9.1　無理関数の積分

無理関数の積分

$R(x,y)$ を x,y の有理関数とすると，

[1] $\displaystyle\int R(x, \sqrt[n]{1\text{ 次式}})dx$

$t = \sqrt{1\text{ 次式}}$ とおくことにより，有理関数の積分に変換でる．

[2] $\int R(x, \sqrt{2\text{ 次式}})dx$, $(a \neq 0)$

(1) 2 次式を平方完成して 2 乗の和 $x^2 + a^2$ の形になる場合は，$x = a\tan t$ とおくと，

$$dx = a\sec^2 t dt, x^2 + a^2 = a^2(\tan^2 t + 1) = a^2\sec^2 t$$

となり三角関数の有理式の積分に変換できる．

(2) 2 次式を平方完成して 2 乗の差 $a^2 - x^2$ の形になる場合は，$x = a\sin t$ とおくと

$$dx = a\cos t dt, a^2 - x^2 = a^2(1 - \cos^2 t) = a^2\sin^2 t$$

となり三角関数の有理式の積分に変換できる．

(3) 2 次式を平方完成して 2 乗の差 $x^2 - a^2$ の形になる場合は，$x = a\sec t$ とおくと

$$dx = a\sec t\tan t dt, x^2 - a^2 = a^2(\sec^2 t - 1) = a^2\tan^2 t$$

となり三角関数の有理式の積分に変換できる．

例題 9.1　次の不定積分を求めてみよう．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

解答 (1) $\sqrt{1\text{ 次式}}$ より $\sqrt{x} = t$ とおくと $x = t^2$ より $dx = 2tdt$ となる．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}} &= \int \frac{2t}{1-t}dt = \int \frac{-2(1-t)+2}{1-t}\,dt = \int (-2 + \frac{2}{1-t})dt \\ &= -2t - 2\log|1-t| + c = -2\sqrt{x} - 2\log|1-\sqrt{x}| + c \ \blacksquare\end{aligned}$$

(2) $x^2 - a^2$ の形より $x = 2\sec t$ とおくと $dx = 2\sec t\tan t dt$．また，$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2 x - 4} = \sqrt{4(\sec^2 x - 1)} = 2\tan t$ と表せる．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx &= \int \frac{2\sec t}{2\tan t}\cdot 2\sec t\tan t dt = 2\int \sec^2 t dt \\ &= 2\tan t + c = \sqrt{x^2-4} + c \ \blacksquare\end{aligned}$$

(3) $a^2 - x^2$ の形より $x = 2\sin t$ とおくと $dx = 2\cos t dt$．また，$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 x} = \sqrt{4(1-\sin^2 x)} = 2\cos t$ と表せる．よって

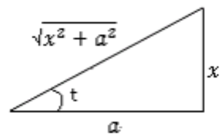
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos t dt = 4\int \sin^2 t dt \\ &= 4\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2\int (1-\cos 2t)dt = 2(t - \frac{\sin 2t}{2}) + c \\ &= 2\big(\sin^{-1}\frac{x}{2} - \sin t\cos t\big) + c = 2\big(\sin^{-1}\frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}\big) + c \ \blacksquare\end{aligned}$$

$R(x,y)$ は有理関数

$R(x,y)$ が x,y の有理関数とは，$R(x,y)$ が x,y についての分数関数ので表されることである．

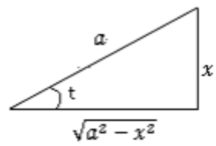
2 乗の和

斜辺に 2 乗の和がくるように，a,x,t を定める．



2 乗の差

隣辺に 2 乗の差がくるように，a,x,t を定める．



例題 9-1-(1)

無理関数の積分は，無理関数を有理関数になるように置換する．

例題 9-1-(2)

置換積分 $t = x^2 - 4$, $dt = 2xdx$ とおいて解く問題であるが，あえて三角関数の置換がどのくらい便利かをみるために解いた．三角関数の置換を用いて解いた．

例題 9.2 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ (2) $\displaystyle\int \sqrt{6x-x^2-8}\ dx$

解答 (1) $x = 2\sec t$ とおくと $dx = 2\sec t\tan t dt$, $\sqrt{x^2-4} = 2\tan t$. これより,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec t\tan t dt}{4\sec t\tan t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + c$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + c \ \blacksquare$$

例題 9-2-(1)
$x = 2\sec t$ より $t = \sec^{-1}\frac{x}{2}$ ではなく, $\tan t = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ より $t = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$

(2) 平方完成を行うと

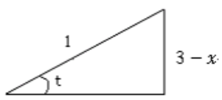
$$6x - x^2 - 8 = 9 - 9 + 6x - x^2 - 8 = 1 - (9 - 6x + x^2) = 1 - (3-x)^2.$$

例題 9-2-(2)
$ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x)+c = a(x+\frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}$.

$a^2 - x^2$ の形の 2 乗の差なので, 斜辺 1 で角 t の対辺が $3-x$ となる直角三角形を考える.

$3 - x = \sin t$ より $-dx = \cos t dt$. また,

$$\sqrt{1-(3-x)^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$$



$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$
$\sin 2t = 2\sin t\cos t$

より

$$\int \sqrt{6x-x^2-8}\ dx = \int \cos t(-\cos t)\ dt$$
$$= -\int \cos^2 t\ dt$$
$$= -\int \frac{1+\cos 2t}{2}\ dt = -[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}] + c$$
$$= -[\frac{t}{2} + \frac{\sin t\cos t}{2}] + c$$
$$= -\frac{\sin^{-1}(3-x)}{2} - \frac{(3-x)\sqrt{1-(3-x)^2}}{2} + c \ \blacksquare$$

演習問題 9.1 1. 次の積分を求めなさい.

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\ dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

(d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}\ dx$ (e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\ dx$

2. 次の積分を求めなさい.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{9-e^{2x}}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\ dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{4+e^{2x}}}$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ (h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2}}\ dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-3}}\ dx$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{6x-x^2-8}\ dx$ (k) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+6x}\ dx$