

6.9 条件付極値 (extremum with side conditions)

$\phi(x, y) = 0$ という条件のもとで，$f(x, y)$ の極値を求める問題を考えてみましょう．

$\phi(x, y) = 0$ より $\phi_y(x, y) \neq 0$ ならば $\phi(x, y) = 0$ を満たす陰関数 $y = g(x)$ が定まります．いま $z = f(x, g(x))$ が (x_0, y_0) で極値をとるとすると，$y_0 = g(x_0)$ かつ $z_x = 0$ より，

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)g'(x_0) = 0$$

また $\phi(x, y) = 0$ を x で微分すると

$$\phi_x(x_0, y_0) + \phi_y(x_0, y_0)g'(x_0) = 0$$

よって

$$f_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)\frac{\phi_x(x_0, y_0)}{\phi_y(x_0, y_0)} = 0$$

ここで

$$\frac{f_y(x_0, y_0)}{\phi_y(x_0, y_0)} = \lambda$$

とおくと

$$f_x(x_0, y_0) - \lambda\phi_x(x_0, y_0) = 0$$

を満たす λ が存在することが分かります．これより次の定理を得ます．

定理 6.11

[Lagrange の乗数法] 条件 $\phi(x, y) = 0$ のもとで， $f(x, y)$ が極値をとる x, y の値は，

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y)$$

とおいて，

$$F_\lambda(x, y) = -\phi(x, y) = 0,\ F_x(x, y) = 0,\ F_y(x, y) = 0$$

の解として得られる．

この定理は幾何学的に考えると次のように考えることができます．$\phi(x, y) = 0$ よりベクトル $\nabla\phi(x, y)$ は曲線 $\phi(x, y) = 0$ と直交します．また $f(x, y)$ が条件 $\phi(x, y) = 0$ のもとで極値をとるということは， $z = f(x, y)$ の等高線 $f(x, y) = c$ と $\phi(x, y) = 0$ が共有点を持つときの c の値の極値のことです．したがって， $f(x, y)$ が (x_0, y_0) で極値をとるならば，この点において，$\phi(x_0, y_0) = 0$ と $f(x, y) = c$ は接することになります．よって $\nabla\phi(x_0, y_0)$ と $\nabla f(x_0, y_0)$ は平行となり，

$$\nabla f(x, y) = \lambda\nabla\phi(x, y)$$

を満たす λ が存在するのです．

すでに外積 (ベクトル積) を学んだ人は，$\nabla\phi(x_0, y_0)$ と $\nabla f(x_0, y_0)$ は平行より次の式を得ることができます．

$$\nabla\phi(x_0, y_0) \times \nabla f(x_0, y_0) = \hat{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ f_x & f_y \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

例題 6.26

$x^2 + y^2 = 4$ のとき， $3x^2 + 4xy + 3y^2$ の極値を求めてみましょう．

解 $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0,\ f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2$ より，

$$F(x, y, \lambda) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

とおくと

$$F_\lambda = 0 \text{ より } x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{6.2}$$

$$F_x = 0 \text{ より } (3 - \lambda)x + 2y = 0 \tag{6.3}$$

$$F_y = 0 \text{ より } 2x + (3 - \lambda)y = 0 \tag{6.4}$$

$(x, y) = (0, 0)$ は式 6.2 を満たしません．そこで式 6.3，6.4 が $(x, y) \neq (0, 0)$ という解を持つ条件は，

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

つまり， $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$． すなわち $\lambda = 1, 5$ となります．

$\lambda = 1$ のとき，式 6.2，6.3 より $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$．これらに対して， $3x^2 + 4xy + 3y^2$ の値は 4 となります．

$\lambda = 5$ のとき，式 6.2，6.3 より $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$．これらに対して， $3x^2 + 4xy + 3y^2$ の値は 20 となります．

一方， $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ は有界閉集合であり，この上で $3x^2 + 4xy + 3y^2$ は連続なので，最大・最小値の定理より最大値，最小値をもちます．これらは極値でもあるので，上で求めた結果より，極値であれば，それは 4 か 20 のはずです．よって，最大値は 20，最小値は 4 となります． ■

例題 6.27

点 $(1, -1, 2)$ から曲面 $x^2 - 2y + 2z - 10 = 0$ までの最短距離を求めてみましょう．

解 点 $(1, -1, 2)$ と与えられた平面上の点 (x, y, z) との距離を $f(x, y, z)$ とし， f^2 の最小値を求めます．

$$\begin{cases} f^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 \\ x^2 - 2y + 2z - 10 = 0 \end{cases}$$

より

$$F(x, y, z, \lambda) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - \lambda(x^2 - 2y + 2z - 10)$$

とおくと

$$F_\lambda = 0 \text{ より } \quad x^2 - 2y + 2z - 10 = 0 \tag{6.5}$$
$$F_x = 0 \text{ より } \quad 2(x-1) - 2x\lambda = 0 \tag{6.6}$$
$$F_y = 0 \text{ より } \quad 2(y+1) + 2\lambda = 0 \tag{6.7}$$
$$F_z = 0 \text{ より } \quad 2(z-2) - 2\lambda = 0 \tag{6.8}$$

式 6.6,6.7,6.8 より

$$x = \frac{1}{1-\lambda}, y = -1 - \lambda, z = 2 + \lambda$$

これらを式 6.5 に代入すると

$$(\frac{1}{1-\lambda})^2 - 2(-1-\lambda) + 2(2+\lambda) - 10 = 0$$

これより

$$\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 4(1-\lambda)$$

これを λ について解くと

$$\lambda = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$$

したがって

$$x = 2^{2/3},\ y = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3},\ z = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$$

を得ます．これは曲面上の点の座標です．ところで f^2 の値は，いくらでも大きい値をとることができるので，ここでの極値は極小値で，しかも唯一の極値ということから最小値となります．

■

確認問題

1. 次の条件 $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよう．

(a) $g(x,y) = x^2+y^2-1,\ f(x,y) = x^2+3y^2$

(b) $g(x,y) = x^2+y^2-4,\ f(x,y) = x^2+y^2-2x$

(c) $g(x,y) = x^2+y^2-1,\ f(x,y) = xy+x+y$

2. 楕円 $x^2+xy+y^2 = \frac{1}{4}$ と原点との最短距離を求めよ．

演習問題

1. 次の式から定まる陰関数 $y=g(x)$ の極値を求めよう．

(a) $8x^2+4xy+5y^2 = 36$　(b) $x^2y+x+y=0$　(c) $x^3+y^3-6xy=0$

2. 次の条件 $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよう．

(a) $g(x,y) = x^2+y^2-1,\ f(x,y) = xy^3$

(b) $g(x,y) = x^3+y^3-6xy,\ f(x,y) = x^2+y^2$

(c) $g(x,y) = x^2-xy+y^2-1,\ f(x,y) = xy$

3. 点 $\mathrm{P}(x,y)$ が直線 $2x+3y=12$ 上を移動するとき， xy の最大値を求めよう．

4. 点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ が球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上を移動するとき， $x^2+2y^2+3z^2$ の最大値，最小値を求めよう．

第 7 章

重積分法 (MULTIPLE INTEGRATION)

7.1　2 重積分 (double integrals)

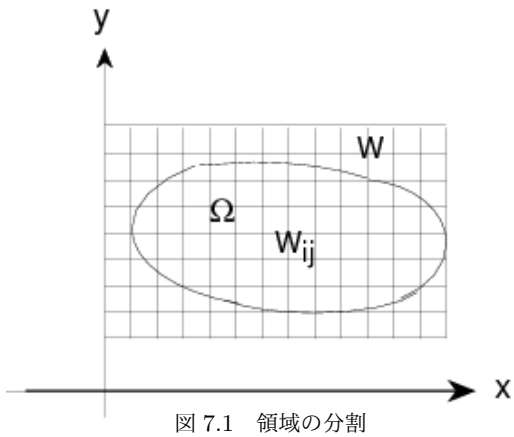


図 7.1　領域の分割

3.7 章で，区間 $[a,b]$ で定義されている 1 変数関数の定積分を Riemann 和を用いて定義しました．ここでは平面上の有界閉領域 Ω で定義されている 2 変数関数の定積分を フランスの数学者 Jean Gaston Darboux(1842-1917) によって用いられた方法で定義します．

長方形上の 2 重積分

xy 平面上の長方形 W 上で定義された関数を $z=f(x,y)$ とします．次に W を x 軸， y 軸に平行な直線で分割し，分割された小長方形を $W_{1,1}, W_{1,2}, \ldots, W_{m,n}$ とします．この分割を Δ で表わします．つまり，

$$W=\{(x,y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$
$$\Delta : \left\{ \begin{array}{c} a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b \\ c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d \end{array} \right\}$$

次に，

$$m_{ij}=\inf_{(x,y)\in W_{ij}} f(x,y),\ M_{ij}=\sup_{(x,y)\in W_{ij}} f(x,y)\ \ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$$

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),\ S_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

とおくと， s_Δ は上に有界な集合で， S_Δ は下に有界な集合なので

$$s = \sup_\Delta s_\Delta,\quad S = \inf_\Delta S_\Delta$$

が定まり，一般に $s \leq S$ が成り立ちます．ここで，特に $s = S$ が成り立つとき， $f(x,y)$ は W で積分可能であるといいます．また，この共通の値を， $f(x,y)$ の **2 重積分** といい， $f(x,y)$ は W で **2 重積分可能 (double integrable)** であるといって，この値を次のように表わします．

$$\iint_W f(x,y)dxdy$$

また， $W_{i,j}$ の任意な点 (ξ_i, η_j) に対して，

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \iint_W f(x,y)dxdy$$

が成り立ちます．ここで

$$|\Delta| = \max_{i,j} W_{ij} = \max_{i,j}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

有界閉領域上の 2 重積分

次に，有界閉領域 Ω 上の積分を考えます．

xy 平面上の有界閉領域 Ω 上で定義された関数を $z = f(x,y)$ とします．図 7.1 に示すように領域 Ω を内部に含む長方形を W とし， W を x 軸， y 軸に平行な直線で分割し，分割された小領域 (小長方形) を $W_{1,1}, W_{1,2}, \ldots, W_{m,n}$ とします．この分割を Δ で表わします．ここで Ω の内部に完全に含まれる小長方形の面積の和を a_Δ， Ω の点を含むすべての小長方形の和を A_Δ とします．すると a_Δ は上に有界な集合で， A_Δ は下に有界な集合です．これより，

$$a = \sup_\Delta a_\Delta,\quad A = \inf_\Delta A_\Delta$$

が存在します．このとき， a を Ω の **内面積 (inner area)**， A を Ω の **外面積 (outer area)** といいます．特に， $a = A$ のとき， Ω は **面積確定 (mesurable area)** であるといいます．そして，この共通の値を Ω の面積といいます．

ここで，

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ 0 & (x,y) \in W - \Omega \end{cases}$$

とおきます．そのとき， $\hat{f}(x,y)$ が W で積分可能であれば， $f(x,y)$ は Ω で積分可能であるといい， $f(x,y)$ の Ω 上の積分を次のように表わします．

$$\iint_W \hat{f}(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

また， $W_{i,j}$ の任意な点 (ξ_i, η_j) に対して，

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\hat{f}(\xi_i,\eta_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) = \iint_W \hat{f}(x,y)dxdy$$

が成り立ちます．

3 変数関数 $f(x,y,z)$ についても 2 変数の場合と同様に，**3 重積分**が定義され，これを

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

で表わします．2 重積分以上を総称して，**多重積分 (multiple integral)** または **重積分** といいます．

1 変数のときと同じように，次の定理が成り立ちます．

定理 7.1

$f(x,y)$ が面積確定である有界閉領域 Ω で連続ならば， Ω で 2 重積分可能である．

重積分の定義よりただちに次の公式が得られます．

定理 7.2

[重積分公式]$f(x,y), g(x,y)$ が面積確定な有界閉領域 Ω において連続であるとき，次の等式が成り立つ．

(1) a, b が定数ならば，

$$\iint_\Omega \{af(x,y)+bg(x,y)\}dxdy = a\iint_\Omega f(x,y)dxdy + b\iint_\Omega g(x,y)dxdy$$

(2) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ならば

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$$

(3) $|\iint_\Omega f(x,y)dxdy| \le \iint_\Omega |f(x,y)|dxdy$

(4)　**平均値の定理**

S を領域 Ω の面積とするとき

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)S$$

となるような点 (ξ,η) が Ω 内に存在する．

証明 (1)　W を Ω を含む長方形， $S_{i,j}$ を $W_{i,j}$ の面積とすると，

$$\begin{aligned}\iint_W \{a\hat{f}(x,y)+b\hat{g}(x,y)\}dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\{a\hat{f}(\xi_i,\eta_j)+b\hat{g}(\xi_i,\eta_j)\}\Delta S_{i,j}\\ &= a\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\hat{f}(\xi_i,\eta_j)\Delta S_{i,j} + b\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\hat{g}(\xi_i,\eta_j)\Delta S_{i,j}\\ &= a\iint_\Omega f(x,y)dxdy + b\iint_\Omega g(x,y)dxdy\end{aligned}$$

(2)，(3)，(4) の証明は各自に任せます．■

演習問題

1.　上の定理 7.1 を証明しよう．

7.2　累次積分 (repeated integrals)

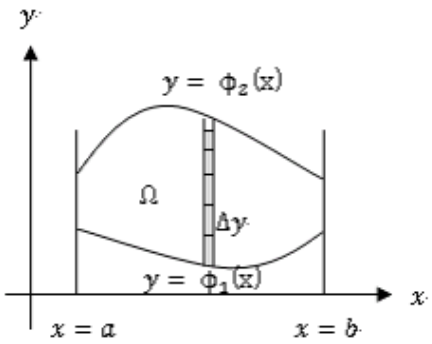


図 7.2　V-simple

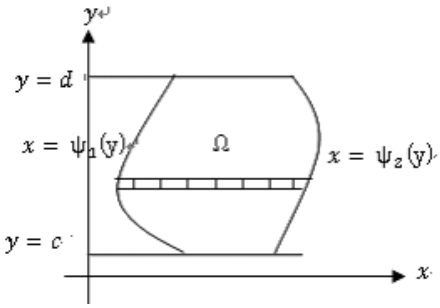


図 7.3　H-simple

2 重積分をその定義に基づいて計算することは，2 変数関数の Riemann 和を求めて計算することに相当します．これは一般に困難なので，次の定理によって，2 重積分を **累次積分 (repeated integral)** とよばれる単一積分の反復に変えて計算します．

定理 7.3

(1)　$a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$ で囲まれた閉領域 Ω(図 7.2) で，　$f(x,y)$ が連続ならば

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \{\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\}dx$$

(2)　$c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$ で囲まれた閉領域 Ω(図 7.3) で，　$f(x,y)$ が連続ならば

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d \{\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\}dy$$

$a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$ で囲まれた閉領域を **縦線集合 (V-simple)**，
$c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$ で囲まれた閉領域を **横線集合 (H-simple)** といいます．
この定理は次のように考えることができます．
2 重積分

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

は図 7.4 に示す xy 平面上の領域 Ω を底面とし，上面が $z = f(x, y)$ である柱状体の体積と考えられるので，その体積は

$$\int_a^b A(x)dx$$

により求めることができます．ここで， $A(x)$ は x 軸に垂直な平面で $z = f(x, y)$ を切断した切断面の面積なので，縦方向に細長い長方形を積んでいくと考えると

$$A(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy$$

とおくことができます．つまり定理 7.2(1)

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \{\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy\}dx$$

を得たことになります．

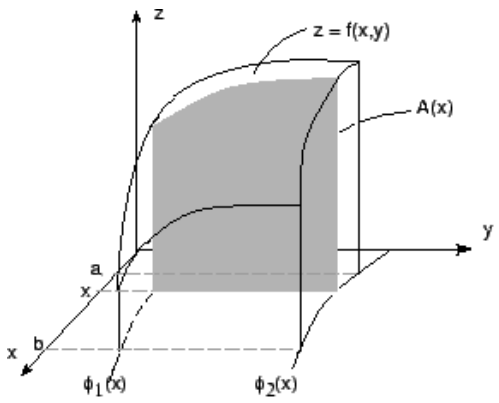


図 7.4　累次積分

例題 7.1

次の 2 重積分を求めてみましょう．

$$\iint_\Omega (x^2 - y)dxdy,\ \Omega = \{-1 \le x \le 1, -x^2 \le y \le x^2\}$$

解 まず， Ω を図示 (図 7.5) すると

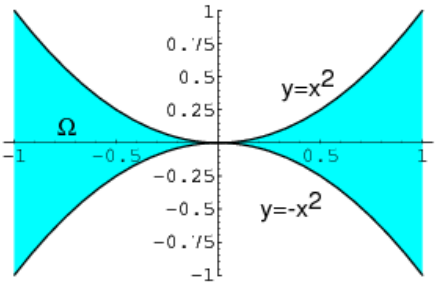


図 7.5　$-x^2 \leq y \leq x^2$

この領域は V-simple なので，定理 7.2(1) より

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (x^2-y)dxdy &= \int_{-1}^{1}(\int_{-x^2}^{x^2}(x^2-y)dy)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[(x^2y-\frac{1}{2}y^2)\right]_{-x^2}^{x^2}dx \\ &= \int_{-1}^{1}[(x^4-\frac{1}{2}x^4)-(-x^4-\frac{1}{2}x^4)]dx \\ &= \int_{-1}^{1}2x^4dx = \left[\frac{2}{5}x^5]\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{5} \ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 7.2

領域 Ω が図 7.6 で与えられているとき，次の 2 重積分を求めてみましょう．

$$\iint_\Omega (x^{1/2}-y^2)dxdy$$

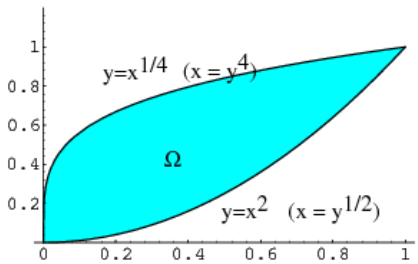


図 7.6　$x^2 \leq y \leq x^{1/4}$

解 この領域は H-simple でもあり V-simple でもあります．そこでまず V-simple を用いて計算してみます．

V-simple より Ω は次のように表わすことができます．

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x^{1/4}\}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega (x^{1/2} - y^2)dxdy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} (x^{1/2} - y^2)dydx \\
&= \int_0^1 \left[x^{1/2}y - \frac{1}{3}y^3]\right]_{x^2}^{x^{1/4}} dx \\
&= \int_0^1 (\frac{2}{3}x^{3/4} - x^{5/2} + \frac{1}{3}x^6)dx \\
&= \left[\frac{8}{21}x^{7/4} - \frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{1}{21}x^7]\right]_0^1 = \frac{8}{21} - \frac{2}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

次にこの積分を H-simple を用いて行なってみます．この場合 Ω は次のように表わすことができます．

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ y^4 \leq x \leq y^{1/2}\}$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega (x^{1/2} - y^2)dxdy &= \int_0^1 \int_{y^4}^{y^{1/2}} (x^{1/2} - y^2)dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - y^2x]\right]_{y^4}^{y^{1/2}} dy \\
&= \int_0^1 (\frac{2}{3}y^{3/4} - y^{5/2} + \frac{1}{3}y^6)dy \\
&= \left[\frac{8}{21}y^{7/4} - \frac{2}{7}y^{7/2} + \frac{1}{21}y^7]\right]_0^1 = \frac{8}{21} - \frac{2}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

となり，同じ結果を得ることができます．■

このように V-simple で行なった積分を H-simple または H-simple で行なった積分を V-simple で行なうことを **積分順序の交換 (change the order of integration)** をするといいます．

確認問題

1.　次の 2 重積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega xdxdy,\ \Omega : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega (2x+3y)dxdy,\ \Omega : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega (1+x+xy)dxdy,\ \Omega : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le y$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega \sin(x+y)dxdy,\ \Omega : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

(e) $\displaystyle\iint_\Omega x^3 y dxdy,\ \Omega : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$

2. 次の積分順序の交換をしよう.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)dydx$　(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)dxdy$　(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dydx$

3. 次の体積を求めよう.

(a) 曲面 $z = x + y$ で上に有界で 3 点 $(0,0),(0,1),(1,0)$ を頂点とする三角面で下に有界な立体

(b) 曲面 $z = 2x + 3y$ で上に有界で点 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ を頂点とする正方形で下に有界な立体

(c) 曲面 $z = x^2 + y^2$ で上に有界で単位円盤 $x^2 + y^2 \le 1$ で下に有界な立体

演習問題

1. 次の 2 重積分を計算しよう.

(a) $\displaystyle\iint_\Omega x^2 dxdy,\ \Omega : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega e^{x+y} dxdy,\ \Omega : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{xy} dxdy,\ \Omega : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le y$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega (4-y^2)dxdy,\ \Omega$ は $y^2 = 2x$ と $y^2 = 8 - 2x$ で囲まれた領域

2. 次の積分順序の交換をしよう.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)dydx$　(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)dxdy$　(c) $\displaystyle\int_1^4 \int_x^{2x} f(x,y)dydx$

3. 次の 2 重積分を計算しよう.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x} dxdy$　(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dydx$　(c) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx$

7.3 変数変換 (change of variables)

1 変数関数 $f(x)$ の定積分に関する置換積分の公式に対応するものを 2 重積分で考えてみましょう.

いま xy 平面上の領域 Ω と uv 平面上の領域 Γ との間に

$$x = \phi(u,v)$$
$$y = \psi(u,v)$$

なる 1 対 1 で上への対応 Φ があり， ϕ, ψ は u, v に関して C^1 級であるとします．さらに，

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \phi_u(u,v) & \phi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{vmatrix}$$

は Γ 上で常に 0 にならないものとします．このとき次の定理が成り立ちます．

定理 7.4

[変換公式] Ω 上で連続な関数 $f(x,y)$ に対して次の式が成り立つ．

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_\Gamma f(\phi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv$$

ここで用いられた $J(u,v)$ を **ジャコビアン (Jacobian)** といいます．簡単な例でジャコビアンを説明しましょう．

例えば，Φ が $\Phi : \begin{cases} x = 2u \\ y = 2v \end{cases}$ で与えられたとします．すると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と表わせ，Φ が正則行列ならば，逆行列 Φ が存在するので，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで， xy 平面上に 4 点 $(x,y),(x+\Delta x,y),(x,y+\Delta y),(x+\Delta x,y+\Delta y)$ を頂点とする長方形を考えます．この長方形の面積は $\Delta x \Delta y$ で与えられることに注意し，対応する uv 平面上の図形の面積を求めてみましょう．

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より

$$\begin{array}{l} (x,y) \to (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) = (u,v) \\ (x+\Delta x, y) \to (\frac{x+\Delta x}{2}, \frac{y}{2}) = (u+\Delta u, v) \\ (x, y+\Delta y) \to (\frac{x}{2}, \frac{y+\Delta y}{2}) = (u, v+\Delta v) \\ (x_\Delta x, y+\Delta y) \to (\frac{x+\Delta x}{2}, \frac{y+\Delta y}{2}) = (u+\Delta u, v+\Delta v) \end{array}$$

よって， uv 平面上の図形の面積 $\Delta u \Delta v$ は

$$\left(\frac{x+\Delta x}{2} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{y+\Delta y}{2} - \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{4}\Delta x \Delta y$$

これより

$$\Delta x \Delta y = 4\Delta u \Delta v = |J(u,v)|\Delta u \Delta v$$

これがジャコビアンです．

特に極座標 (r,θ) を直交座標 (x,y) に変換するときは， $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より，

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

となるので，

定理 7.5

[極座標変換]

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_\Gamma f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

例題 7.3

変数変換を用いて次の積分を計算してみましょう．

$$\iint_\Omega xydxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \le 1, x, y \ge 0\}$$

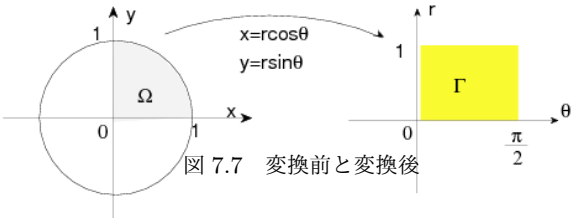


図 7.7　変換前と変換後

解 極座標変換を用いると，$0 \le x^2+y^2 = r^2 \le 1$，　また，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \ge 0$ より $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$．よって Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$$

にうつる．したがって，

$$\begin{aligned}\iint_\Omega xydxdy &= \iint_\Gamma r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta \\ &= \int_0^1 r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 7.4

$\Omega = \{(x.y) : x^2+y^2 \le x\}$ のとき，2 重積分

$$\iint_\Omega \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

を計算してみましょう．

解 極座標変換を用いると $0 \le x^2+y^2 = r^2 \le r\cos\theta$ より Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le \cos\theta\}$$

にうつるので，

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}rdrd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^{\cos\theta}d\theta \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta = \frac{2}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}) \text{ (定理 3.8 参照) } \blacksquare\end{aligned}$$

確認問題

1. 次の 2 重積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y^2)dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2)}dxdy,\ \Omega=\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega y^2dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega (x+y)dxdy, \Omega=\{(x,y):0\le x+y\le 1, |x-y|\le 1$

(e) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 2x\}$

2. $u=x-y, v=x+y$ とおくと，領域 $\Omega=\{(x,y):0\le x+y\le 1, 0\le x-y\le 1\}$ はどんな図形に移されるか図示せよ．また，この変数変換を用いて，2 重積分 $\iint_\Omega(2x+3y)dxdy$ の値を求めよう．

3. $\Omega=\{(x,y):0\le x-y\le 1, 0\le x+2y\le 1\}$ とするとき，2 重積分 $\iint_\Omega 2xdxdy$ の値を求めよう

演習問題

1. 次の 2 重積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega x^2dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega \log(x^2+y^2)dxdy,\ \Omega=\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 4\}$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega e^{(y-x)/(y+x)}dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega e^{x^2+y^2}dxdy,\ \Omega=\{(x,y):1<x^2+y^2<4\}$

(e) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$

(f) $\displaystyle\iint_\Omega (1-x-2y)dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$

2. $u=x+y, v=x-y$ に変換して，次の積分を求めよう．

$\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y^2)e^{-x+y}dxdy,\ \Omega=\{-1\le x+y\le 1, -1\le x-y\le 1\}$

7.4　広義積分 (improper integrals)

これまでに扱った 2 重積分は，領域 Ω が有界でかつ関数 $f(x,y)$ も Ω 上で有界のときでした．ここではもう少し広い範囲での 2 重積分，つまり Ω が有界でない場合を考えてみましょう．

Ω 内の有界な閉領域の列 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n, \cdots$ が

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset \cdots$$

をみたし， Ω 内のどのような集合も必ずある Ω_n に含まれるようにでき，また， $f(x,y)$ が各 Ω_n 上で積分可能で

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} f(x,y)dxdy$$

が存在するならば， $f(x,y)$ は Ω 上で**積分可能 (integrable)** であるといい，次のように定義します．

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} f(x,y)dxdy$$

例題 7.5

次の 2 重積分を求めてみましょう．

$$I = \iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,\ \Omega = \{(x,y) : x, y \geq 0\}$$

解 まず，領域 Ω は有界でないので，次のような有界な閉領域の列 $\{\Omega_n\}$ を考えます．

$$\Omega_n = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq n^2, x, y \geq 0\}$$

この閉領域の列 $\{\Omega_n\}$ を図示すると図 7.8 を得ます．

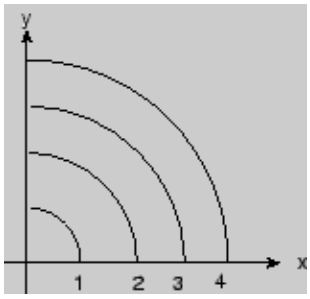


図 7.8　閉領域の列

Ω_n 上での積分は極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を用いて行うと，

$$\iint_{\Omega_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^n e^{-r^2} r dr$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^n = \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2})$$

したがって， $n \to \infty$ とすると I が求まり， $I = \pi/4$. ■

次に Ω 上で $f(x,y)$ が有界でない場合を考えてみましょう．

例題 7.6

$\Omega = \{(x,y) : 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$ のとき，次の 2 重積分を求めてみましょう．

$$I = \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(x+y)^{3/2}}$$

解

$$\Omega_n = \{(x,y) : \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1\}$$

とおくと，図 7.9 を得ます．

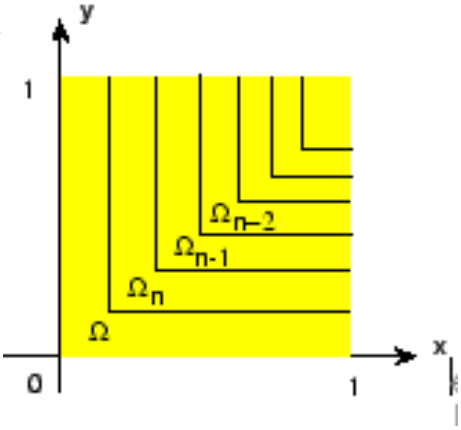


図 7.9　領域の列

これより，

$$\iint_{\Omega_n} \frac{dxdy}{(x+y)^{3/2}} = \int_{1/n}^1 dx \int_{1/n}^1 \frac{dy}{(x+y)^{3/2}} = \int_{1/n}^1 \left[-\frac{2}{(x+y)^{1/2}}\right]_{\frac{1}{n}}^1 dx$$
$$= 2\int_{1/n}^1 [(x+\frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} - (x+1)^{-\frac{1}{2}}]dx$$
$$= 2\left[2(x+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{n}}^1$$
$$= 4[2(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} - (\frac{2}{n})^{\frac{1}{2}}]$$

したがって， $n \to \infty$ とすると I が求まります．$I = 4(2-\sqrt{2})$. ■

確認問題

1. 次の広義積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega e^{y/x}dxdy,\ \Omega=\{(x,y):0<x\le 1, 0\le y\le x\}$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{1-x-y}}dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x+y<1, x\ge 0, y\ge 0\}$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega \log(x^2+y^2)dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x,y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$

演習問題

1. 次の広義積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dxdy}{(y^2-x^2)^{1/2}},\ \Omega=\{(x,y):0\le x<y\le 1\}$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega e^{-(x+y)}dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x\ge 0, y\ge 0\}$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega \tan^{-1}(\frac{y}{x})dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x,y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{x^2y^2}dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x\ge 1, y\ge 1\}$

(e) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dxdy}{\sqrt{x-y^2}},\ \Omega=\{(x,y):0\le x\le 1, y^2\le x\}$

(f) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^2},\ \Omega=\{(x,y):-\infty<x,y<\infty\}$

2. 例題 7.4 を用いて，$\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\sqrt{\pi}$ を示そう．

7.5　2 重積分の応用 (application of double integrals)

ここでは 2 重積分の応用としてまず面積を考えます．図 7.10 のような有界閉領域 Ω の面積は

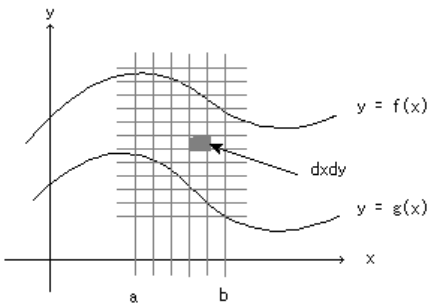


図 7.10　Ω の面積

$$\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

で与えられますが,

$$f(x) - g(x) = \int_{y=g(x)}^{y=f(x)} dy$$

より 2 重積分を用いて,

$$\iint_\Omega dxdy = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} dydx$$

と表わすことができます.

例題 7.7

曲線 $x^2 = 4y$ と直線 $2y - x - 4 = 0$ で囲まれた領域 Ω の面積を求めてみましょう.

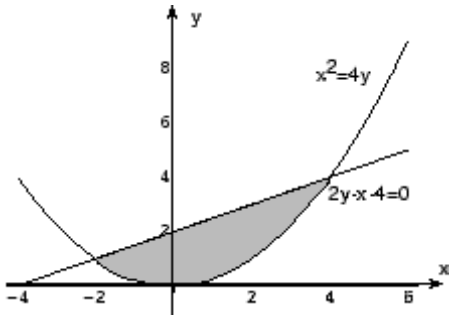


図 7.11　曲線と直線で囲まれた領域

解 図 7.11 より V-simple を用いると

$$\begin{aligned}\iint_\Omega dxdy &= \int_{-2}^{4} dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x+4}{2}} dy = \int_{-2}^{4} [\frac{x+4}{2} - \frac{x^2}{4}]dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{4} = \frac{16-4}{4} + 2(4+2) - \frac{1}{12}(64+8) \\ &= 3 + 12 - 6 = 9 \ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 7.8

Cardiod(心臓形) $r = 1 + \cos\theta$ の内側で $r = 1$ の外側の領域 Ω の面積を求めてみましょう.

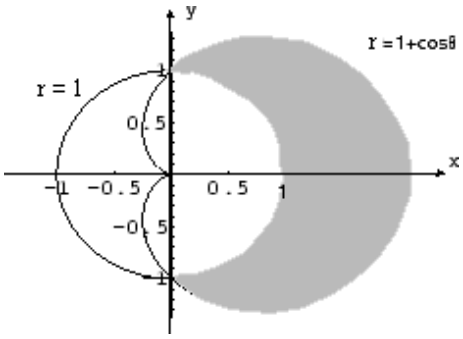


図 7.12　心臓形と円

解 $r = 1 + \cos\theta$ と $r = 1$ の交点を求めると， $\cos\theta = 0$ より $\theta = -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}$．よって，変数変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を行なうと，領域 Ω は領域 $\Gamma = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 1 \le r \le 1+\cos\theta\}$ に移されます．図 7.12 参照．よって

$$\begin{aligned}\iint_\Omega dxdy &= \iint_\Gamma rdrd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{1+\cos\theta} rdrd\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{1+\cos\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta + \cos^2\theta}{2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 2 + \frac{\pi}{4} \ \blacksquare\end{aligned}$$

xy 平面上の有界閉領域 Ω 上で定義された関数 $z = f(x,y)$ が C^1 級であるとき，

$$S = \{(x, y, f(x,y) : (x,y) \in \Omega\}$$

は **滑らかな曲面 (smooth curve)** であるといいます．この曲面 S の曲面積 S を求めてみましょう．

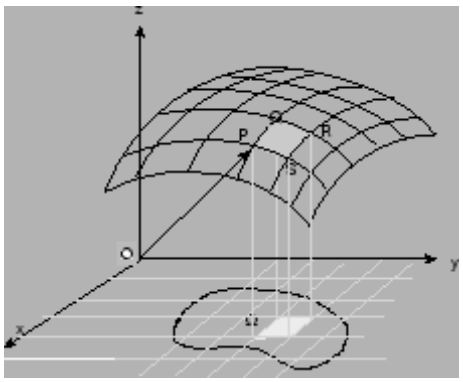


図 7.13　曲面積

図 7.13 で四辺形 PQRS においてベクトル

$$\vec{\mathrm{OP}} = (x, y, f(x,y)), \vec{\mathrm{OQ}} = (x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y)), \vec{\mathrm{OS}} = (x, y+\Delta y, f(x, y+\Delta y))$$

とすると，

$$\vec{\mathrm{PQ}} = \vec{\mathrm{OQ}} - \vec{\mathrm{OP}} = (\Delta x, 0, f(x+\Delta x, y) - f(x,y)) \approx (\Delta x, 0, f_x(x,y))$$

$$\vec{\mathrm{PS}} = \vec{\mathrm{OS}} - \vec{\mathrm{OP}} = (0, \Delta y, f(x, y+\Delta y) - f(x,y)) \approx (0, \Delta y, f_y(x,y))$$

よって四辺形 PQRS の面積は $\|\vec{\mathrm{PQ}} \times \vec{\mathrm{PS}}\|$ で近似されます．ここで，

$$\vec{\mathrm{PQ}} \times \vec{\mathrm{PS}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \Delta x & 0 & f_x \Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y \Delta y \end{vmatrix} = (-f_x \Delta x \Delta y, -f_y \Delta y \Delta x, \Delta x \Delta y)$$

より

$$\|\vec{\mathrm{PQ}} \times \vec{\mathrm{PS}}\| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}(\Delta x \Delta y)$$

これより曲面積は 2 重積分を用いて次のように表わせます．

$$S = \iint_\Omega \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dxdy$$

ここで Ω は曲面 S の xy 平面への正射影です．

例題 7.9

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ が円柱面 $x^2 + y^2 = x$ によって切り取られる部分の曲面積 S を求めてみましょう．

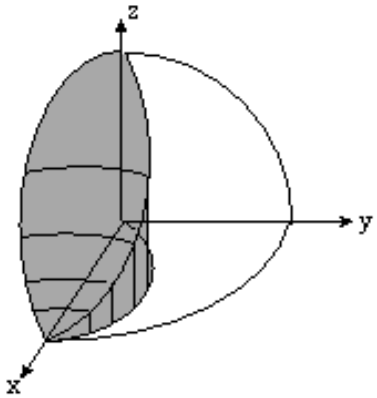


図 7.14　球面と円柱面の共通部分

解

$$z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq x\}$$

の曲面積を求め，2 倍すればよいでしょう．

$$
\begin{aligned}
S &= 2\iint_\Omega \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dxdy \\
&= 2\iint_\Omega \sqrt{(\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}+1)}dxdy \\
&= 2\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy
\end{aligned}
$$

ここで極座標に変換すると Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le \cos\theta\}$$

にうつり $J(r,\theta) = r$ より

$$
\begin{aligned}
S &= 2\iint_\Gamma \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdrd\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\cos\theta} d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-|\sin\theta|)d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta)d\theta = 4(\frac{\pi}{2}-1) = 2\pi - 4
\end{aligned}
$$

となります．■

有界閉領域 Ω と Ω 上の連続関数 $z = f(x,y), z = g(x,y)$ があり，Ω 上で $f(x,y) \ge g(x,y)$ とします．このとき Ω の境界 $\partial\Omega$ を通り z 軸に平行な直線群と f, g のグラフ曲面で囲まれた立体の体積は

$$V = \iint_\Omega [f(x,y) - g(x,y)]dxdy$$

で与えられます．

例題 7.10

2 つの円柱面 $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ によって囲まれた立体の体積を求めてみましょう．

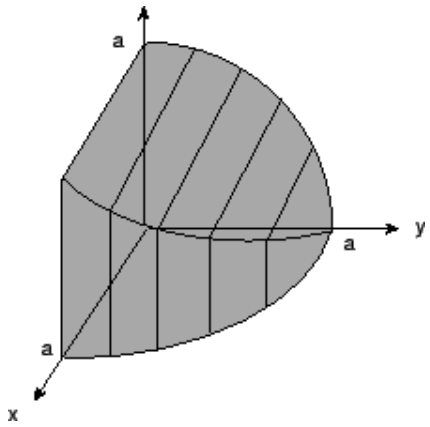


図 7.15　2 つの円柱面の共通部分

解

$$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2}, \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

より求める立体は x, y, z 軸に対して対称．したがって

$$\begin{aligned} V &= 2\iint_\Omega \sqrt{a^2 - x^2}dxdy = 8\int_0^a dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}dy \\ &= 8\int_0^a (a^2 - x^2)dx = 8\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{16a^3}{3} \ \blacksquare \end{aligned}$$

確認問題

1.　次の図形の面積を求めよう．

(a)　曲線 $r = 1 - \cos\theta$ で囲む部分

(b)　$r = 3\cos\theta$ の内側で $r = \frac{3}{2}$ の外側の部分

(c)　$r = 3\cos\theta$ の内側で $r = \cos\theta$ の外側の部分

2.　次の曲面の曲面積を求めよう．

(a)　$z^2 = x^2 + y^2$ の $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, $z \geq 0$ の部分

(b)　平面 $x + y + z = 2$ の $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の部分

(c)　双曲方物面 $z = xy$ の円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ の内部にある部分

3.　次の立体の体積を求めよう．

(a)　放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2y$ によって囲まれた部分

(b)　放物面 $z = x^2 + y^2$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq 1$ によって囲まれる部分

演習問題

1.　次の図形の面積を求めよう．

(a) 曲線 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ $(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2})$ と両軸とで囲む部分

(b) $r = a\cos 3\theta$ $(a > 0)$ の囲む部分

(c) 曲線 $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ と $y = \dfrac{x^2}{4}$ で囲む部分

2. 次の曲面の曲面積を求めよう．

(a) 半径 a の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(b) $z = xy$ の $x^2 + y^2 \leq a^2$ に対応する部分

(c) 円柱 $x^2 + z^2 = a^2$ が円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ によって切り取られる部分

(d) $y = mx$ $(0 \leq x \leq k)$ を x 軸の回りに回転してできる曲面 $(m > 0)$

3. 次の立体の体積を求めよう．

(a) 円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ の $0 \leq z \leq x$ の部分

(b) $0 \leq z \leq 1 - x^2, x \leq 1 - y^2, x \geq 0, y \geq 0$ で定まる閉領域

(c) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ の共通部分

(d) 円錐面 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ と平面 $z = x$ および $x = 0$ で囲まれる部分

7.6　3 重積分 (triple integrals)

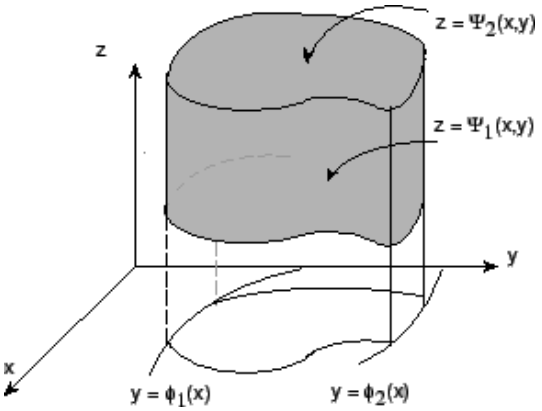


図 7.16　3 重積分

2 重積分と同様に 3 重積分も累次積分として表わすことができます．xyz 空間の有界閉領域を T とし， T の xy 平面への正射影を Ω_{xy} とすると， T は

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega_{xy}, \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

で表わせます．これより

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} [\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz]dxdy$$

が成り立ちます．さらに，

$$\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

ならば，

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

が成り立ちます．

3 重積分についても 2 重積分の場合と同様に次の定理が成り立ちます．

定理 7.6

変数変換 $\Phi : \begin{cases} x = \phi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \xi(u,v,w) \end{cases}$ によって， xyz 空間の有界な閉領域 T と uvw 空間の有界な閉領域 T' が 1 対 1 に対応し， ϕ, ψ, ξ が C^1 級で

$$J = J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0$$

とする．このとき， $f(x,y,z)$ が T 上で連続ならば，

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T'} f(\phi(u,v,w), \psi(u,v,w), \xi(u,v,w))|J|dudvdw$$

が成り立つ．

ここで変数変換の中で特によく用いられる円柱座標変換と球面座標変換について学びます．

系 7.1

[円柱座標変換]

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J(r,\theta,z)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

より

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dzrdrd\theta$$

例題 7.11

$T = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$ のとき．次の値を求めてみましょう．

$$I = \iiint_T \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdydz$$

解 円柱座標変換を用いると，T は

$$T' = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, -\sqrt{1-r^2} \le z \le \sqrt{1-r^2}\}$$

にうつるから，

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{T'} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r dr = 2\pi \cdot \left[r^2\right]_0^1 = 2\pi \quad \blacksquare \end{aligned}$$

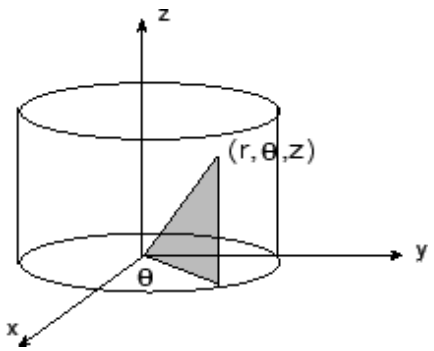


図 7.17　円柱座標変換

系 7.2

[球面座標変換]

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$$|J(\rho,\phi,\theta)| = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & \rho\sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\phi$$

より

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T'} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

例題 7.12

$T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ のとき，次の値を求めてみましょう．

$$I = \iiint_T \frac{dxdydz}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$$

解 球面座標変換を用いると，T は

$$T' = \{(\rho, \phi, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

にうつるから，

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{T'} \frac{\rho^2 \sin\phi}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(-\rho\sqrt{1-\rho^2} + \sin^{-1}\rho\right)\right]_0^1 \\ &= 4\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

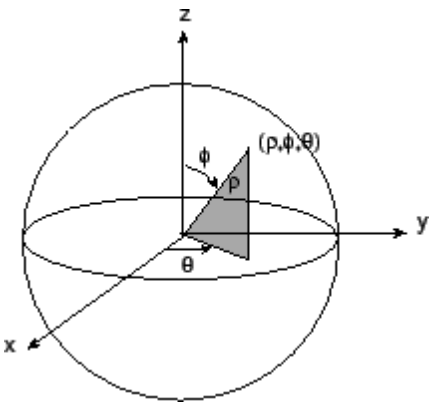


図 7.18　球面座標変換

2 重積分の応用で $dxdy$ を面積として考えました．同じようにして，ここでは， $dxdydz$ を体積として考えることができます．

もし密度 ρ がそれぞれの点で連続的に変化し， $\rho = f(x, y, z)$ ならば，立体 T の質量 M は

$$M = \iiint_T f(x, y, z) dxdydz$$

で表わせます．特に密度 $\rho = f(x, y, z) = 1$ のとき

$$\iiint_T dxdydz$$

は立体 T の体積と考えることができます．

例題 7.13

次の図 7.19 のような三角錐 T の体積を求めてみましょう．

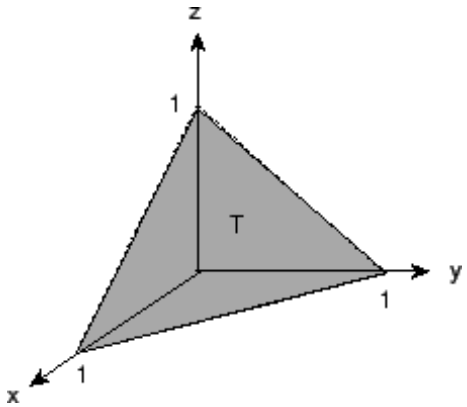


図 7.19　三角錐

解 3 重積分を計算するために T を適当な座標軸面に正射影します．ここでは xy 平面に正射影します．ここで V-simple を用いると

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

これより

$$T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

よって

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega_{xy}} [\int_0^{1-x-y} dz] dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dydx \\ &= \int_0^1 \left[(1 - x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{(1 - x)^2}{2} dx \\ &= -\left[\frac{(1 - x)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となります．■

実際，体積を求めるのが目的ならば，底面積 × 高さ $\times \dfrac{1}{3}$ よりすぐに求まります．そこで，ここでは，三角錐の各点における密度が異なる場合を考えてみます．

例題 7.14

この三角錐 T の密度が $\rho(x, y, z) = xy$ のときの質量を求めてみましょう．

解

$$M = \iiint_T xydxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xydzdydx$$

ここで

$$\int_0^{1-x-y} xydz = xy(1-x-y) = x(1-x)y - xy^2$$

より

$$\begin{aligned}\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xydzdy &= \int_0^{1-x}(x(1-x)y - xy^2)dy \\ &= \left[\frac{1}{2}x(1-x)y^2 - \frac{1}{3}xy^3\right]_0^{1-x} = \frac{1}{6}x(1-x)^3\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}M &= \int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)dx \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{120} \ \blacksquare\end{aligned}$$

体積，質量と求めてきたので最後に重心を求めてみましょう．まず平面上に n 個の点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ からなる質点系があって，点 P_i の座標は $\mathrm{P}_i(x_i, y_i)$．また P_i の質量が M_i で与えられているとします．このときこれらの点がつりあうように x 軸に垂直な線 $x = \bar{x}$ を引くと，この線に対して反時計回りのモーメントと時計回りのモーメントはつりあっているはずです．よって

$$\sum_{i=1}^n M_i(x_i - \bar{x}) = 0$$

書き直すと

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i x_i}{\sum_{i=1}^n M_i}$$

同様に

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i y_i}{\sum_{i=1}^n M_i}$$

このようにして表わされた点 $(\bar{x}, \bar{y})$ を **質点系の重心 (centroid)** といいます．

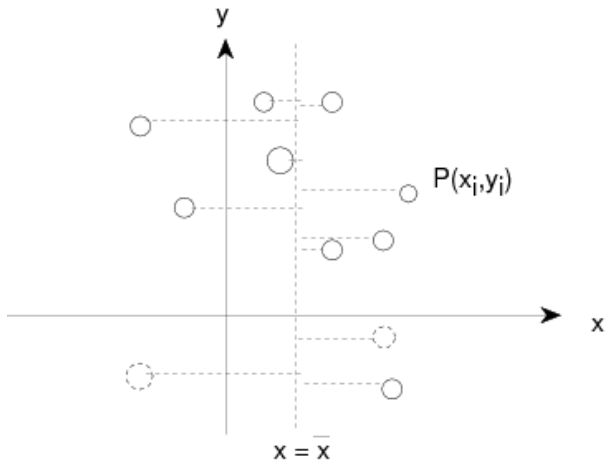


図 7.20　質点系の重心

平面上の有界閉領域 Ω の各点 $\mathrm{P}(x,y)$ に密度 $\rho(x,y)$ が与えられているときは，Ω の分割 $\Delta : \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ をとり，それぞれの Ω_i の中から任意に点 $\mathrm{P}_i(x_i, y_i)$ を選び，質点系 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ の重心 (x_Δ, y_Δ) を考えます．Ω_i の面積を ΔS_i とおくと

$$x_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n \rho(\mathrm{P}_i) x_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\mathrm{P}_i) \Delta S_i}, \quad y_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n \rho(\mathrm{P}_i) y_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\mathrm{P}_i) \Delta S_i}$$

となります．ここで $|\Delta| \to 0$ とすると x_Δ, y_Δ はそれぞれ次の $\bar{x}, \bar{y}$ に収束します．

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_\Omega \rho(x,y) x dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_\Omega \rho(x,y) y dx dy$$

ただし，$M = \iint_\Omega \rho(x,y) dx dy$ で**質量 (mass)** を表わします．

空間の閉領域 T に，密度 $\rho = \rho(x,y,z)$ が与えられている場合にも，同様にして重心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ が次のように定まります．

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_T \rho(x,y,z) x dx dy dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_T \rho(x,y,z) y dx dy dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_T \rho(x,y,z) z dx dy dz, \quad M = \iiint_T \rho(x,y,z) dx dy dz$$

例題 7.15

さて，重心の復習が終わったところで上の三角錐 T の重心を求めてみましょう．

解

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{M}\iiint_T xyxdxdydz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x^2ydzdydx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{1-x} x^2y(1-x-y)dydx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1 \left[(\frac{x^2(1-x)y^2}{2} - \frac{x^2y^3}{3})\right]_0^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^3}{6}dx = \frac{1}{6M}\int_0^1 (x^2-3x^3+3x^4-x^5)dx \\
&= \frac{1}{6M}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{360M}
\end{aligned}
$$

ここで $M = \dfrac{1}{120}$ より $\bar{x} = \dfrac{1}{3}$. 残りの $\bar{y}, \bar{z}$ は各自求めて下さい. ■

確認問題

1. 次の 3 重積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_0^a\int_0^b\int_0^c dxdydz$　(b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^y ydzdydx$

2. 次のものを累次 3 重積分で表そう．値は求めなくてもよい

(a) ボール $x^2+y^2+z^2 \le r^2$ の質量．ただし，密度は中心からの距離に比例するとする．

(b) 平面 $z=1$ と曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ で囲まれた円錐の質量．ただし，密度は原点からの距離に比例するとする．

(c) 放物面 $z=4-x^2-y^2$ と曲面 $z=2+y^2$ で囲まれた部分の体積.

3. 次の閉領域の重心を求めよう．

(a) 密度一定のとき， $y=x$ と $y=x^2$ とで囲まれた閉領域

(b) 密度一定のとき， $x^2=4y$ と $x-2y+4=0$ とで囲まれた閉領域

(c) 密度一定のとき， $y=x^2-2x$ と $y=6x-x^2$ とで囲まれた閉領域

演習問題

1. $T=\{(x,y,z): 0\le x\le y\le z\le 1\}$ のとき，次の 3 重積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\iiint_T dxdydz$　(b) $\displaystyle\iiint_T e^{x+y+z}dxdydz$

2. 次の 3 重積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\iiint_T dxdydz,\ T=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3\}$

(b) $\displaystyle\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dxdydz, T=\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$

3. 次の閉領域の重心を求めよう．

(a) 密度一定のとき， $y=x$ と $y=6x-x^2$ とで囲まれた閉領域

(b) 密度が中心からの距離に比例するときの，半球 $x^2+y^2+z^2\le a^2, z\ge 0$

(c) 密度一定のとき，底面の半径が a，高さが h の直円錐.

(d) 密度一定のとき， $ax\le x^2+y^2\le a^2$ であらわせる領域

(e) 例題 7.6 の三角錐の重心 $\bar{y},\bar{z}$

(f) 密度が原点からの距離に比例するときの， $ax\le x^2+y^2\le a^2$ であらわせる領域

第 8 章

ベクトル解析 (VECTOR ANALYSIS)

8.1　曲面 (surface)

xy 平面上の有界閉領域 Ω 上で定義された関数 $z = f(x, y)$ が C^1 級であるとき，

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$$

は滑らかな曲面であるということを学びました．ここで S 上の点 P の位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ が 2 変数 u, v の関数であるとき，

$$S = \{\mathbf{r} : \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\}$$

を曲面 S のパラメター表示といいます．

例題 8.1

$z = f(x, y) = 1 - x - y$ をパラメーター表示せよ．
解 $x = u, y = v$ とすると， $z = 1 - u - v$ よって

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v) \blacksquare$$

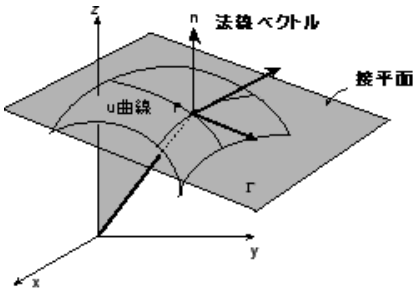


図 8.1　接平面と法線ベクトル

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ において v を固定して u だけ変化させると，$\mathbf{r}$ は曲面 S 上で 1 つの曲線を描きます．この曲線を u **曲線 (u-curve)** といいます．同様に v **曲線 (v-curve)** も定義されます．また，

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u) - \mathbf{r}(u)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\mathbf{r}(v + \Delta v) - \mathbf{r}(v)}{\Delta v}$$

はそれぞれ u 曲線， v 曲線の接線ベクトルとなります．この u 曲線， v 曲線の接線ベクトルが 1 次独立のとき，つまり $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ のとき，パラメター表示された曲面 $S = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} = (x(u, v), y(u, v), x(u, v))\}$ は滑らかな曲面になります．

曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上の点 $\mathrm{P}(u, v)$ において，その点を通り，2 つのベクトル $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ によって決定される平面を，点 P における曲面の **接平面 (tangent plane)** といいます．また接平面に垂直なベクトル $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ を**法線ベクトル (normal vector)** といいます．図 8.1 参照．

例題 8.2

$z = 1 - x^2 - 2y$ の点 $(1, 1, -2)$ における接平面を求めてみましょう．

解 $u = x, v = y$ とすると，

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - 2y)$$

これより接平面 Γ の法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}_\Gamma$ を求めると

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, -2x), \mathbf{r}_y = (0, 1, -2)$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2x, 2, 1)$$

より $\hat{\mathbf{n}}_\Gamma = (2x, 2, 1)$ よって点 $(1, 1, -2)$ における接平面の方程式は

$$((x, y, z) - (1, 1, -2)) \cdot (2, 2, 1) = 2x + 2y + z - 2 = 0 \blacksquare$$

空間の点 P の位置ベクトルが， u, v の関数 $P(u, v)$ で与えられ， (u, v) が uv 平面の領域 Γ を動くとき，点 P は空間内に 1 つの曲面を描きます．このとき点 P が描く曲面の面積 S は 2 重積分の応用として $z = f(x, y)$ であたえられる曲面の面積を求めたときと同じようにして

$$S = \iint_\Gamma \| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \| du dv$$

で与えられます．このとき

$$dS = \| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \| du dv$$

を曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ の **面積素 (area element)** といいます．

例題 8.3

曲面の方程式が $z = f(x, y)$ であたえられているとき，面積素を求めて，曲面積の公式を導いてみましょう．

解 $u = x, v = y$ とおくと，

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

よって

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x),\ \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y)$$

これより，面積素は

$$\begin{aligned} dS &= \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\| dxdy \\ &= \|\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}\| dxdy = \|(-f_x, -f_y, 1)\| dxdy = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dxdy \end{aligned}$$

次に $z = 0$ であたえられる平面を Ω とすると，

$$S = \iint_\Omega \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dxdy \ \blacksquare$$

例題 8.4

球面の位置ベクトルが $\mathbf{r}(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u),\ 0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi$ で与えられている．これを用いて球の表面積を求めてみましょう．

解

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0) \end{aligned}$$

より

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (a^2 \sin^2 u \cos v, a^2 \sin^2 u \sin v, a^2 \sin u \cos u)$$

$$\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\| = a^2 \sin u$$

よって

$$S = \iint_\Gamma \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\| dudv = \int_0^{2\pi} a^2 dv \int_0^\pi \sin u du = 4\pi a^2$$

となります．$\blacksquare$

演習問題

1. 次の曲面の接平面の方程式を求めよう．

(a) $z = (x^2 + y^2)^2$: 点 $(1, 1, 4)$　(b) $x^3 + y^3 = 3xyz$: 点 $(1, 2, \frac{3}{2})$

(c) $z = \sin(x \cos y)$: 点 $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$

2. 曲面の方程式が次の形で与えられたとき，曲面の面積素を求めよう．

(a) $\mathbf{r} = (u, v, u^2 + v^2)$　(b) $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, 2v)$　(c) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(d) $F(x, y, z) = 0$

8.2 スカラー場とベクトル場 (scalar field and vector field)

空間の領域 D の各点 P に対して実数 $f(\mathrm{P})$ が対応しているとき，3 変数関数 $f(\mathrm{P})$ を D の上での **スカラー場 (scalar field)** といいます．同様に空間の領域 D の各点 P に対してベクトル $\mathbf{F}(\mathrm{P})$ が対応しているとき，3 変数ベクトル関数 $\mathbf{F}(\mathrm{P})$ を D の上での **ベクトル場 (vector field)** といいます．ベクトル $\mathbf{F}$ の成分表示を $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ とすると，

$$\mathbf{F}(\mathrm{P}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

となります．また， F_1, F_2, F_3 が連続なとき， $\mathbf{F}$ は連続であるといいます．

例題 8.5

ベクトル場 $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ をグラフで表わしてみましょう．

解 xy 平面上の点 (x, y) に対して，ベクトル $(-y, x)$ が対応しているので，グラフを描こうとすると 4 次元の空間が必要になります．残念ながら 4 次元の空間は用意できないので，次のような方法を用いてベクトル場を表現します．まず， xy 平面上の点 (x_0, y_0) を選んだら，その点におけるベクトル $\mathbf{F}(x_0, y_0)$ を，点 (x_0, y_0) を始点として描きます．

$$\mathbf{F}(1, 0) = (0, 1), \mathbf{F}(2, -1) = (1, 2), \mathbf{F}(3, 2) = (-2, 3)$$

より図 8.2 を得ます．

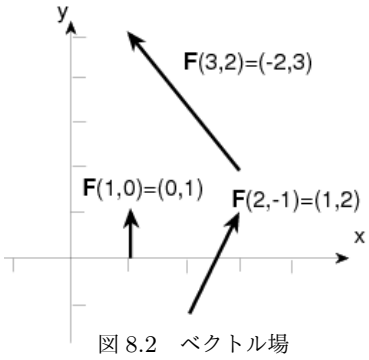


図 8.2　ベクトル場

図 8.2 をみていると，ベクトルがある曲線の接線になっていることに気づきます．この曲線を **流線 (streamlines)** または **力線 (lines of force)** といいます．一般に，**F** が流体の速度を表わすときには，流れに沿って引いた曲線を流線といい，**F** が磁場を表わすときは，磁場の向きに沿って引いた曲線を磁力線といいます．同様に，**F** が電場を表わすときは，電場の向きに沿って引いた曲線を電力線，**F** が電磁場を表わすときは，電磁場の向きに沿って引いた曲線を電磁力線といいます．

例題 8.6

ベクトル場 $\mathbf{F}(x,y)=(-y,x)$ の流線を求めてみましょう．
解 $f(x,y)=c$ を流線の方程式とすると $\nabla f(x,y)=(f_x,f_y)$ は $f(x,y)=c$ の法線ベクトルを表わすので，

$$\nabla f(x,y)\cdot\mathbf{F}(x,y)=0 \text{ よって } (f_x,f_y)\cdot(-y,x)=0$$

これより， $-yf_x+xf_y=0$．ここで $f(x,y)=c$ の接線の傾きは

$$f_x dx+f_y dy=0 \text{ より } \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$$

に注意すると

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{x}{y}$$

より $xdx+ydy=0$．これより $f_x=x, f_y=y$ となるので，

$$f(x,y)=\int f_x dx=\frac{x^2}{2}+c(y) \tag{8.1}$$

次に式 8.1 を y で偏微分すると

$$f_y=c'(y)=y \text{ より } c(y)=\frac{y^2}{2}$$

よって求める流線は

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c \ \blacksquare$$

砂場に磁石を持っていって砂鉄を集めてきます．この砂鉄を紙の上に撒き，紙の下に U 磁石を置くと砂鉄は磁力線に沿って並び，磁場が強いところほどたくさんの砂鉄がつくことを観察したことがあるでしょう．ここではこれらの現象を考えてみます．

電場 (electric field)

電荷 q から点 P までの距離を r とし， q から P に向かう単位ベクトルを $\mathbf{r}_0$ とすると，点 P における電場は次式で与えられます．

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{r}_0$$

ただし， $\epsilon_0=8.85418782\times10^{-12}[\mathrm{s^2C^2/kgm^2}]$ で真空の誘電率といいます．

万有引力場 (universal gravitational field)

原点にある物質量 M の物体が点 P (x, y, z) にある物質量 m の物体にはたらく万有引力場 (一般に万有引力とよばれる) を $\mathbf{F}$ すると

$$\mathbf{F} = -\frac{\kappa M m}{r^3}(x, y, z) = -\frac{\kappa M m}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

で与えられます.

さて， $f(x, y)$ の全微分を考えたとき，ベクトル $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ を $f(x, y)$ の勾配とよび，$\nabla f(x, y)$ で表わしました．また，勾配は等高線に直交するベクトルだということも学びました．ここでは空間のある領域で定義されたスカラー場に対し，

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

で定義されるベクトル場 grad$f$ について考えてみます．ここで ∇f は $f(x, y, z)$ に演算子

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

をほどこしたものとみることができます.

スカラー場 f に対して， $f(x, y, z) = c$ (c 定数) で定義される曲面を，スカラー場 f の **等位面 (level surface)** といい， c の値を変化させて得られる等位面の群を等位面群といいます.

例題 8.7

点 (x_0, y_0, z_0) を通る勾配は，点 (x_0, y_0, z_0) を通る等位面に直交することを示してみましょう.

解 点 (x_0, y_0, z_0) を通る等位面を

$$f(x, y, z) = c$$

とし，この等位面上で点 (x_0, y_0, z_0) を通る任意の曲線を

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

とすると， $f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t)) = c$ が成り立つので，この両辺を t について微分すると，

$$f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t = (f_x, f_y, f_z) \cdot (x_t, y_t, z_t) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

よって，すべての等位面上の曲線の接線に直交するので，勾配は等位面に直交します． ■

点 P において 単位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ を方向単位ベクトルとします．また，点 P を通り $\hat{\mathbf{u}}$ を方向ベクトルとする直線を，点 P からの距離 s を用いて， $\mathbf{r}(s)$ で表わします．すると点 P における，スカラー場 f の $\hat{\mathbf{u}}$ 方向の方向微分は

$$\frac{df(\mathbf{r}(s))}{du} = \lim_{s \to 0} \frac{f(p + s\hat{\mathbf{u}}) - f(p)}{s}$$

で与えられます (6.5 参照)．よって

$$\begin{aligned}\frac{df(\mathbf{r}(s))}{du} &= \lim_{s\to 0}\frac{f(p+s\hat{\mathbf{u}})-f(p)}{s}\\ &= \frac{d}{ds}f(x(s),y(s),z(s))\mid_{s=0}\\ &= f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s\\ &= \nabla f\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla f\cdot\hat{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

例題 8.8

点 $(1,2,3)$ で曲面 $z^2 = x^2+2y^2$ に直交する単位ベクトル (法線単位ベクトル) と $(1,3,-1)$ 方向の方向微分と接平面の方程式を求めてみましょう．

解

$$f(x,y,z) = x^2+2y^2-z^2 \text{とおくと，}$$

等位面 $f(x,y,z)=0$ はもとの曲面と同じ．また，法線ベクトルは ∇f で与えられるので，

$$\nabla f = (2x,4y,-2z), \nabla f\mid_{(1,2,3)} = (2,8,-6)$$

よって

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(2,8,-6)}{\sqrt{4+64+36}} = \frac{(2,8,-6)}{\sqrt{104}}$$

次に点 $(1,2,3)$ での $(1,3,-1)$ 方向の方向微分を求めるため方向単位ベクトルを求めると $\hat{\mathbf{u}} = \dfrac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}}$．よって方向微分は

$$\nabla f\cdot\hat{\mathbf{u}} = (2,8,-6)\cdot\frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}} = \frac{32}{\sqrt{11}}$$

また，接平面の方程式は

$$2(x-1)+8(y-2)-6(z-3)=0 \text{ すなわち } 2x+8y-6z=0$$

となります．■

点 P の位置ベクトルを $\mathbf{r}=(x,y,z), r=\|\mathbf{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると，万有引力の大きさや光の強さなど距離に反比例するものは少なくありません．これらは

$$f(x,y,z) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

とおけます．ここで $f(x,y,z)$ の勾配を求めてみると，

$$\begin{aligned}f_x &= c\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -c\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) = \frac{-cx}{\|\mathbf{r}\|^3}\\ f_y &= \frac{-cy}{\|\mathbf{r}\|^3}\\ f_z &= \frac{-cz}{\|\mathbf{r}\|^3}\end{aligned}$$

より

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (\frac{-cx}{r^3}, \frac{-cy}{r^3}, \frac{-cz}{r^3}) = -c\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

したがって， ∇f は万有引力場つまりベクトル場と等しくなります．このように

定義 8.1

ベクトル場 $\mathbf{F}$ がスカラー場 f の勾配であるとき，つまり $\nabla f = \mathbf{F}$ のとき ベクトル場 $\mathbf{F}$ を **保存場 (conservative field)** という．また，このときスカラー場 f を ベクトル場 $\mathbf{F}$ の **スカラーポテンシャル (scalar potential)** といい，$\mathbf{F}$ はスカラーポテンシャル f をもつという．

例題 8.9

点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, z)$，ベクトル場を $\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$ とすると，このベクトル場は原点を除くどの領域でも保存場であり

$$f(x, y, z) = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

は $\mathbf{F}$ のスカラーポテンシャルであることを示してみましょう．

解

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\|\mathbf{r}\|} \\ f_y &= \frac{y}{\|\mathbf{r}\|} \\ f_z &= \frac{z}{\|\mathbf{r}\|} \end{aligned}$$

より $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \mathbf{F}$．よって， $\mathbf{F}$ は保存場であり

$$f(x, y, z) = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

は $\mathbf{F}$ のスカラーポテンシャルとなります． ■

演習問題

1. 次の曲面の法線単位ベクトルと接平面を与えられた点で求めよう．

(a) $z = (x^2 - y^2)$： 点 $(1, 1, 0)$　　(b) $2x - 4y^2 + z^3 = 0$： 点 $(-4, 0, 2)$

(c) $\cos x + \sin y + z = 1$： 点 $(0, \pi, 0)$

2. 中心が原点にある鉄球の密度は次の関数で与えられている．$\rho(x, y, z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)}$

(a) 点 $(1, 0, 1)$ ではどの方向が密度の増加が一番大きいか求めよう．

(b) 点 $(1, 0, 1)$ ではどの方向が密度の増加が一番小さいか求めよう．

3. 次のベクトル場 $\mathbf{F}$ の力線を求めよう．

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (-2y, x)$　　(b) $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$

8.3　ベクトル場の発散 (divergence of vector field)

空間のある領域で定義されたベクトル場 $\mathbf{F}$ を考えます．$\mathbf{F}$ の成分表示を

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

とします．このときベクトル場の **発散 (divergence)** とよばれるスカラー場 div $\mathbf{F}$ を次のように定義します．

定義 8.2

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ここで演算子 ∇ を用いると，div $F = \nabla \cdot \mathbf{F}$ と表わすことができます．

例題 8.10

$\mathbf{F} = (3xy, x^2y, y^2z)$ の発散を求めてみましょう．
解

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= 3y + x^2 + y^2\end{aligned}$$

となります．■

次に，ベクトル場の発散とは何なのかを，実際の物理現象を使いながら考えてみましょう．ここでは液体，ガスなどが空間に広がっていく動きを考えます．このときその空間での粒子の速度はベクトル場 $\mathbf{v}(x, y, z) = (v_1, v_2, v_3)$ を形成します．ここで空間の点 P を原点とする直交座標系を考え，図 8.3 のような小さな直方体 $\Delta x \Delta y \Delta z$ が液体の中にあると想像します．

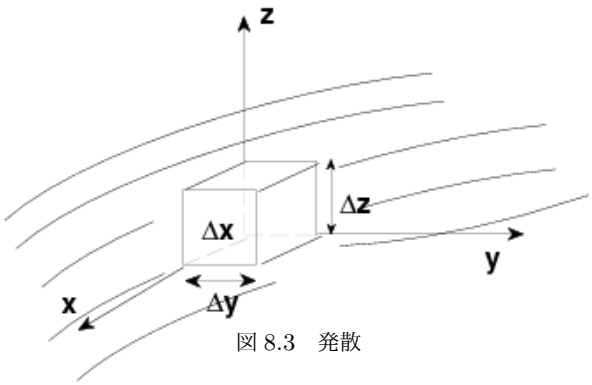


図 8.3　発散

まず，直方体の中での単位時間内での質量変化を計算してみます．点 $(0, y, z)$ で直方体に入っていく流体の，直方体の面に垂直なベクトルの x 成分は ρv_1，ただし ρ は液体の密度とします．

次に直方体から出てくる流体の，直方体の面に垂直なベクトルの x 成分は

$$\begin{aligned}\rho v_1(\Delta x, y, z) &= \rho v_1(\Delta x, y, x) - \rho v_1(0, y, z) + \rho v_1(0, y, z) \\ &= \frac{\rho v_1(\Delta x, y, z) - \rho v_1(0, y, z)}{\Delta x}\Delta x + \rho v_1(0, y, z) \\ &\approx \frac{\partial \rho v_1}{\partial x}\Delta x + \rho v_1(0, y, x)\end{aligned}$$

で表わせます．よって，単位時間 Δt 内に後ろの面から流入する物質の質量は

$$\rho v_1(0, y, z)\Delta y \Delta z \Delta t$$

また，前の面から流出する物質の質量は

$$\rho v_1(0, y, z)\Delta y \Delta z \Delta t + \left(\frac{\partial \rho v_1}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z \Delta t$$

同様のことが残りの 4 つの面でも起こります．そこで，これらを全て加えると単位時間内 Δt 内にこの直方体 $\Delta x \Delta y \Delta z$ から涌きだす質量は

$$\left(\frac{\partial \rho v_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_3}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\Delta x \Delta y \Delta z$$

となります．よって単位時間 Δt 内に単位体積から涌き出す質量は

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

これは点 P における $\rho \mathbf{v}$ の発散です．このことから発散は流体が単位時間内に単位体積から涌き出す質量と考えることができます．これより点 P において

$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} > 0$ のとき涌き出し
$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} < 0$ のとき飲み込み
$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$ のとき平衡

とよびます．

特に， $\mathbf{F}$ が保存場のとき $\mathrm{div}\mathbf{F}$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla \cdot \nabla f \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\end{aligned}$$

と表わせます．これをスカラー場 f の **ラプラシアン (Laplacian)** といい， $\nabla^2 f$ または Δf で表わします．また，偏微分方程式

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

を **ラプラスの方程式 (Laplace equation)** といいます．

定義 8.3

空間のベクトル場 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ に対して $\mathbf{F}$ の **回転 (curl)**， curl$\mathbf{F}$ を次のように定義します．

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\left(\frac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial \mathrm{z}} \right), \left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial \mathrm{x}} \right), \left(\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{y}} \right) \right)$$

形式的に

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

と表わします．

例題 8.11

$\mathbf{F} = (z, x^2, 2y)$ の回転を求めてみましょう．

解

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x^2 & 2y \end{vmatrix} = (2, 1, 2x) \blacksquare$$

ベクトル場の回転を求めるのはそれほど難しくないことですが，ベクトル場の回転とは何かは分かりにくいものとなっています．そこで次の例を考えながらベクトル場の回転とは何かを理解しましょう．

$\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ のとき，このベクトル場によって点 A (x_A, y_A), B$(x_A + \Delta x, y_A)$, C$(x_A + \Delta x, y_A + \Delta y)$, D$(x_A, y_A + \Delta y)$ からなる四辺形 ABCD をどれだけ回転させれるか調べてみます．

まず，点 A (x_A, y_A) での水平方向の成分は $F_1(x_A, y_A)$．点 D $(x_A, y_A + \Delta y)$ での水平方向の成分は

$$F_1(x_A, y_A) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_A, y_A)\Delta y$$

この 2 つの値の差，つまり， 水平方向の成分の差 $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x_A, y_A)\Delta y$ が正のとき，四辺形 ABCD は時計回りに回転します．また，点 A,B での垂直方向の成分の差 $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x_A, y_A)\Delta x$ が正のとき，四辺形 ABCD は反時計回りに回転します．よって

$$\|\mathrm{curl}\mathbf{F}\| = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

はベクトル場 $\mathbf{F}$ が四辺形に与える回転力の大きさとなり，その力の方向は右ねじの法則より四辺形に垂直な方向 $\hat{\mathbf{k}}(\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y})$ となります．これが curl の名前の由来です．このことから $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ のときベクトル場 $\mathbf{F}$ は渦なしとなります．

例題 8.12

$\mathbf{F}$ が保存場ならば，$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ を示してみましょう．

解 $\mathbf{F}$ が保存場より，$\mathbf{F} = \nabla f$ となる f が存在します．よって curl$\mathbf{F}$ を求めると

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = \mathbf{0} \blacksquare$$

演習問題

1. $\mathbf{F} = (3xyz^2, 2xy^3, -x^2yz), f = 3x^2 - yz$ のとき点 P$(1, -1, 1)$ におけるつぎのものを求めよう．

(a) grad$f$　(b) div$\mathbf{F}$　(c) curl$\mathbf{F}$　(d) grad(div $\mathbf{F}$)　(e) div(grad$f$)

(f) curl(curl$\mathbf{F}$)　(g) $\nabla \times (f\mathbf{F})$　(h) $\nabla \times (\nabla f)$

8.4 線積分 (line integrals)

2 点 R，Q を結ぶ曲線 C が与えられているとします．ただし，この曲線は滑らかな曲線とします．C に沿って測った弧長を s とします．すると 5 章で学んだように曲線上の点 (x, y, z) は弧長 s をパラメターとして表わすことができます．よって曲線 C の方程式は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

で表わせます．ただし $s = a, b$ $(a < b)$ にはそれぞれ点 R，Q が対応しているとします．このとき曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 上の任意の点 P (x, y, z) に対して定義されたスカラー場を $f(\mathrm{P}) = f(x, y, z)$ とします．

曲線 C を n 個の弧 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ に分割し，この分割を Δ で表わします．各曲線 s_i の弧長を Δs_i とし，s_i の中に任意の点 P_i をとり次の和を考えます．

$$J(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{P}_i)\Delta s_i$$

ここで，この分割を細かくし Δ を限りなく小さくしたとき $J(\Delta)$ が極限値 J に近づくならば，この極限値 J をスカラー場 f の C に沿っての **線積分 (line integral)** といい，

$$\int_C f(\mathrm{P})ds$$

で表わします．曲線 C が閉じているときは

$$\oint_C f(\mathrm{P})ds$$

と表わします．

線積分の定義は，今までの積分と同じ Riemann 和によるものなので，線積分においても次の公式が成り立つのは明らかです．

1. $\int_C kf(\mathrm{P})ds = k\int_C f(\mathrm{P})ds$
2. $\int_C [f(\mathrm{P}) + g(\mathrm{P})]ds = \int_C f(\mathrm{P})ds + \int_C g(\mathrm{P})ds$

また，曲線 C が滑らかではないが有限個の滑らかな曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ をつなげてできているとき，この曲線を **区分的に滑らかな曲線 (piecewise smooth curve)** といい，このような曲線に沿っての線積分は

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}$$

で表わせます．

例題 8.13

$\displaystyle\int_C (x^3 + y^4)ds$ を線積分してみましょう．ただし， C は点 $(0,0,0)$ と $(1,1,1)$ を結ぶ直線とします．

解 点 $(0,0,0)$ と点 $(1,1,1)$ を結ぶ直線をパラメター表示すると

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

となります．よって曲線 C は $\mathbf{r}(t) = (t,t,t)$ で表わされ，曲線 C の弧長 s は

$$s(t) = \int_0^t \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|dt = \int_0^t \|(1,1,1)\|dt = \sqrt{3}t$$

となります．これより $ds = \sqrt{3}dt$ となり，求める線積分は

$$\int_C (x^3 + y^4)ds = \int_0^1 (t^3 + t^4)\sqrt{3}dt = \sqrt{3}(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = \frac{9\sqrt{3}}{20} \ \blacksquare$$

次に向きのついた曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ と C の上で定義されたベクトル場 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ が与えられているとします．ここで C の接線単位ベクトル $\hat{\mathbf{t}}$ を曲線 C の正の方向 (長さが増加する方向) での接線単位ベクトルとします．すると $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}$ は C 上で定義されたスカラー場となるので，このスカラー場の曲線 C に沿っての線積分は

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds$$

で表わせ，これをベクトル場 $\mathbf{F}$ の向きのついた曲線 C に沿っての線積分といいます．特に

$$\hat{\mathbf{t}}ds = \frac{d\mathbf{r}}{ds}ds = d\mathbf{r}$$

に注意すると

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

で表わすことができます．

ここでベクトル場 $\mathbf{F}$ が電場の場合を考えると， $\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ は正の電荷が点 P から点 S まで曲線 C にそって移動するとき，電場 $\mathbf{F}$ が行なう単位電荷あたりの仕事と考えることができ，これを 2 点間の電位差または電圧といいます．

例題 8.14

質点が楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の回りを一周するのに行なった仕事を求めてみましょう．ただし，ベクトル場は

$$\mathbf{F}=(3x-4y+2z,4x+2y-3z^2,2xz-4y^2+z^3)$$

解 $x=4\cos\theta, y=3\sin\theta$ とおくと．

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(4\cos t,3\sin t,0),\ d\mathbf{r}(t)=(-4\sin t,3\cos t,0)dt$$

また，

$$\mathbf{F}=(12\cos t-12\sin t,16\cos t+6\sin t,-36\sin^2 t)$$

よって

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}[48-30\sin t\cos t]dt=96\pi \ \blacksquare$$

例題 8.15

$\displaystyle\int_C (x^2y,x+y)\cdot\hat{\mathbf{t}}ds$ を求めてみましょう．ただし， C は曲線 $y=x^2$ の点 $(0,0)$ と点 $(2,4)$ を結ぶ曲線とします．

解

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{t}}ds&=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\&=\int_C (x^2y,x+y)\cdot(dx,dy)=\int_C (x^2ydx+(x+y)dy)\\&=\int_0^2 x^2x^2dx+\int_0^2 (x+x^2)(2xdx)\\&=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2+\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{4}x^4\right]_0^2\\&=\frac{296}{15}\end{aligned}$$

別解　曲線 C をパラメター表示すると

$$C:\mathbf{r}(t)=(x,y)=(t,t^2),\ 0\le t\le 2$$

よって

$$d\mathbf{r}=(1,2t)dt,\ \mathbf{F}=(x^2y,x+y)=(t^4,t+t^2)$$

これより

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{t}}ds &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\ &= \int_0^2 (t^4, t+t^2)\cdot(1,2t)dt\\ &= \int_0^2 (t^4+2t^2+2t^3)dt\\ &= \left[\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+\frac{2}{4}t^4\right]_0^2\\ &= \frac{296}{15}\ \blacksquare\end{aligned}$$

この例題で $-C$ を曲線 C の向きを $(2,4)$ から $(0,0)$ に変えた曲線とすると，曲線 $-C$ のパラメター表示は

$$-C : \mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(2-t) = (2-t, (2-t)^2),\ 0 \le t \le 2$$

となります．よって

$$d\mathbf{R} = (-1, -2(2-t))dt,\ \mathbf{F} = (x^2y, x+y) = ((2-t)^4, (2-t)+(2-t)^2)$$

これより，

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_0^2 ((2-t)^4, (2-t)+(2-t)^2)\cdot(-1,-2(2-t))dt$$

ここで $2-t=u$ とおくと， $du=-dt$ より

$$\begin{aligned}\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= -\int_2^0 (u^4, u+u^2)\cdot(-1,-2u)du\\ &= -\int_0^2 (u^4, u+u^2)\cdot(1,2u)du\\ &= -\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = -\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

または，

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{t}}ds = -\int_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{t}}ds$$

となります．

演習問題

1. 次の線積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_C xy^2 ds$, C は 2 点 $(-1,0,2),(1,3,2)$ を結ぶ線分

(b) $\displaystyle\int_C (x+y^2)ds$, C は 2 点 $(0,0,0),(1,3,2)$ を結ぶ線分

(c) $\displaystyle\int_C (-y^3dx+x^2dy)$, C は xy 平面上の単位円の点 $(1,0)$ から点 $(0,1)$ までの部分

(d) $\displaystyle\int_C (3x^2+6y,-14yz,20xz^3)\cdot d\mathbf{r}$, C は原点 $(0,0,0)$ と点 $(1,1,1)$ を結ぶ直線

(e) $\int_C (3x^2+6y,-14yz,20xz^3)\cdot d\mathbf{r}$, C は原点 $(0,0,0)$ と点 $(1,1,1)$ を $x=t, y=t^2, z=t^3$ に沿って結ぶ曲線

8.5 面積分 (surface integrals)

曲面 $S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に対して定義されたスカラー場を $f(\mathrm{P})=f(x,y,z)$ とします．ただし，曲面 S は滑らかな曲面とします．

S を n 個の小さな面 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ に分割し，この分割を Δ で表わします．次に曲面 S_i の面積を ΔS_i とし， S_i の中に点 P_i をとり，次の和を考えます．

$$S(\Delta)=\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{P}_i)\Delta S_i$$

ここで，分割を細かくし Δ を限りなく小さくしたとき， $S(\Delta)$ が限りなく S に近づくならば，この極限値 S をスカラー場 f の **面積分 (surface integral)** といい

$$\iint_S f(x,y,z)dS$$

で表わします．

ここで面積素 dS は

$$dS=\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\|dudv$$

で与えられることに注意すると，スカラー場 f の曲面 S 上での面積分は，次のように表わされます．

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|dudv$$

ここで， Ω は S に対応する uv 平面上の領域です．

例題 8.16

次のスカラー場 f の放物面 $S:x^2+y^2+z=4$ のうち $z\geq 0$ の部分上での面積分を求めてみましょう．

$$f(x,y,z)=\frac{2y^2+z}{(4x^2+4y^2+1)^{1/2}}$$

解 曲面 $S : x^2 + y^2 + z = 4$ より対応する $\mathbf{r}$ を位置ベクトルとすると

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$$

次に曲面 S の法線ベクトル $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ を求めると

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y &= (1, 0, -2x) \times (0, 1, -2y) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)\end{aligned}$$

これより

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

ここで，$\Omega : 4 - (x^2 + y^2) \geq 0$ より極座標変換を行なうと

$$\begin{aligned}\iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_\Omega \frac{2y^2 + z}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}} \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dxdy \\ &= \iint_\Omega (2y^2 + z) dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2 + 2r^2 \sin^2\theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{r^4}{2} \sin^2\theta \right]_0^{2\pi} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (4 + 8\sin^2\theta) d\theta \\ &= 8\pi + 8\pi = 16\pi \ \blacksquare\end{aligned}$$

線積分と同様に曲面 S 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ の面積分を曲面 S の法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ を用いて定義し，次のように表わします．

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

なお $\hat{\mathbf{n}}$ の方向と $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ の方向は等しいので

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

と表わせるでしょう．よって曲面 S 上のベクトル場 $\mathbf{F}$ の面積分は次のように 2 重積分で表わされます．

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iint_\Omega \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv \\ &= \iint_\Omega \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dudv \\ &= \iint_\Omega \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv\end{aligned}$$

また， $\hat{\mathbf{n}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ とすると，次のようにも書けます．

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS &= \iint_S \mathbf{F}\cdot(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)dS \\ &= \iint_S (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma)dS \\ &= \iint_S (F_1dydz + F_2dzdx + F_3dxdy)\end{aligned}$$

ここで，ベクトル場 $\mathbf{F}$ を，流体が流管中を定常的にながれるときの，ある点での速度場とするとき， $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$ を $\mathbf{F}$ の $\hat{\mathbf{n}}$ に向かう**束 (flux)** といいます．よって速度場 $\mathbf{F}$ の束が流速 (流量)dQ となり，その面積分 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$ を **束積分 (flux integral)** といい，全流束を表わします．

例題 8.17

ベクトル場 $\mathbf{F} = (0, y, z)$，曲面 $S : x^2 + y^2 = 4 - z,\ z \geq 0$ において $\hat{\mathbf{n}}$ は内側から外側へ向かう法線ベクトルとする．このとき面積分 $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$ を求めてみましょう．

解 位置ベクトルは $\mathbf{r} = (x, y, z) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$ より

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iint_\Omega \begin{vmatrix} 0 & y & 4 - x^2 - y^2 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} dxdy = \iint_\Omega (4 - x^2 + y^2)dxdy$$

ここで $\Omega : x^2 + y^2 \leq 4$ より極座標変換を行うと $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (4 - x^2 + y^2)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2 + 2r^2\sin^2\theta)rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{r^4}{2}\sin^2\theta\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(4 + 8\sin^2\theta)d\theta \\ &= 8\pi + 8\pi = 16\pi \ \blacksquare\end{aligned}$$

演習問題

1. 次の面積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\iint_S xy^2dS$, ただし， $S : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

(b) $\displaystyle\iint_S (6z, 3x + 2y - z, -x)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$, ただし， $S : x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4$

(c) $\displaystyle\iint_S (6z, -4x, y)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$, ただし， $S : 2x + 3y + 6z = 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

(d) $\displaystyle\iint_S (6z, -4x, y)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$, ただし， $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

(e) $\displaystyle\iint_S (xy, -2y, z - x)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$, ただし， $S : z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 \leq 1$

8.6　ベクトル積分定理 (integral theorems of vector field)

残りの章ではベクトル積分定理とよばれる定理について学びます．これらの定理は簡単にいうと，閉領域の境界での関数の積分を，閉領域内部でのある微分演算子 (勾配, 発散，回転) を用いた積分で表わします．この関係の特殊な場合にすでに学んだ微分積分学の基本定理があります．つまり区間 $[a,b]$ の端点での関数 f の値が，関数 f の導関数をその区間で積分したものと等しくなるというものです．つまり

$$f(b)-f(a)=\int_a^b \frac{df}{dx}dx$$

この場合境界値は a と b で微分演算子は導関数となります．

ここでは，2 次元のベクトル場

$$\mathbf{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

を平面上の閉曲線 C がそれ自身で交わらない曲線上で積分します．このような閉曲線を **単一閉曲線 (simple closed curve)** といいます．

1828 年に イギリスの数学者 George Green (1793-1841) によって示された **平面上の Green の定理** とよばれている定理について考えます．

定理 8.1

[Green の定理] 区分的に滑らかな閉曲線 C を境界にもつ xy 平面上の有界閉領域を Ω とする．またベクトル場 $\mathbf{F}=(P(x,y),Q(x,y))$ は C^1 級とする．このとき

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_\Omega (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{k}}dxdy$$

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

が成り立つ．ただし， C の向きづけは進む方向に対して Ω が左側にくるものとする．

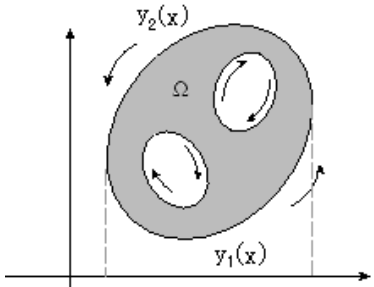


図 8.4　Green の定理

証明

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (P(x,y),Q(x,y))\cdot(dx,dy) = Pdx + Qdy$$

$$(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{k}} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

より，

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_\Omega (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

を示せばよいでしょう．

まず，領域 Ω が V-simple であり，また H-simple でもあるとき標準領域とよぶことにします．つまり標準領域とは

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y) : a < x < b, y_1(x) < y < y_2(x)\}\\ &= \{(x,y) : c < y < d, x_1(y) < x < x_2(y)\}\end{aligned}$$

のような領域です．そこで，まず Ω が標準領域の場合について考えてみます．

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}dydx &= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy\right]dx\\ &= \int_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]dx\\ &= -\int_a^b [P(x,y_1(x)) - P(x,y_2(x))]dx\end{aligned}$$

ここで曲線 y_1 のグラフを左から右に進むようにパラメター t を用いて表わすと

$$C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (t, y_1(t)),\quad t\in[a,b]$$

次に 曲線 y_2 のグラフを左から右に進むようにパラメター t を用いて表わすと

$$C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (t, y_2(t)),\quad t\in[a,b]$$

曲線 C は正の方向に進むので， $C = C_1 - C_2$ となる．よって

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}dydx &= -\int_a^b [P(x,y_1(x)) - P(x,y_2(x))]dx\\ &= -(\int_{C_1} P(x,y)dx - \int_{C_2} P(x,y)dx) = -\oint_C P(x,y)dx\end{aligned}$$

となる．次に，

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy &= \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dx\right]dy\\ &= \int_c^d [Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)]dy\end{aligned}$$

となるが，ここで曲線 x_1 のグラフを下から上に進むようにパラメター t を用いて表わすと

$$C_3 : \mathbf{r}_3(t) = (x_1(t), t), \quad t \in [c, d]$$

次に 曲線 x_2 のグラフを下から上に進むようにパラメター t を用いて表わすと

$$C_4 : \mathbf{r}_4(t) = (x_2(t), t), \quad t \in [c, d]$$

曲線 C は正の方向に進むので， $C = C_4 - C_3$ となる．よって

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy &= \int_c^d [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)]dy \\ &= \int_{C_4} Q(x, y)dy - \int_{C_3} Q(x, y)dy = \oint_C Q(x, y)dy\end{aligned}$$

よって

$$\oint_C P(x, y)dx + \oint_C Q(x, y)dy = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y} dydx$$

これより標準領域に対しては，Green の定理が成り立つ．

次に領域 Ω が一般の場合を考えます．この場合 Ω を各部分が標準領域になるように分けると，

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_n$$

このとき各部分領域 Ω_i では Green の定理が成り立つので，その境界 $\partial\Omega_i$ で

$$\oint_{\partial\Omega_i} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega_i} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

それらを辺々くわえると右辺は

$$\iint_\Omega (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

また左辺も Ω の境界以外は打ち消しあって

$$\oint_C Pdx + Qdy$$

となるので， Ω について Green の定理が成り立つ． ■

例題 8.18

ベクトル場 $\mathbf{F} = (y, -x)$，曲線 C を原点を中心とする半径 1 の円とする．このとき曲線 C に沿っての線積分 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ を Green の定理を用いて求めてみましょう．

解 曲線 C は $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ と表わせます．また Ω は半径 1 の円の内部より線積分は

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C ydx - xdy \\ &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dxdy \\ &= \iint_\Omega (-2)dxdy = -2(\text{半径 1 の円の面積}) = -2\pi \ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 8.19

$\mathbf{F} = \dfrac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$ のとき， $\displaystyle\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ を求めてみましょう．ただし，曲線 C は例題 8.6 と同じとします．

解 この問題のベクトル場 $\mathbf{F}$ は C^1 級ではありません．よって Green の定理は使えません．そこで線積分 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ の計算を直接行わなければなりません．

$$\mathbf{r} = (x, y) = (\cos t, \sin t)$$

より

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \cdot (dx, dy) \\ &= \oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \ \blacksquare\end{aligned}$$

Stokes の定理

Green の定理を アイルランドの数学者で物理学者の George Gabriel Stokes (1819-1903) が一般化したものを Stokes の定理とよびます．まず，Stokes の定理を学ぶには，曲面の向きづけを行なう必要があります．

定義 8.4

曲面 S 上の各点 (x, y, z) で法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}(x, y, z)$ を適当に選び， $\hat{\mathbf{n}}(x, y, z)$ が S 上で連続になるようにできるとき，曲面 S は **向きづけられる曲面 (orientable)** という．また，このとき各点で選んだ $\hat{\mathbf{n}}$ を，曲面の向きづけにより定まる法線単位ベクトルという．

向きづけられた曲面 S の境界の曲線 ∂S に沿っての線積分を， S 上での面積分に書き換える等式を与えるのが Stokes の定理です．

定理 8.2

[Stokes の定理]$S : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega$ をいくつかの区分的に滑らかな閉曲線を境界とする向きづけられた曲面とする．また，ベクトル場 $\mathbf{F}$ は S 上で C^1 級とする．そのとき，

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

ただし， ∂S は S の境界を表わし，曲線 ∂S 上の線積分の向きは領域 S を左手にみるように ∂S を一周するものとする．つまり，法線単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ に対して右手の法則に従う．

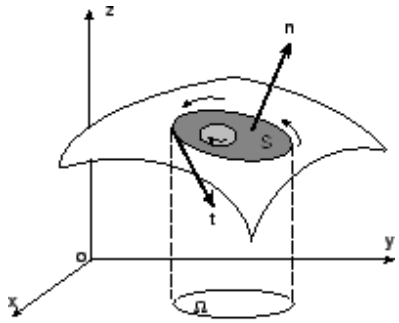


図 8.5　Stokes の定理

証明 まず，$\iint_S [\nabla \times F_1 \hat{\mathbf{i}}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ を考えよう．

$$\nabla \times F_1 \hat{\mathbf{i}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \hat{\mathbf{k}}$$

より

$$[\nabla \times F_1 \hat{\mathbf{i}}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) dS \tag{8.2}$$

$\mathbf{r} = (x, y, z)$ を位置ベクトルとすると，$\mathbf{r}_y = (0, 1, z_y)$ は S の接線ベクトルとなるので，法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ とは直交する．よって

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_y = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + z_y \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \text{ または } \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = -z_y \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

これを式 8.2 に代入すると，

$$[\nabla \times F_1 \hat{\mathbf{i}}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} dS$$

ここで S 上では $F_1(x, y, z) = F_1(x, y, f(x, y)) = H(x, y)$ とおけるので合成関数の微分法より

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$$

となる．よって

$$[\nabla \times F_1 \hat{\mathbf{i}}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{\partial H}{\partial y} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} dS = -\frac{\partial H}{\partial y} dx dy$$

を得る．これより

$$\iint_S [\nabla \times F_1 \hat{\mathbf{i}}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_\Omega -\frac{\partial H}{\partial y} dx dy$$

で表わせる．ここで， Ω は S を xy 平面に正射影したものである．右側の積分は平面上の積分で，Green の定理より $\oint_{\partial\Omega}\mathbf{H}dx$ となる．Ω の境界上の点 (x,y) での $H(x,y)$ の値と， S の境界上の点 (x,y,z) での $F_1(x,y,z)$ の値は等しく，また， dx はどちらの曲線でも同じなので，

$$\oint_{\partial\Omega}\mathbf{H}dx=\oint_{\partial S}F_1dx$$

または

$$\iint_S[\nabla\times F_1\hat{\mathbf{i}}]\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=\oint_{\partial S}F_1dx$$

となる．同様にして，他の平面への正射影をとると，

$$\iint_S[\nabla\times F_2\hat{\mathbf{j}}]\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=\oint_{\partial S}F_2dy,\ \iint_S[\nabla\times F_3\hat{\mathbf{k}}]\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=\oint_{\partial S}F_3dz$$

となり，くわえると，

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=\oint_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

となる． ■

例題 8.20

$\mathbf{F}=(-y,x,1),\ S:z=(4-x^2-y^2)^{1/2}$ のとき，Stokes の定理が成り立つことを示してみましょう．

解 S の境界 ∂S は $x^2+y^2=4$ の円となります．よって位置ベクトル $\mathbf{r}=(x,y,z)=(2\cos t,2\sin t,0)$ より線積分を求めると

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}&=\oint_{\partial S}(-2\sin t,2\cos t,1)\cdot(-2\sin t,2\cos t,0)dt\\&=\int_0^{2\pi}[4\sin^2t+4\cos^2t]dt=8\pi\end{aligned}$$

次に面積分を求めてみます．

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}}&\hat{\mathbf{j}}&\hat{\mathbf{k}}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\-y&x&1\end{vmatrix}=(0,0,2)$$

次に法線単位ベクトルを求めると

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}}&\hat{\mathbf{j}}&\hat{\mathbf{k}}\\1&0&-\frac{x}{z}\\0&1&-\frac{y}{z}\end{vmatrix}=\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)$$

となるので

$$\hat{\mathbf{n}}=\frac{(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1)}{\|(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1)\|}$$

これより，

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS &= \iint_S (0,0,2)\cdot\frac{\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y}{\|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y\|}\|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y\|dxdy\\ &= \iint_\Omega (0,0,2)\cdot\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y dxdy\\ &= \iint_\Omega 2dxdy = 2(4\pi) = 8\pi\end{aligned}$$

よって Stokes の定理が成り立つことが示せました．■

これまでに保存場では，ベクトル場はスカラー場の勾配と等しくなり，またベクトル場の回転は 0 になることをすでに学びました．では線積分との関係においては，どんなことが成り立つのか調べてみましょう．

定理 8.3

ベクトル場 $\mathbf{F}(x,y,z)$ では次の 3 つの条件は同値である．

(1)　$\mathbf{F}=\nabla\phi$ となるスカラー関数 $\phi(x,y,z)$ が存在する．($\mathbf{F}$ は保存場)

(2)　いたるところ $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ が成り立つ．(渦なし)

(3)　任意の閉曲線 C について $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$ が成り立つ (積分経路無関係).

証明 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1) を示す．

(1) ⇒ (2)　$\nabla\times\mathbf{F}=\nabla\times\nabla\phi=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \phi_x & \phi_y & \phi_z\end{vmatrix}=(0,0,0)=\mathbf{0}$

(2) ⇒ (3)　閉曲線 C で囲まれた曲面 S を考えて，Stokes の定理を使うと

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=\iint_S \mathbf{0}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=0$$

(3) ⇒ (1)　定点 P (x_0,y_0,z_0) と動点 Q(x,y,z) をむすぶ 2 つの曲線 C_1,C_2 をとり，P から C_1 を経て Q に至り，Q から C_2 を逆向きに通って P に戻る道を C とすると，

$$\int_{\mathrm{P}(C_1)\mathrm{Q}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}-\int_{\mathrm{P}(C_2)\mathrm{Q}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\mathrm{P}(C_1)\mathrm{Q}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{\mathrm{Q}(C_2)\mathrm{P}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$$

よって，

$$\int_{\mathrm{P}(C_1)\mathrm{Q}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\mathrm{P}(C_2)\mathrm{Q}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

すなわち，P から Q に至る線積分 $\int_{\mathrm{PQ}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ は途中の経路に関係なく，終点 Q の座標 (x,y,z) の関数で与えられる．よってこれを $\phi(x,y,z)$ とすれば，

$$\int_{\mathrm{PQ}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\phi(x,y,z)$$

P から Q に至る任意の曲線のベクトル方程式を $\mathbf{r}=(x(s),y(s),z(s))$ とすると，

$$\int_{\mathrm{PQ}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{s_0}^{s}\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}ds=\int_{s_0}^{s}\left(F_1\frac{dx}{ds}+F_2\frac{dy}{ds}+F_3\frac{dz}{ds}\right)ds$$

よって

$$F_1\frac{dx}{ds}+F_2\frac{dy}{ds}+F_3\frac{dz}{ds}=\frac{d}{ds}\int_{\mathrm{PQ}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\frac{d\phi}{ds}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

曲線 PQ は任意，したがって $x(s),y(s),z(s)$ も任意の関数でよいから，

$$F_1=\frac{\partial\phi}{\partial x},F_2=\frac{\partial\phi}{\partial y},F_3=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

これより，

$$\mathbf{F}=(F_1,F_2,F_3)=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})=\nabla\phi\ \blacksquare$$

この定理より，線積分をおこなうときに，ベクトル場がスカラーポテンシャルを持てば，積分をしなくとも答は 0 であることが分かります．

例題 8.21

$\displaystyle\int_C(2x+yz,zx,xy)\cdot d\mathbf{r}$ を求めてみましょう．ただし， C は点 $(1,0,-1)$ から点 $(2,-1,3)$ に至る曲線.

解

$$\nabla\times(2x+yz,zx,xy)=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x+yz & zx & xy\end{vmatrix}=(0,0,0)$$

より，

$$\int_C(2x+yz,zx,xy)\cdot d\mathbf{r}=0\ \blacksquare$$

次にドイツの数学者 Karl Friedrich Gauss (1777-1855) の名前をとってつけられた発散定理について学びます.

Gauss の発散定理

定理 8.4

[Gauss の発散定理] ベクトル場 $\mathbf{F}(x,y,z)=(F_1,F_2,F_3)$ において，区分的に滑らかな閉曲面 S で囲まれた空間の領域を V とし， S の内部から外部に向かう法線ベクトルを $\hat{\mathbf{n}}$ とすると，

$$\iint_S\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=\iiint_V\mathrm{div}\mathbf{F}dV$$

$$\iint_S(F_1dydz+F_2dzdx+F_3dxdy)=\iiint_V\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dxdydz$$

が成り立つ.

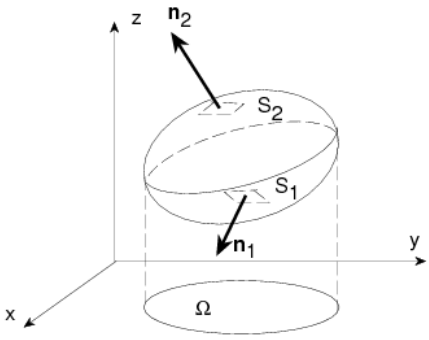


図 8.6　Gauss の定理

証明　まず，V が 2 つの曲面 S_1, S_2 で下と上からはさまれているとします．また，S_1 は $z = f_1(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$，S_2 は $z = f_2(x,y)$ $(x,y) \in \Omega$ で与えられているとします．このとき，

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dV &= \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dzdydx = \iint_\Omega [\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz] dydx \\ &= \iint_\Omega [F_3]_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dydx \\ &= \iint_\Omega [F_3(x,y,f_2(x,y)) - F_3(x,y,f_1(x,y))] dydx\end{aligned}$$

曲面 S_2 において，曲線座標 (x,y) に対する法線単位ベクトル

$$\frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|}$$

は $\hat{\mathbf{n}}$ と一致しているが，曲面 S_1 では法線単位ベクトルは $-\hat{\mathbf{n}}$ に等しい．よって

$$\iint_\Omega F_3(x,y,f_2(x,y)) dxdy = \iint_{S_2} F_3 dxdy$$

$$-\iint_\Omega F_3(x,y,f_1(x,y)) dxdy = \iint_{S_1} F_3 dxdy$$

これより，

$$\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dV = \iint_{S_2} F_3 dxdy + \iint_{S_1} F_3 dxdy = \iint_S F_3 dxdy$$

が成り立つ．同様にして，S を他の平面に正射影することにより

$$\iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial z} dV = \iint_S F_1 dydz$$

$$\iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial z} dV = \iint_S F_2 dzdx$$

を示すことができるので，これらをそれぞれくわえれば，

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

を得ることができる．

領域 V が一般な場合には，平面における Green の定理の証明のように， V を部分領域に分割して証明すればよい． ■

例題 8.22

Gauss の発散定理により面積分

$$\iint_S xz^2 dydz + (x^2y - z^3)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy,\ S : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$$

を求めよ．

解 $\mathbf{F} = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ より $\mathrm{div}\mathbf{F}$ を求めると

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z) = z^2 + x^2 + y^2$$

よって

$$\iint_S xz^2 dydz + (x^2y - z^3)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dV$$

ここで V は半径 a の上半球より球面座標変換 (ρ, ϕ, θ) を用いると

$$\begin{aligned}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{a} \rho^2\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta &= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \int_{\rho=0}^{a} \rho^4 d\rho \\ &= 2\pi(1)(\frac{a^5}{5}) = \frac{2\pi a^5}{5} \ ■\end{aligned}$$

演習問題

1. 次の線積分を求めよう．

(a) $\oint_C (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$, ただし， C は点 $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ を頂点とする正方形．

(b) $\oint_C (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$, ただし， C は点 $(0,0)$ から点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ を放物線 $2x = \pi y^2$ に沿って進む．

(c) $\oint_{\partial S} -z^2dx + xy^2dy + zdz$, ただし， $S : z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$

2. 次の面積分を求めよう．

(a) $\iint_S (x^2 + y^2)dS$, ただし， $S : z^2 = 3(x^2 + y^2), 0 \le z \le 3$

(b) $\iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, ただし， $\mathbf{F} = (x^2 - x, -xy, 3z), S : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \ge 0$

(c) $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$, ただし， $\mathbf{F}=(x-z, x^3+yz, -3xy^3)$, $S: z=4-y^2$, $x=0, x=3, z=0$

(d) $\displaystyle\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, ただし， S は 円柱 $x^2+y^2=9$ と平面 $z=0, z=3$ で囲まれた領域

3. 単連結な閉曲線 C で囲まれた領域の面積 A は， $\displaystyle\frac{1}{2}\oint xdy-ydx$ で与えられることを示そう．

4. 楕円 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ の面積を求めよう．

5. f, g をスカラー場とするとき次の式が成り立つことを示そう．
$\displaystyle\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS=\iiint_V (f\nabla^2 g+\mathrm{grad}f\cdot\mathrm{grad}g)dV$ ここで $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial n}, \frac{\partial g}{\partial n}$ はそれぞれ f, g の S における外向き法線方向の方向微分係数を表わす．

付録 A

確認問題解答

0.1 数 (NUMBERS)

1.

(a) 有理数　(b) 無理数

2.

(a) 3.0　(b) π

3.

(a) 6　(b) 0

4.

(a) 27　(b) $\dfrac{1}{3}$

5.

(a) $a^{\frac{5}{4}}$　(b) $a^{-\frac{5}{6}}$　(c) $a^{-\frac{1}{3}}$

6.

(a) $2\sqrt{2}$　(b) $7-2\sqrt{10}$　(c) $17+13\sqrt{6}$

7.

(a) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$　(b) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2})}{3}$　(c) $\dfrac{3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

0.2 不等式 (INEQUALITIES)

1.

(a) $(-\infty,1]$　(b) $(-\infty,-\dfrac{1}{5})$　(c) $(-\infty,1)\cup(2,\infty)$.

(d) $(-1,0)\cup(1,\infty)$　(e) $(-3,-1)\cup(3,\infty)$　(f) $(1,2)\cup(6,\infty)$.

2. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ のほうが大きい.

3.

(a) $(-2,2)$　(b) $(-\dfrac{9}{4},-\dfrac{7}{4})$　(c) $(-5,3)\cup(3,11)$　(d) $(-\infty,-4)\cup(-1,\infty)$

4. $|a-b|^2=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\le|a|^2+2|a||b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2$

1.1 関数

1.

(a) $f(1) = 1$　(b) $f(1) = 13$　(c) $f(1) = 2$

2.

(a) 定義域は $(-\infty, \infty)$　値域は $[-1, \infty)$.

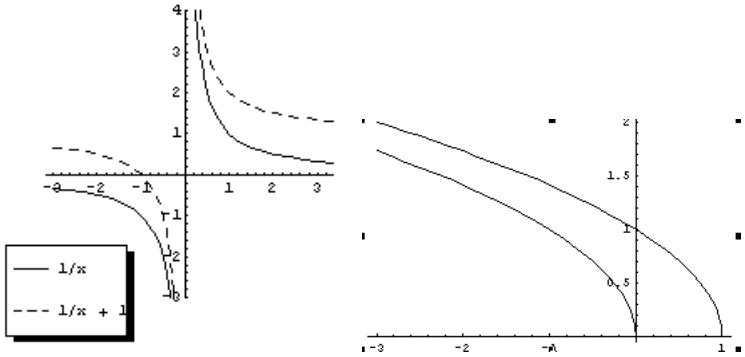
(b) 定義域は $[1, \infty)$　値域は $[0, \infty)$.

(c) 定義域は $(-\infty, \infty)$　値域は $[0, 1]$.

3.

(a) $y = f(x) + c$ は $y = f(x)$ のグラフを c だけ y 軸正の方向に平行移動.

(b) $y = f(x - a)$ は $y = f(x)$ のグラフを a だけ x 軸正の方向に平行移動.



4.

(a) $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 5$　$g(f(x)) = (2x+5)^2$ (b) $(f \circ g)(x) = x$　$g(f(x)) = x$

(c) $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^4}{1+x^2}$　$g(f(x)) = x^2(x+1)^2$

5.

(a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{7}$　(b) $y = \sqrt[3]{x-2} - 1$　(c) 1 対 1 の関数ではない.

6.

(a) 奇関数　(b) 奇関数

1.2 初等関数

1.

(a) $\dfrac{\pi}{6}$　(b) $\dfrac{2\pi}{9}$　(c) $\dfrac{2\pi}{5}$

2.

(a) $\dfrac{\pi}{3}$　(b) $\dfrac{\pi}{6}$

3.

(a) $[0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{11\pi}{6}, 2\pi]$　(b) $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$　(c) $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$

4.

(a) 0　(b) $\frac{\pi}{6}$　(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.3 関数の極限

1.

(a) -1　(b) $\frac{1}{2}$　(c) 0　(d) $\frac{1}{2}$　(e) 6　(f) 5　(g) 0　(h) $-\frac{1}{9}$　(i) -1

2.

(a) $\frac{2}{3}$　(b) -1　(c) 0　(d) -1

1.4 連続関数

1.

(a) -1　(b) 1　(c) 0　(d) 0　(e) $\frac{1}{2}$　(f) 存在しない　(g) 存在しない

2.

(a) 連続　(b) 除去可能な不連続点　(c) 連続　(d) 真性不連続点

3.

(a) $f(1) = 2$　(b) $f(1) = 3$

4.

$x = \frac{13}{16}$

1.5 数列

1.

(a) ∞　(b) 0　(c) ∞　(d) 1　(e) 0

2.

(a) 有界，　単調減少　(b) 有界，単調増加

3.

(a) $\frac{1}{n!}$　(b) $2n - 1$　(c) n^2

1.6 超越関数

1.

(a) 0　(b) 発散　(c) 0

2.

(a) 3.00　(b) 2.76　(c) 4.40　(d) -2.30　(e) 3.225　(f) -0.92

3.

(a) e^2　(b) $\dfrac{1}{e}$　(c) $e^2, 1$　(d) 1

2.1 導関数

1.

(a) 0　(b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$　(c) $-\dfrac{2}{x^3}$

2.

(a) 1　(b) -6

3.

(a) $y = -x - 1$　(b) $y = -12x + 21$　(c) $y = \dfrac{1}{4}x + 1$

4.

(a) $y' = 55x^4 - 18x^2$　(b) $y' = \dfrac{2}{x^3}$　(c) $y' = 3x^2 - 6x - 1$　(d) $y' = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$

(e) $y' = \dfrac{2(x^2+3x+1)}{(2x+3)^2}$　(f) $y' = -\dfrac{3x^2-x+1}{x^2(x-2)^2}$　(g) $y' = \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$

2.2 導関数の計算

1.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$　(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2.

(a) $y' = 4008x(x^2+1)^{2003}$　(b) $y' = 6(x^2 + \dfrac{1}{x^2})^2(x - \dfrac{1}{x^3})$

(c) $y' = 6(5x+3)(5x^2+6x+2)^2$

3.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = 2(x-1)$　(b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

4.

(a) $2x\log x + x$　(b) $3x^2\sin 2x + 2x^3\cos 2x$　(c) $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$　(d) $\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$

(e) $3(\sin(x+1))^2\cos(x+1)$　(f) $\sin^{-1}(2x) + \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$

2.3 高次導関数

1.

(a) $y(0) = 4,\ v(0) = 3, a(0) = -2$　(b) $y(0) = 0, v(0) = -6, a(0) = 0$

(c) $y(0) = 9, v(0) = -\frac{9}{2}, a(0) = \frac{9}{2}$

2.

(a) $\dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$　(b) $\dfrac{1}{x}$　(c) $2e^x\cos x$

2.4 関数の性質

1.

(a) $\xi = \dfrac{3}{2}$　(b) $\xi = \sqrt{\dfrac{13}{3}}$　(c) $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2.

(a) $(-\infty, 0)$ で上に凸，$(0, \infty)$ で下に凸, $x = -1$ で極大値 4，$x = 1$ で極小値 0, 変曲点 $(0, 2)$

(b) $(-\infty, 0)$ で上に凸，$(0, \infty)$ で下に凸, $x = -1$ で極大値 -2，$x = 1$ で極小値 2

(c) 上に凸 $(-\infty, -1)$，下に凸 $(-1, \infty)$, $x = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で極大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，$x = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で極小値 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, 変曲点 $(-1, 0)$

(d) 上に凸 $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$，下に凸 $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, \infty)$, $x = -1$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$，$x = 1$ で極大値 $\dfrac{1}{2}$, 変曲点 $(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}), (0, 0), (\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4})$

(e) 上に凸 $(-2, 1)$，下に凸 $(-\infty, -2), (1, \infty)$, $x = -2$ と $x = 1$ で極小値 0，$x = -\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{9}{4}$

3.

(a) 400　(b) $\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$　(c) $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}$　(d) $\dfrac{1}{2}$

2.5 曲線の概形

1.

(a) $x = \dfrac{1}{3}, y = \dfrac{1}{3}$　(b) $x = 2, y = x + 2$　(c) $x = \pm 3, y = 0$

2.

(a) $x = 0$ で垂直接線.　(b) $x = 0$ で垂直カスプ.　(c) $x = 2$ で垂直カスプ.

2.6 不定形の極限値

1.

(a) 0　(b) -1　(c) $\dfrac{1}{4}$　(d) $\log 2$　(e) 0　(f) 1　(g) 0　(h) 2

2.7 Taylor の定理

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$　(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$　(c) $1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + \cdots + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} + \cdots$

(d) $1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 - \cdots - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^{2n} + \cdots$

3.1 積分法

1.

(a) $x^2 - 3x + C$　(b) $x^5 + C$　(c) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$　(d) $2\sqrt{x} + C$　(e) $-\log|\cos x| + C$

(f) $\tan x + C$　(g) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$　(h) $\frac{1}{4}\log|\frac{x-2}{x+2}| + C$　(i) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$

3.2 置換積分法

1.

(a) $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C$　(b) $\frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$　(c) $\frac{1}{2}e^{2x} + C$　(d) $\log|\log x| + C$

(e) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$　(f) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$　(g) $2\left(\frac{(1+x)^{5/2}}{5} - \frac{(1+x)^{3/2}}{3}\right) + C$

(h) $\log|\sin x + \cos x| + C$　(i) $\log(1+e^x) + C$

3.3 部分積分法

1.

(a) $xe^x - e^x + C$　(b) $-x\cos x + \sin x + C$　(c) $\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C$

(d) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$

(e) $(2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + C$　(f) $\frac{1}{3}e^{x^3}(x^3 - 1) + C$

(g) $x\sin x + \cos x + C$

3.4 有理関数の積分法

1.

(a) $\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+5}$　(b) $\frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$　(c) $1 + \frac{-4}{x-1} + \frac{7}{x-2}$

(d) $\frac{3/4}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{1/4}{x+1}$　(e) $x^3 + 4x^2 + 12x + 32 + \frac{80}{x-2} + \frac{32}{(x-2)^2}$

(f) $\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}$

3.5 三角関数の積分法

1.

(a) $\frac{\sin^4 x}{4} + C$　(b) $\frac{1}{9}\sin^3 3x + C$　(c) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$　(d) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

(e) $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$　(f) $\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + C$　(g) $\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 3x}{6} + C$

(h) $\dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{6} + C$ (i) $\dfrac{\tan^2 x}{2} + C$ (j) $\dfrac{1}{2}(\sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x|) + C$

3.6 無理関数の積分法

1.

(a) $2\sqrt{x} - 2\log|1+\sqrt{x}| + C$ (b) $x - 2\sqrt{x} + 2\log|1+\sqrt{x}| + C$

(c) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}\right| + C$

(d) $\dfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x-1} + C$ (e) $\sqrt{x^2+4} + C$

(f) $\dfrac{(x^2+4)^{3/2}}{3} - 4\sqrt{x^2+4} + C$ (g) $\log|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}| + C$

(h) $2(\sqrt{x^2-1} - \tan^{-1}(\sqrt{x^2-1})) + C$

3.7 定積分

1.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$

2.

(a) $\dfrac{10}{3}$ (b) $\dfrac{3}{2} - \log 2$ (c) $\dfrac{2}{5}$ (d) 0 (e) 1

3.

(a) 5 (b) -2 (c) -1 (d) 0 (e) -4

4.

(a) $\sin x$ (b) $-\cos x$ (c) $2\sqrt{\sin 2x}$

5.

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\log\dfrac{3}{2}$ (c) $\dfrac{2}{3}$

3.8 定積分の計算

1.

(a) 0 (b) 0 (c) $\dfrac{2}{3}$ (d) 0 (e) $\dfrac{2^{5/2}}{3}$

3.9 定積分の定義の拡張

1.

(a) 1 (b) ∞ (c) 1 (d) 存在しない (e) 2 (f) ∞

3.10 定積分の応用

1.

(a) $\dfrac{9}{2}$　(b) $\dfrac{1}{12}$　(c) $\dfrac{22}{3}$　(d) $\dfrac{4}{3}$　(e) 36　(f) 2

2.

(a) $\dfrac{\pi}{3}$　(b) $\dfrac{1944\pi}{5}$　(c) $\dfrac{5\pi}{14}$　(d) $\dfrac{72\pi}{5}$

3.

(a) $2\sqrt{5}$　(b) 296　(c) $4\sqrt{3}+2\log|2+\sqrt{3}|$　(d) $\sqrt{2}(e^{4\pi}-1)$

4.1 級数の定義

1.

(a) $\dfrac{10}{3}$　(b) $\dfrac{5}{6}$　(c) $-\dfrac{3}{2}$

2.

(a) $\dfrac{10}{7}$　(b) $\dfrac{159}{59}$　(c) 1

4.2 正項級数

1.

(a) 収束　(b) 発散　(c) 収束　(d) 発散

2.

(a) 発散　(b) 発散　(c) 収束　(d) 発散

3.

(a) 収束　(b) 収束

4.3 交項級数

1.

(a) 発散　(b) 発散　(c) 発散

4.4 関数項級数

1.

(a) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

5.1 ベクトル関数

1.

(a) $\mathbf{F}'(t) = (-\sin t, \cos t), \|\mathbf{F}'(t)\| = 1$ (b) $\mathbf{F}'(t) = (2, -1, 3), \|\mathbf{F}'(t)\| = \sqrt{14}$

(c) $\mathbf{F}(t) = (t, t^2)$ (d) $\mathbf{F}(t) = (e^t\sqrt{2}t, -e^{-t})$

5.2 曲線

1.

(a) $(x, y, z) = (1, -1, 2) + (2, -3, 1)t$ (b) $(x, y, z) = (3, 1, 0) + (3, -1, 1)t$

(c) $(x, y, z) = (1, 0, 3) + (1, -1, 1)t$

2.

(a) $\mathbf{r}'(t) = (0, 1, 2t), (x, y, z) = (1, 1, 1) + (0, 1, 2)t$

(b) $\mathbf{r}'(t) = (4t, -1, 4t), (x, y, z) = (2, 0, 2) + (4, -1, 4)t$

3.

(a) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$ (b) $\dfrac{1}{27}(13^{\frac{3}{2}} - 8)$

4.

(a) $\kappa = \dfrac{|6x|}{(1 + 9x^4)^{3/2}}$ (b) $\kappa = \dfrac{2}{(4x^2 - 4x + 2)^{3/2}}$ (c) $\kappa = \dfrac{|2\sec^2 x \tan x|}{(1 + \sec^4 x)^{3/2}}$

6.1 関数の定義

1.

(a) $D(f) = \{(x, u) : xy \geq 0\}, R(f) = [0, \infty)$

(b) $D(f) = \{(x, y) : x + y \neq 0\}, R(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(c) $D(f) = \mathcal{R}^2 - \{(0, 0)\}, R(f) = (0, \infty)$ (d) $D(f) = \mathcal{R}^2 - \{(0, 0)\}, R(f) = [0, 1]$

(e) $D(f) = \{(x, y) : xy < 1\}, R(f) = (-\infty, \infty)$

(f) $D(f) = \{(x, y, z) : x^2 - y^2 \neq 0\}, R(f) = (-\infty, \infty)$

2.

(a) 2 次錐面 (b) 楕円面 (c) 放物柱 (d) 双曲放物面

(e) 楕円柱 (f) 楕円放物面 (g) 双曲柱 (h) 1 葉双曲面 (i) 2 葉双曲面

6.2 偏導関数

1.

(a) $f_x = 6x - y, f_y = -x + 1$ (b) $f_x = 2xe^{-y}, f_y = -x^2e^{-y}$

(c) $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (d) $z_x = \sin y, z_y = x\cos y$

(e) $z_x = \dfrac{2y}{(x+y)^2}, z_y = \dfrac{-2x}{x^2+y^2}$

2.

(a) $f_x = 2ax + 2by, f_y = 2bx + 2cy, f_{xx} = 2a, f_{xy} = 2b, f_{yy} = 2c$

(b) $f_x = 2(x + y^2 + z^3), f_y = 4y(x + y^2 + z^3), f_z = 6z^2(x + y^2 + z^3), f_{xx} = 2$
$f_{xy} = 4y, f_{yy} = 4(x + y^2 + z^3), f_{yz} = 12yz^2, f_{zz} = 12z(x + y^2) + 30z^4$

(c) $f_x = 3\cos(3x - 2y), f_y = -2\cos(3x - 2y), f_{xx} = -9\sin(3x - 2y)$
$f_{xy} = 6\sin(3x - 2y), f_{yy} = 4\sin(3x - 2y)$

(d) $f_x = e^{2y}, f_y = 2xe^{2y}, f_{xx} = 0, f_{xy} = 2e^{2y}, f_{yy} = 4e^{2y}$

6.3 関数の極限

1.

(a) 1　(b) 存在しない　(c) 0

2.

(a) 連続　(b) 不連続　(c) 連続

6.4 全微分

1.

(a) $\nabla f = (3x^2, 2y), df = 3x^2dx + 2ydy$

(b) $\nabla f = (6x - y, -x + 1), df = (6x - y)dx - (x - 1)dy$

(c) $\nabla z = (2xy^{-2}, -2x^2y^{-3}), dz = 2xy^{-2}dx - 2x^2y^{-3}dy$

(d) $\nabla z = (2xy, x^2), dz = 2xydx + x^2dy$

(e) $\nabla z = (e^x\cos y, -e^x\sin y), dz = e^x\cos ydx - e^x\sin ydy$

2.

(a) $3x + 2y - z = 4, (x, y, z) = (1, 1, 1) + (3, 2, -1)t$

(b) $x + 2y - z = 3, (x, y, z) = (2, 1, 1) + (1, 2, -1)t$

(c) $3x + 5y - z = 4, (x, y, z) = (1, 1, 4) + (3, 5, -1)t$

6.5 方向微分

1.

(a) $-\sqrt{2}$　(b) $-\dfrac{e}{\sqrt{2}}$

2.

(a) $\sqrt{3}$　(b) 1

3.

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $(0,1)$ (b) $-\dfrac{6}{\sqrt{10}}$, $(0,-1)$

6.6 合成関数の偏微分法

1.

(a) $8t+6t^2$ (b) 0 (c) $\cos 2t+\sin 2t$ (d) $12t^{11}$

2.

(a) $z_u=10u, z_v=10v$

(b) $z_u=2u+2v+2uv+v^2+4uv^2, z_v=2u+2v+2uv+u^2+4u^2v$

(c) $z_u=2uv^6, z_v=6u^2v^5$

6.7 2 変数関数の極値

1.

(a) $1+2(x-1)+y-1+(x-1)^2+2(x-1)(y-1)$

(b) $-\dfrac{\pi}{2}(x-1)-(y-\dfrac{\pi}{2})+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi^2}{4}(x-1)^2-2(x-1)(y-\dfrac{\pi}{2})-(y-\dfrac{\pi}{2})^2\right)$

(c) $-(x-1)+y-1+\dfrac{1}{2}\left(-(x-1)^2+2(x-1)(y-1)-(y-1)^2\right)$

(d) $x+\dfrac{1}{2}(4x^2+2xy)$

2.

(a) $f(1,0)=1$ 極大値 (b) $f(0,4)=-32$ 極小値, $f(0,0)=0$ 鞍点

(c) $f(1,0)=-2$ 極小値, $f(-1,0)=4$ 鞍点 (d) $f(1,1)=-3$ 極小値

6.8 陰関数

1.

(a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}, \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{8y^3}$ (b) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+4y}, \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-14(x^2+xy+2y^2)}{(x+4y)^3}$

(c) $\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}, \dfrac{d^2y}{dx^2}=e^{-2y}$ (d) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}, \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2xy(x^3-3xy+y^3+1)}{(x-y^2)^3}$

2.

(a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z-x}{y-z}, \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x-y}{y-z}$ (b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(z-x)}{x(y-z)}, \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z(x-y)}{x(y-z)}$

6.9 条件付極値

1.

(a) $f(1,0)=f(-1,0)=1$ 最小値, $f(0,1)=f(0,-1)=3$ 最大値

(b) $f(2,0)=0$ 最小値, $f(-2,0)=8$ 最大値

(c) $f(0,-1)=-1$ 最小値, $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ 最大値

2.

$\frac{1}{4}$

7.2 累次積分

1.

(a) 0　(b) $\frac{7}{6}$　(c) $\frac{11}{40}$　(d) 2　(e) $\frac{1}{12}$

2.

(a) $\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$　(b) $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)dydx$

(c) $\int_0^1\int_0^{2y} f(x,y)dxdy+\int_1^3\int_0^{3-y} f(x,y)dxdy$

3.

(a) $\frac{1}{3}$　(b) $\frac{5}{2}$　(c) $\frac{\pi}{2}$

7.3 累次積分

1.

(a) 8π　(b) $\frac{3\pi}{4}$　(c) $\frac{\pi}{8}$　(d) $\frac{1}{2}$　(e) $\frac{8\pi}{3}$

2.

(a) $\frac{1}{2}$　(b) $\frac{1}{3}$

7.4 広義積分

1.

(a) $\frac{e-1}{2}$　(b) $\frac{8}{15}$　(c) $-\frac{\pi}{4}$

7.5 2 重積分の応用

1.

(a) $\frac{3\pi}{4}$　(b) $9(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8})$　(c) 2π

2.

(a) 2π　(b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　(c) $\frac{2\pi}{3}\left((a^2+1)^{3/2}-1\right)$

3.

(a) π　(b) $\frac{\pi}{2}$

7.6 3 重積分

1.

(a) abc (b) $\dfrac{1}{12}$

2.

(a) $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{a} k\rho^3 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = k\pi a^4$

(b) $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{\sec\phi} k\rho^3 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{k\pi}{6}(2^{\frac{3}{2}}-1)$

(c) $\displaystyle\iint_{\Omega}\int_{z=2+y^2}^{4-x^2-y^2} dzdxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2-2r^2)\sqrt{2}rdrd\theta = \sqrt{2}\pi$

3.

(a) $(\bar{x},\bar{y}) = (\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5})$ (b) $(\bar{x},\bar{y}) = (1,\dfrac{8}{5})$ (c) $(\bar{x},\bar{y}) = (2,4)$

付録 B

演習問題解答

1.1 関数 (FUNCTIONS)

1.

(a) 2 価関数　(b) 1 価関数

2.

(a) $D(f) = [-2, 2]$　(b) $D(h) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{4}{3}]$

3.

(a) $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1,\ (g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 2$

(b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 + x & 0 \leq x < 1 \\ (1+x)^2 & x \geq 1 \end{cases}$ $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2 - x & x \leq 0 \\ -x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 + x^2 & x \geq 1 \end{cases}$

4.

(a) $y = \frac{1}{x} - 2$　(b) $y = -2 + \sqrt{x+6}\ (x \geq -6)$ $y = -2 - \sqrt{x+6}\ (x \geq -6)$

5.

(a) 偶関数　(b) 奇関数

6.

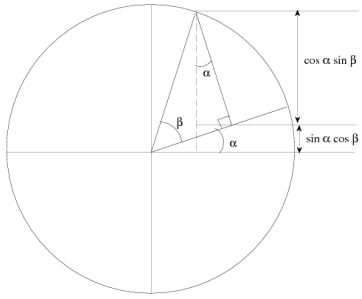
(a) 偶関数と偶関数の積は偶関数，偶関数と奇関数の積は奇関数

(b) 偶関数は y 軸対称．奇関数は原点対称.

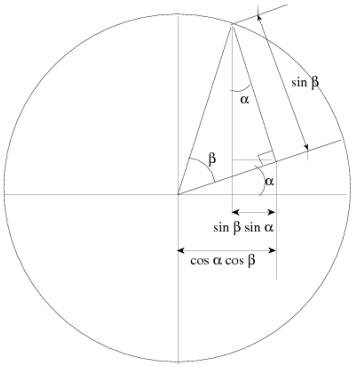
1.2 初等関数

1.

(a)



(b)



(c)

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha = \cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

これより，

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

(d)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

これより，

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

(e)

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

ここで $A+B=\alpha,\ A-B=\beta$ とおくと，

$$A = \frac{\alpha+\beta}{2},\ B = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

となるので，

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2[\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}]$$

2.

(a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

3.

(a) $-\dfrac{\pi}{6}$ (b) π (c) $\dfrac{\pi}{4}$ (d) $\dfrac{\pi}{3}$

4.

$u=\sin^{-1}x, v=\cos^{-1}x$ とおくと $x=\sin u\ (\dfrac{-\pi}{2}\le u\le\dfrac{\pi}{2}), x=\cos v\ (0\le v\le\pi)$.
これより $x=\sin u=\cos v=\sin(\frac{\pi}{2}-v)$．よって $u+v=\dfrac{\pi}{2}$.

5.

(a) $y=\sin^{-1}(-x)\Leftrightarrow -x=\sin y\ (\dfrac{-\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2})$ より $x=-\sin y\Leftrightarrow x=\sin(-y)\Leftrightarrow$
$-y=\sin^{-1}x\Leftrightarrow y=-\sin^{-1}x$

(b) $y=\cos^{-1}(-x)\Leftrightarrow -x=\cos y\ (0\le y\le\pi)$ より $x=-\cos y\Leftrightarrow x=\cos(\pi-y)$
$\Leftrightarrow \cos^{-1}x=\pi-y\Leftrightarrow y=\pi-\cos^{-1}x$

1.3 関数の極限

1.

(a) 12 (b) $\dfrac{1}{4}$ (c) -2 (d) -8 (e) 1 (f) $\dfrac{2}{3}$ (g) 4

2.

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

3.

$||f(x)|-0|=|f(x)-0|$ に注意する．全ての正の数 $\varepsilon>0$ に対して，δ が存在し，$|x-a|<\delta$ ならば $||f(x)|-0|=|f(x)-0|<\varepsilon$

1.4 連続関数

1.

(a) 存在しない　(b) ∞　(c) $\sqrt{a}$　(d) $-\sqrt{2}$　(e) 1　(f) 0　(g) 存在しない

2.

連続

3.

$a \in (0, \infty)$ のとき $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ を示す．任意の正の数 ε に対して，$\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$ ととると，

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}|x - a| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \leq \varepsilon$$

4.

(a) $\max = 11, \min = -1$　(b) $\min = 1$

(c) $\max = \begin{cases} 4 - 2a & a \leq 0 \\ 4 - 2a & 0 < a < 4 \\ 0 & a \geq 4 \end{cases}$　$\min = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ -\frac{a^2}{4} & 0 < a < 4 \\ -\frac{a^2}{4} & a \geq 4 \end{cases}$

5.

$f(x) = 2\sin x - x$ とおくと, $f(x)$ は $[\dfrac{\pi}{2}, \pi]$ で連続で $f(\dfrac{\pi}{2}) = 2 - \dfrac{\pi}{2} > 0$ また $f(\pi) = -\pi < 0$ となるので，中間値の定理より $f(\xi) = 0$ となる ξ が $[(\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ 内に存在する．

1.5 数列

1.

(a) ∞　(b) 0　(c) -1　(d) 1　(e) 0

2.

まず，$a > 1$ とすると $\sqrt[n]{a} > 1$ より $\sqrt[n]{a} = 1 + h$, $h > 0$ とおける．よって

$$a = (1 + h)^n = 1 + nh + \cdots + h^n \geq 1 + nh$$

これより

$$\lim_{n \to \infty} h = \lim_{n \to \infty} \frac{a - 1}{n} = 0$$

$a = 1$ のとき，全ての n で $\sqrt[n]{a} = 1$ より，

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$0 < a < 1$ のとき $b = \dfrac{1}{a}$ とおくと，$b > 1$ となり，

$$1 = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{b} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

3.

(a) a　(b) 3

1.6 超越関数

1.

(a) 非有界　(b) 有界

2.

(a) 4　(b) $2^{\frac{2}{3}}$

3.

(a) 1　(b) e^2　(c) 0　(d) 0

4.

(a) 1　(b) 1　(c) $\dfrac{1}{a}$　(d) α　(e) 1

1.7 実数の連続性

1.

$f(x)$ は $x=a$ で連続より，$c-f(a)>0$ を任意の正の数とすると，$|x-a|<\delta$ ならば

$$|f(x)-f(a)|<c-f(a)$$

よって $f(x)<f(a)+c-f(a)=c$.

2.1 導関数

1.

(a)

$$\frac{\cos(3(x+h))-\cos(3x)}{h}=\frac{\cos 3x(\cos 3h-1)}{h}-\frac{\sin 3x\sin 3h}{h}\to -3\sin 3x$$

(b)

$$\frac{(x+2+h)^n-(x+2)^n}{h}=\frac{n(x+2)^{n-1}h}{h}+h(\cdots)\to n(x+2)^{n-1}$$

2.

(a) $df=4x^3dx$　(b) $df=e^xdx$

3.

(a) $f_+^{'}(0)=1,\ f_-^{'}(0)=-1$　(b) $f_+^{'}(0)=0,\ f_-^{'}(0)=0$

(c) $f_+^{'}(0)=1,\ f_-^{'}(0)=-1$

4.

(a) $\dfrac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}$　(b) $\sec x\tan x$　(c) $-\mathrm{cosec}x\cot x$　(d) $-\mathrm{cosec}^2x$

(e) $x(x+2)e^x$　(f) $e^x(\sin x+\cos x)$　(g) $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$

2.2 微分法

1.

(a) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$　(b) $\dfrac{1}{1+x^2}$

2.

(a) $x^2\sqrt{\dfrac{x^3+2x+1}{x^2-3x+1}}\left(2+\dfrac{1}{2}(\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x+1}-\dfrac{2x-3}{x^2-3x+1})\right)$　(b) $x^x(\log x+1)$

(c) $\sin x^x\left(\log(\sin x)+\dfrac{x\cos x}{\sin x}\right)$　(d) $x^{1/x}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\log x}{x^2}\right)$

3.

(a) $-\dfrac{\cos t}{\sin t}$　(b) $\dfrac{2t^2-t^{1/2}}{t^{3/2}+2}$

4.

(a) $2\,x+\dfrac{5}{2}x^{3/2}$　(b) $2\,x^3\sec^2(2\,x)+3\,x^2\,\tan(2\,x)$　(c) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}(x)$

(d) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$　(e) $x\,\cos(x)+\sin(x)$　(f) $\sin^{-1}(x)$

(g) $\dfrac{2\,x}{2+2\,x^2+x^4}$　(h) $-\dfrac{\sin(\sqrt{1+2\,x})}{\sqrt{1+2\,x}}$

(i) $\dfrac{x^2}{(\cos(x)+x\,\sin(x))^2}$　(j) $e^{2\,x}\,(2\,\cos(x)-\sin(x))$　(k) $\dfrac{1}{\sqrt{A+x^2}}$

(l) $2x\cos(x^2+1)$　(m) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\sin\sqrt{x+1}$　(n) $e^{\sin x}\cos x$

2.3 高次導関数

1.

(a) 数学的帰納法を用いる．$n=1$ のとき，$(\sin x)'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$．次に，$n=k$ で成り立つと仮定し，$n=k+1$ で成り立つことを示す．

$(\sin x)^{(k+1)}=\left((\sin x)^{(k)}\right)'=\left(\sin(x+\dfrac{k\pi}{2})\right)'=\cos(x+\dfrac{k\pi}{2})=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2})$

(b) $n=1$ のとき，$(\cos x)'=-\sin x=\cos(x+\frac{\pi}{2})$．次に，$n=k$ で成り立つと仮定し，$n=k+1$ で成り立つことを示す．

$(\cos x)^{(k+1)}=\left((\cos x)^{(k)}\right)'=\left(\cos(x+\frac{n\pi}{2})\right)'=-\sin(x+\frac{n\pi}{2})=\cos(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$

(c) $n=1$ のとき，$[(1+x)^\alpha]'=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$．次に，$n=k$ で成り立つと仮定し，$n=k+1$ で成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}[(1+x)^\alpha]^{(k+1)}&=\left([(1+x)^\alpha]^{(k)}\right)'=\left(\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\right)'\\&=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)(1+x)^{\alpha-k-1}\end{aligned}$$

2.

(a) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} -2x-1+(1-x)^{-2}, & n=1 \\ -2+2(1-x)^{-3}, & n=2 \\ n!(1-x)^{-n-1}, & n \geq 3 \end{cases}$

(b) $x^2 \sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right) + 2xn\sin\left(x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)\sin\left(x+\dfrac{(n-2)\pi}{2}\right)$

(c) $(\sqrt{2})^n e^x \sin(x+(n\pi/4))$

2.4 関数の性質

1.

(a) $-\dfrac{1}{3}$ (b) $\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2}$ (c) $e-1$

2.

$f'(x) = 1-\sec^2 x \leq 0$ で等号は $x=0$ のときだけ．**3.**

(a) $f(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ とおくと，$f(0)=0$ となるので $x>0$ で $f'(x)>0$ を示せばよい．

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$$

(b) $f(x) = x - \tan^{-1} x$ とおくと，$f(0)=0$ となるので $x>0$ で $f'(x)>0$ を示せばよい．

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$$

次に， $g(x) = \tan^{-1} x - \dfrac{x}{1+x^2}$ とおくと，$f(0)=0$ となるので $x>0$ で $f'(x)>0$ を示せばよい．

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0$$

(c) 両辺に対数をとって，$\pi > e\log\pi$ を示す．$f(x) = x - e\log x$ とおくと $f(e)=0$．また $x>e$ で

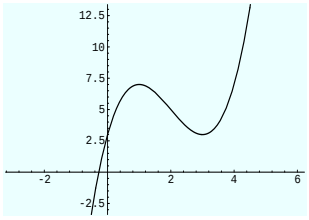
$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x} > 0$$

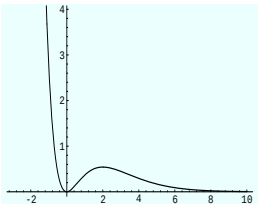
よって $f(\pi) = \pi - e\log\pi > 0$

4.

(a) $x=1$ で極大値 7，$x=3$ で極小値 3

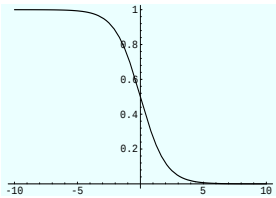
(b) $x=0$ で極小値 0， $x=2$ で極大値 $\dfrac{4}{e^2}$

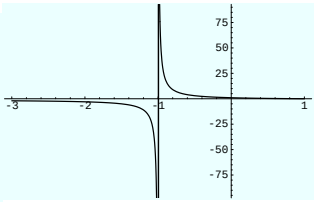




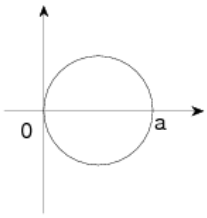
2.5 曲線の概形

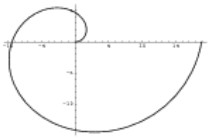
1.

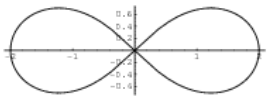




2.







2.6 不定形の極限値

1.

1.

(a) $\dfrac{2}{3}$　(b) 0　(c) 1　(d) 0　(e) $\dfrac{-1}{3}$　(f) 1　(g) $\sqrt{e}$　(h) e^{-1}

2.7 Taylor の定理

1.

(a) $f^{(n)}(x) = \cos(x + \dfrac{n\pi}{2})$ より

$$|R_n| = |\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n| \leq |\frac{\cos(\theta x + \frac{n\pi}{2})}{n!}||x|^n \leq \frac{1}{n!}|x|^n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(b) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(1+x)^{-n}$ より

$$|R_n| = |\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n| \leq |\frac{(-1)^{n-1}(1+\theta x)^{-n}}{n!}||x|^n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(c) $f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)(1+x)^{\alpha - n}$ より

$$|R_n| = |\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n| \leq |\frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)(1+\theta x)^{\alpha - n}}{n!}||x|^n \to 0 \ (n \to \infty)$$

2.

(a) 1 (b) $\dfrac{1}{6}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) 0

3. 省略

3.1 不定積分

以下不定積分の積分定数は省略してあります.

1.

(a) $-\dfrac{3}{2}x^{-2} + \dfrac{2}{3}x^6$ (b) $\dfrac{t^4}{4} + \tan^{-1}(t)$ (c) $-2(\tan x - x)$ (d) $\dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}$

(e) $x + \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{2}$ (f) $\sin^{-1}(\dfrac{t}{2})$ (g) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$ (h) $\log|t + \sqrt{t^2+4}|$

(i) $\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right|$

3.2 置換積分法

1.

(a) $-e^{2-x}$ (b) $-\tan(1-x)$ (c) $-\sqrt{1-x^2}$ (d) $\sec(x)$

(e) $-e^{\frac{1}{x}}$ (f) $\dfrac{2\sqrt{1+3\tan(\theta)}}{3}$ (g) $-2\,x - 2\,\cot(x)$ (h) $\dfrac{1}{2}(\log(x))^2$

(i) $\tan^{-1}(e^x)$ (j) $\dfrac{-\cos(x^2)}{2}$

3.3 部分積分法

1.

(a) $\dfrac{x^2\log x}{2}-\dfrac{x^2}{4}$　(b) $-e^x(x^2+2x+2)$　(c) $x(\log x)^2-2(x\log x-x)$
(d) $\dfrac{1}{16}(x+5)^{16}-\dfrac{1}{3}(x+5)^{15}$　(e) $\cos(x)+x\,\sin(x)$
(f) $-\dfrac{e^x}{2}(\cos x-\sin x)$　(g) $x\log(1+x^2)-2(x-\tan^{-1}x)$
(h) $\dfrac{x^2\tan^{-1}x}{2}-\dfrac{1}{2}(x-\tan^{-1}x)$　(i) $\dfrac{x^{n+1}\log x}{n+1}-\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
(j) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x$　(k) $x\cosh x-\sinh x$

3.4 有理関数の積分法

1.

(a) $\log|x-2|-\log|x+5|$　(b) $-\log|x|+\log|x^2-1|$
(c) $x+7\log|x-2|-4\log|x-1|$　(d) $\dfrac{3}{4}\log|x-1|-\dfrac{1}{2}(x-1)^{-1}+\dfrac{1}{4}\log|x+1|$
(e) $\dfrac{1}{128}[\dfrac{4x}{(16+x^2)}-\tan^{-1}(\dfrac{4}{x})]$
(f) $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+6x^2+32x+80\log|x-2|-\dfrac{32}{x-2}$
(g) $\dfrac{1}{9}\log|x^3-1|-\dfrac{1}{18}[\log|x^6+x^3+1|+2\sqrt{3}\tan^{-1}(\dfrac{2x^3+1}{\sqrt{3}})]$
(h) $\dfrac{1}{4}\log(\dfrac{x^4}{x^4+1})$

3.5 三角関数の積分法

1.

(a) $-\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{3}$　(b) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 6x}{12}$　(c) $\dfrac{\cos^5 x}{5}-\dfrac{\cos^3 x}{3}$
(d) $\dfrac{1}{2}[\dfrac{-\cos 5x}{5}+\cos x]$　(e) $-\cos x+\dfrac{2\cos^3 x}{3}-\dfrac{\cos^5 x}{5}$　(f) $\dfrac{1}{\pi}\tan\pi x$
(g) $\log|\cos x|+\dfrac{1}{2}\sec^2 x$　(h) $\dfrac{1}{3}\tan^3 x$　(i) $\dfrac{\sec^5 x}{5}-\dfrac{\sec^3 x}{3}$
(j) $\dfrac{1}{4}[\sec^3 x\tan x+\dfrac{3}{2}(\sec x\tan x+\log|\sec x+\tan x|)$　(k) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\tan^{-1}(\sqrt{5}\tan\dfrac{x}{2})$
(l) $-x+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\tan(\dfrac{x}{2})-\dfrac{1}{2})$　(m) $\tan(\dfrac{x}{2})+\log|1+\tan^2(\dfrac{x}{2})|$
(n) $\dfrac{1}{4}\log|\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}|+\dfrac{x}{2}$　(o) $\dfrac{1}{2}[x+\log|\cos x+\sin x|]$

3.6 無理関数の積分法

1.

(a) $2[\dfrac{(1+x)^{5/2}}{5}-\dfrac{(1+x)^{3/2}}{3}]$　(b) $x+2\sqrt{x}+2\log|\sqrt{x}-1|$
(c) $\log|\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}|$　(d) $\dfrac{2(x-1)^{7/2}}{7}+\dfrac{4(x-1)^{5/2}}{5}+\dfrac{2(x-1)^{3/2}}{3}$

(e) $\frac{1}{2}(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\log\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)-\log\left(1-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

2.

(a) $\sqrt{-4+x^2}$ (b) $2[\sqrt{4-x^2}-\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

(c) $\frac{1}{6}\log|\frac{3+e^x}{3-e^x}|$ (d) $-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3x^3}$

(e) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}$ (f) $-\frac{\sqrt{4+e^{2x}}}{4e^x}$ (g) $\frac{1}{2}\log|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}|$

(h) $-3\sin^{-1}\left(\frac{3-x}{3}\right)-\sqrt{6x-x^2}$

(i) $\sqrt{x^2-2x-3}+\log|\frac{x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}}{2}|$

(j) $-\frac{\sin^{-1}(3-x)}{2}-\frac{(3-x)\sqrt{1-(3-x)^2}}{2}$

(k) $\sqrt{x\ (6+x)}\left(-\frac{9}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\frac{27}{2}\log(3+x+\sqrt{x\ (6+x)})$

3.7 定積分

1.

(a) $-f(x)$ (b) $f(x+1)-f(x)$ (c) $2x\int_0^{2x}f(t)dt+2x^2f(2x)$

2.

(a) $\frac{32}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,e}$ (e) $\log(\frac{3}{2})$

3. 省略

4.

(a) $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\leq\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}<1$

(b)

$$\frac{1}{2(n+1)}<\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\ dx<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

5.

(a) $\log 2$ (b) $\log(1+\sqrt{2})$ (c) $\frac{1}{3}$

3.8 定積分の計算

1.

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $-2+2\sqrt{2}$ (c) $\frac{3\pi}{16}$ (d) $4\cos 1-2\sin 1$ (e) 0

(f) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (g) 1

2.

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x dx=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

3.9 広義積分

1.

(a) 2　(b) 発散　(c) -1

2.

(a) 1　(b) $\alpha > 1$ で収束，$\alpha \leq 1$ で発散　(c) $\alpha > 1$ で収束，$\alpha \leq 1$ で発散

3.

(a) 収束 $\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/4)}{2\Gamma(3/4)}$　(b) 収束 -4

3.10 定積分の応用

1.

(a) 4　(b) $\dfrac{3\pi}{16}$

2.

(a) $4\pi^2$　(b) $5\pi^2$

3.

(a) 6　(b) $\dfrac{1}{6}$　(c) $\dfrac{3\pi}{2}$

4.1 級数の定義

1.

(a) 発散　(b) 発散　(c) 発散

2.

(a) $\dfrac{1}{2}$　(b) 1　(c) $\dfrac{1}{4}$

4.2 正項級数

1.

(a) 収束　(b) 収束　(c) 発散　(d) 収束　(e) 収束　(f) 発散

4.3 交項級数

1.

(a) 条件収束　(b) 絶対収束　(c) 絶対収束　(d) 条件収束
(e) 条件収束　(f) 絶対収束

4.4 関数項級数

1.

(a) 1 (b) ∞ (c) 0

2.

(a) $2x + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{5} + \cdots + = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

(b) $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$

5.1 ベクトル関数

1.

(a) $(\cos t, -2\cos t \sin t, 2t)$ (b) $(\log|1+\sqrt{1+t^2}|, \tan^{-1} t, \log(\sec t))$

(c), (d) 省略

5.2 曲線

1.

(a) $\mathbf{r}(t) = (e, e^{-1}, 0) + t(e, -e^{-1}, -1)$ (b) $\mathbf{r}(t) = (1, 0, 2) + t(0, \pi, 1)$

2.

(a) $y = \dfrac{b}{a^2}x^2$ (b) $y = x^{2/3}$ (c) $z = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}(\dfrac{y}{x}), x^2 + y^2 = 1$

3.

(a) $\log(\sqrt{2})$ (b) $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$ (c) 3

4.

(a) $\dfrac{e^{-t}}{[1+e^{-2t}]^{3/2}}$ (b) $\cos t$ (c) $\dfrac{1}{3}$

5.3 点の運動

1.

(a) $\mathbf{v}(t) = (2bt - a\pi \sin \pi t, \pi a \cos \pi t - 2bt)$

$\mathbf{a}(t) = (-\pi^2 a \cos \pi t + 2b, -\pi^2 a \sin \pi t - 2b)$

$v = \sqrt{4b^2 + (\pi a - 2b)^2}$ $\hat{\mathbf{t}} = \dfrac{(2b, \pi a - 2b)}{\sqrt{4b^2 + (\pi a - 2b)^2}}$ $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{(-\pi^2 a + 2b, -2b)}{\sqrt{4b^2 + (2b - \pi^2 a)^2}}$

(b) $\mathbf{v}(t) = (3t^2, 1)$ $\mathbf{a}(t) = (6t, 0)$ $v = \sqrt{10}$ $\hat{\mathbf{t}} = \dfrac{(3,1)}{\sqrt{10}}$ $\hat{\mathbf{n}} = (1, 0)$

(c) $\mathbf{v}(t) = (0, 2t, 2(t-1))$ $\mathbf{a}(t) = (0, 2, 2)$ $v = 2$ $\hat{\mathbf{t}} = (0, 1, 0)$ $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$

2.

(a) $\hat{\mathbf{t}} = \left(\frac{1}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2}, \frac{2t^2}{1+2t^2}\right)$　$\kappa = \frac{2}{(1-2t^2)}$　$\hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{-2t}{1+2t^2}, \frac{1-2t^2}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2}\right)$
$\hat{\mathbf{b}} = \left(\frac{2t^2}{1+2t^2}, \frac{-2t}{1+2t^2}, \frac{1}{1+2t^2}\right)$　$\tau = \frac{2}{(1+2t^2)}$
(b) $\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{2}(-\sin t, \cos t, 1)$　$\kappa = \frac{1}{2}$　$\hat{\mathbf{n}} = (-\cos t, -\sin t, 0)$　$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{2}(\sin t, -\cos t, 1)$
$\tau = \frac{1}{2}$

6.1 関数の定義

1.

(a) $D(f) = R^2$　(b) $D(f) = R^2 \setminus (0,0)$　(c) $D(f) = \{(x,y) : xy < 1\}$

6.2 偏導関数

1.

(a) $z_x = 3x^2 + y^2, z_y = 2xy + 3y^2$
(b) $z_x = e^x \sin y,\ z_y = e^x \cos y$
(c) $z_x = \frac{2x}{x^2+y^2},\ z_y = x^3 + 2xy$

2.

(a) $z_x = 3x^2y + y^2, z_y = x^3 + 2xy, z_{xx} = 6xy, z_{xy} = 3x^2 + 2y, z_{yx} = 3x^2 + 2y, z_{yy} = 2x$
(b) $(y^2 + xy)e^{\frac{x}{y}},\ z_y = (2xy - x^2)e^{\frac{x}{y}},\ z_{xx} = e^{\frac{x}{y}}(x + 2y)$
$z_{xy} = e^{\frac{x}{y}}(2y - \frac{x^2}{y}), z_{yy} = e^{\frac{x}{y}}(2x - \frac{2x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2})$
(c) $z_x = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2},\ z_y = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2},\ z_{xx} = \frac{2+2(x^2+y^2)^2 - 8x^2(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2}$
$z_{yy} = \frac{2+2(x^2+y^2)^2 - 8y^2(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)}, z_{xy} = \frac{-8x(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2}$

3.

(a) $f_x(0,0), f_y(0,0)$ が存在するか調べればよい．$fx(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$ より $f_x(x,0) = 0$．したがって，$f_x(0,0) = 0$．$fy(0,y) = \frac{y^3}{y^2} = y$．$f_y(0,y) = 1$．したがって，$f_y(0,0) = 1$.

(b) $f(x,0) = \log 1 = 0$ より $f_x(x,0) = 0$．したがって，$f_x(0,0) = 0$．$f(0,y) = \log(1+y^2)$ より $f_y(0,y) = \frac{2y}{1+y^2}$．したがって，$f_y(0,0) = 0$.

6.3 関数の極限

1.

(a) 開集合，有界，連結，領域，$\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$
$\overline{D} = \{(x,y) : 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}$
(b) 閉集合，非有界，連結，領域，$\partial D = \{(x,y) : x = 0, y = 0\}$

$\overline{D} = \{(x, y) : xy \leq 0\}$

2

(a) 存在しない　(b) 存在しない　(c) 0

3.

(a) 連続　(b) 不連続　(c) 不連続

6.4 全微分

1.

(a) $df = 3x^2y^4dx + 4x^3y^3dx,\ \nabla f = (3x^2y^4, 4x^3y^3)$
$z = 3x + 4y - 6, \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$
(b) $df = (3x^2y + 2xy^4)dx + (x^3 + 4x^2y^3)dy,\ \nabla f = (3x^2y + 2xy^4, x^3 + 4x^2y^3)$
$z = 5x + 5y - 8, \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{-1}$
(c) $df = (2xye^{2x} + 2x^2ye^{2x})dx + xe^{2x}dy,\ \nabla f = (2xye^{2x} + 2x^2ye^{2x}, xe^{2x})$
$z = 4e^2x + e^2y - 4e^2, \dfrac{x-1}{4e^2} = \dfrac{y-1}{e^2} = \dfrac{z-e^2}{-1}$
(d) $df = y\sin(xy)dx - x\sin(xy)dy,\ \nabla f = (-y\sin(xy), -x\sin(xy))$
$-(x-1)\sin 1 - (y-1)\sin 1 - (z - \cos 1) = 0, \dfrac{x-1}{-\sin 1} = \dfrac{y-1}{-\sin 1} = \dfrac{z-\cos 1}{-1}$

2.

(a) $f(125, 17) \approx 22.7$　(b) $f(\frac{6\pi}{7}, \frac{\pi}{3}) \approx 0.22$

6.5 方向微分

1.

(a) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.

(a) $\dfrac{1}{8}$　(b) $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

3.

(a) $(1, 1)$ の方向で$\sqrt{2}$　(b) $(-1, -1)$ の方向で 0

6.6 合成関数の偏微分法

1.

(a) $\dfrac{2x}{x^2+y^2}(1 - \dfrac{1}{t^2}) + \dfrac{2y}{x^2+y^2}(2t-1)$　(b) $z_x(2t) + z_ye^t$
(c) $2z_x + 8tz_y$　(d) $-6\sin t\cos t$

2.

(a) $z_r = \dfrac{-3s}{r^2+s^2}, z_s = \dfrac{3r}{r^2+s^2}$

(b) $z_r = \dfrac{-2(r-1)}{(r-1)^2+s^2} + \dfrac{2(r+1)}{(r+1)^2+s^2}, z_s = \dfrac{-2s}{(r-1)^2+s^2} + \dfrac{2s}{(r+1)^2+s^2}$

(c) $z_r = 1, z_s = -2r\sin s\cos s$

—bf 3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= z_x\cos\theta + z_y\sin\theta\\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= z_x(-r\sin\theta) + z_y(r\cos\theta)\\ &= r(-z_x\sin\theta + z_y\cos\theta)\end{aligned}$$

6.7 2 変数関数の極値

1.

(a) $(1,4)$ で極小値 -14　(b) 極値なし　(c) $(1,1)$ で極小値 -1　(d) $(\pm 1, 0)$ で極小値 -1

2.

(a) $f(x,y) = 1 + x + \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2)$

(b) $\log 3 + \dfrac{1}{3}(x-2) + \dfrac{2}{3}(y-1) - \dfrac{1}{18}(x-2)^2 - \dfrac{2}{9}(x-2)(y-1) + \dfrac{2}{9}(y-1)^2 + \cdots$

6.8 陰関数

1.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x+5y}{5x-6y}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4(5x-6y)^2 - 2(5)(4x+5y)(5x-6y) + (-6)(4x+5y)^2}{(5x-6y)^3}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{x+y}}{1-e^{x+y}}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{-e^{x+y}(1-e^{x+y})^2 - 2(-e^{x+y})(-e^{x+y})(1-e^{x+y}) + (-e^{x+y})(-e^{x+y})^2}{(1-e^{x+y})^3}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-y}{x+2y}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2(-2y-x)^2 - 2(-1)(2x-y)(-2y-x) + (-2)(2x-y)^2}{(-2y-x)^3}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}, \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

2.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x-2}{y}, \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{2}{z}$　(b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2(z-x)}{x^2(z-y)}, \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{z^2(y-x)}{x^2(y-z)}$

3.

接線：$t = \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-5}{-\sqrt{2}}$　　法線：$t = \dfrac{x-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-5}{5}$

4.

接平面：$z = -x + y + \dfrac{\pi}{2}$　　法線：$t = \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-\frac{\pi}{2}}{-1}$

5.

(a) $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ のとき極小値 $-2\sqrt{2}$，$x = -\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ のとき極大値 $2\sqrt{2}$

(b) $x = 1$ で極大値 $-\dfrac{1}{2}$，$x = -1$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$

(c) $x = 2\sqrt[3]{2}$ で極大値 $2\sqrt[3]{4}$

6.9 陰関数

1.

(a) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $y = -2\sqrt{2}$ は極小値，$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $y = 2\sqrt{2}$ は極大値.

(b) $x = 1$ のとき $y = -\frac{1}{2}$ は極小値，$x = -1$ のとき $y = \frac{1}{2}$ も極小値.

(c) $x = 2\sqrt[3]{2}$ のとき $y = 2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}$ は極小値.

2.

(a) 最小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$，最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$　　(b) $(0,0)$ で最小値 0，$(3,3)$ で最大値 18

(c) $(\pm 1, \pm 1)$ で最大値 1，$\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最小値 $-\dfrac{1}{3}$

3.

6

4.

$(0,0,1)$ で最大値 3，$(1,0,0)$ で最小値 1

7.2 累次積分

1.

(a) 2　(b) $\dfrac{e^2}{2} - e + \dfrac{1}{2}$　(c) $\dfrac{2}{27}$　(d) $\dfrac{512}{15}$

2.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{y^{1/4}} f(x,y)dxdy$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-x}^1 f(x,y)dydx + \int_0^1 \int_x^1 f(x,y)dydx$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^y f(x,y)dxdy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)dxdy + \int_4^8 \int_{\frac{y}{2}}^4 f(x,y)dxdy$

3.

(a) $e - 1$　(b) $\dfrac{e-1}{2}$　(c) $1 - \sin 1$

7.3 変数変換

1.

(a) 4π　(b) $4\pi[2\log 2 - \frac{3}{4}]$　(c) $\dfrac{1}{4}(e - e^{-1})$　(d) $\pi(e^4 - e)$　(e) $\dfrac{2\pi}{3}$　(f) $-\dfrac{7}{60}$

7.2

$$\frac{2e}{3} - \frac{8}{3e}$$

7.4 広義積分

1.

(a) $\dfrac{\pi}{2}$　(b) 1　(c) $\dfrac{\pi^2}{16}$　(d) 1　(e) π　(f) $\dfrac{\pi^2}{2}$

2.

$t = x^{\frac{1}{2}}$ とおくと，$2tdt = dx$．したがって，

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

$I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx, I = \int_0^\infty e^{-y^2} dt$ とおくと，

$$I^2 = \iint_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

ここで例題 7.4 を用いると，$I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ より $\Gamma(\dfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

7.5 2 重積分の応用

1.

(a) $\dfrac{3\pi}{32}$　(b) $\dfrac{a^2\pi}{2}$　(c) $4\pi - \dfrac{3}{2}$

2.

(a) $4\pi a^2$　(b) $\dfrac{2\pi}{3}[(1+a^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$　(c) $8a^2$　(d) $\pi k^2 m\sqrt{m^2+1}$

3.

(a) $\dfrac{2a^3}{3}$　(b) $\dfrac{54}{105}$　(c) $-\dfrac{4a^3}{3}(\dfrac{2}{3} - \dfrac{\pi}{2})$　(d) $\dfrac{2}{9}$

7.6 3 重積分

1.

(a) $\dfrac{1}{6}$　(b) $\dfrac{1}{6}(e-1)^3$

2.

(a) $\dfrac{27\pi(2\sqrt{2}-1)}{2}$ (b) $\dfrac{4}{15}\pi abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

3.

(a) $(\bar{x},\bar{y})=(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5})$ (b) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\dfrac{2a}{5})$ (c) 高さの方向に $\dfrac{h}{4}$

(d) $(\bar{x},\bar{y})=(-\dfrac{a}{6},0)$ (e) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$ (f) $(\bar{x},\bar{y})=(-\dfrac{6a}{5(3\pi-2)},0)$

8.1 曲面

1.

(a) $8x+8y-z=12$ (b) $8x-10y+6z=-9$ (c) $z=0$

2.

(a) $\sqrt{4(u^2+v^2)+1}dudv$ (b) $\sqrt{u^2+4}dudv$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$ (d) $\dfrac{1}{F_z}\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}dxdy$

8.2 スカラー場とベクトル場

1.

(a) $\hat{\mathbf{n}}=\dfrac{(2,-2,-1)}{3},\ 2x-2y-z=0$ (b) $\hat{\mathbf{n}}=\dfrac{(1,0,6)}{\sqrt{37}},\ x+6z=8$

(c) $\hat{\mathbf{n}}=\dfrac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}},\ y-z=\pi$

2.

(a) $(-1,0,-1)$ (b) $(1,0,-1)$ または $(ー1,0,1)$

3.

(a) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=c$ (b) $xy=c$

8.3 ベクトル場の発散

1.

(a) $(6,-1,1)$ (b) 4 (c) $(-1,-11,-5)$ (d) $(8,-9,-6)$

(e) 4 (f) $(26,5,-11)$ (g) $(5,-41,-35)$ (h) 0

8.4 線積分

1.

(a) $\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$ (b) $\dfrac{7\sqrt{14}}{2}$ (c) $\dfrac{3\pi}{16}+\dfrac{2}{3}$ (d) $\dfrac{10}{3}$ (e) $\dfrac{33}{13}$

8.5 面積分

1.

(a) $\dfrac{1}{20\sqrt{3}}$　(b) -9　(c) $\frac{16}{3}$　(d) a^3　(e) $\dfrac{3\pi}{2}$

8.6 ベクトル積分定理

1.

(a) 8　(b) 0　(c) $\dfrac{1}{4}$

2.

(a) $\dfrac{36\sqrt{3}}{5}\pi$　(b) 0　(c) $\dfrac{672}{5}$　(d) 81π

3.

Green の定理において，$P=-y, Q=x$ とおくと，

$$\oint_c xdy - ydx = \iint_\Omega \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dxdy = 2\iint_\Omega dxdy = 2A$$

4.

πab

5.

発散定理において $\mathbf{F} = f\mathrm{grad}g$ とおくと

$$\cdot\,\hat{\mathbf{n}} = f(\mathrm{grad}g\cdot\hat{\mathbf{n}} = f\frac{\partial g}{\partial n}$$

また，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{F} &= \mathrm{div}(f\mathrm{grad}g)\\ &= \nabla\cdot(f\nabla g) = (\nabla f)\cdot\nabla g + f\nabla\cdot\nabla g\\ &= \mathrm{grad}f\cdot\mathrm{grad}g + f\nabla^2 g\end{aligned}$$

よって

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS = \iiint_V (f\nabla^2 g + \mathrm{grad}f\cdot\mathrm{grad}g)dV$$

索引

Bernoulli の不等式, 44

Cauchy の平均値の定理, 88

D'Alembert の判定法, 144

Euler e, 46

Gamma 関数, 128
Gauss の発散定理, 256
Green の定理, 249

L'Hospital の定理, 89
Lagrange の乗数法, 200
Landau のスモールオー, 94
Landau のビッグオー, 94
Leibniz の定理, 73, 145

Maclaurin 展開, 93

Riemann 和, 117
Rolle の定理, 77

Stokes の定理, 252

Taylor 展開, 93
Taylor の定理, 92
telescoping sum, 139

Wallis, 123
Weierstrass の判定法, 147

アルキメデスの渦線, 87
一意性, 51
1 対 1 の関数, 14
一様収束する, 147
1 価関数, 11
一般項, 39
一般調和級数, 140
陰関数, 194
陰関数の存在定理, 195
上に凸, 80
上に有界, 41, 55
内面積, 204
n 回微分可能, 73
n 乗根, 2
閉集合, 176
開集合, 176
回転, 241
外点, 176
下界, 55
下限, 56
加速度ベクトル, 164
割線, 59
関数項級数, 147
奇関数, 17, 123
逆関数, 14
逆関数定理, 16
逆関数の微分法, 69
逆三角関数, 23
逆正弦関数, 23
逆正接関数, 24
逆余弦関数, 24
級数, 137
境界, 176
境界点, 176
狭義の単調減少関数, 15
狭義の単調増加関数, 15
極, 84
極限, 41
極限値, 26, 41
極座標, 84
極座標系, 84
極軸, 84
極小, 79
極小値, 190
曲線の長さ, 134
極大, 79
極大値, 190
極値, 79, 190
極方程式, 85
曲率, 162
逆正弦関数の主値, 23
逆正接関数の主値, 25
逆余弦関数の主値, 24
偶関数, 17, 123
区間 I で微分可能, 62
区分求積法, 118
区分的に滑らかな曲線, 243
グラフ, 12, 169
原始関数, 97
懸垂線, 54
項, 39
広義積分, 124
広義の定積分, 125
交項級数, 145
合成関数, 14
合成関数の微分法, 68
合成法則, 14
勾配, 181

項別微分の定理, 149
項別積分の定理, 149
弧長, 160
弧度法, 18
弧の長さ, 133
最小な上界, 56
最大・最小値の定理, 36
最大な下界, 56
三角関数, 18
三角不等式, 9
指数, 4
指数関数, 53
自然数, 1
下に凸, 80
下に有界, 41, 55
質量, 228
質点系の重心, 227
ジャコビアン, 211
重積分公式, 205
収束する, 41, 137
収束半径, 150
従法線単位ベクトル, 166
縦線集合, 207
主法線単位ベクトル, 159
条件収束, 129
上界, 55
上限, 56
条件収束, 145
初等関数, 17
初速度, 73
真性不連続点, 33
心臓形, 86
数直線, 55
数列, 39
数列の基礎定理, 46, 57
スカラー場, 234
スカラーポテンシャル, 238
整関数, 17
整級数, 150
整級数の基本性質, 151
正項級数, 141
整式, 17
整数, 1
積分可能, 118, 214
積分定数, 97
積分する, 97
積分順序の交換, 209
積分判定法, 142
接線, 60
接線単位ベクトル, 159
接線ベクトル, 159
絶対収束, 129, 145
絶対値, 3
接平面, 182, 232
線積分, 242
尖点, 87
全微分, 181
　—可能, 179
像, 12, 169
双曲線関数, 54
増分, 66
束, 248
束積分, 248
速度ベクトル, 164
外面積, 204
第 n 次導関数, 72
第 n 部分和, 137
代数学の基本定理, 105
代数関数, 51
対数関数, 53
対数微分法, 70
第 2 次導関数, 72
第 2 次偏導関数, 173
互いに素, 2
多価関数, 11
多重積分, 205
ダミー変数, 98
単一閉曲線, 249
単調減少数列, 41
単調増加数列, 41
値域, 12, 169
置換積分法, 101
実数, 3
中間値の定理, 36, 58
重力加速度定数, 73
循環小数, 1
循環小数 (recurring decimals), 1
超越関数, 51
除去可能な不連続点, 33
底, 4
定義域, 11, 169
定積分, 118
Taylor の多項式, 92
等位面, 170, 236
導関数, 62
等高線, 170
内点, 175
滑らかな曲線, 160
滑らかな曲面, 218
2 項定理, 49
2 重積分可能, 204
2 分法, 37
2 変数の Taylor の定理, 191
ねじれ率, 166
媒介変数, 71
媒介変数表示による関数の微分法, 71
背理法, 3
はさみうちの定理, 30, 43
発散, 239
発散する, 42, 137
比較判定法, 142
微分積分学の基本定理, 120
左側極限値, 33
左側微分係数, 61
左側連続, 35
微分, 66
　—可能, 60
　係数, 60
　—する, 63
微分可能, 156
v 曲線, 232
不定形, 29, 43, 88

不定積分, 97
負の指数, 5
部分積分法, 103
部分分数分解, 106
平均値の定理, 76
閉包, 176
平方根, 2
平面上の Green の定理, 249
閉領域, 176
ヘービサイド展開, 107
ベキ関数, 51
ベクトル関数, 155
ベクトル値関数, 155
ベクトル場, 181, 234
ベルヌーイのラムニスケイト, 87
変曲点, 80
偏導関数, 172
偏微分, 172
　—可能, 172
方向微分, 184
法線ベクトル, 159, 232
保存場, 238
Maclaurin の定理, 92
右側極限値, 33
右側微分係数, 61
右側連続, 35
向きづけられる曲面, 252
無限回微分可能, 73
無限積分, 124, 127
無限等比級数, 138
無理関数, 17, 18
無理数, 3
面積確定, 204
面積素, 232
面積分, 246
有界, 41, 55, 176
u 曲線, 232
有理関数, 17
有理数, 1
横線集合, 207
Lagrange の剰余数, 92
ラプラシアン, 240
ラプラスの方程式, 240
力線, 235
リマソン, 86
流線, 235
領域, 176
累次積分, 206
累乗, 4
連結, 176
連続, 32