8.1　有理関数の積分

$f(x)$，$g(x)$ が整式のとき，その商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の不定積分は，これから示す方法で理論的には必ず積分を求めることができる．

分数関数の整理

$f(x)$ の次数 $>$ $g(x)$ の次数 の場合は， $f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $q(x)$，余りを $r(x)$ とすると，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)},\ (r(x) \text{ の次数} < g(x) \text{ の次数}).$$

$q(x)$ は整式なので，その積分は容易に求められる．

分母の因数分解

代数学の基本定理 によると，すべての整式は 1 次式と 2 次式の積で表すことができる．

部分分数分解

部分分数分解 とは， $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ を分子の次数が分母の括弧内の次数より 1 次少ない分数で，その数が $g(x)$ の因数の数となるように分解することをいう．

例題 8.1　次の有理関数を部分分数分解してみよう．ただし，定数 $A, B, C, \ldots$ は求めなくてよい．

$$\frac{3x}{(x-2)^3}$$

解 分母の因数は，$x-2, (x-2)^2, (x-2)^3$ より 3 個．したがって， 3 個の部分分数が必要となる．また，分母の括弧内の次数が 1 より分子は定数となることに注意すると，

$$\frac{3x}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} \ \blacksquare$$

演習問題 8.1　次の有理関数を部分分数分解しなさい．ただし，定数 $A, B, C, \ldots$ は求めなくてよい．

$$\frac{3x}{(x^2+1)^3}$$

次数合わせによる係数の求め方

$g(x)$ を両辺にかけて，分母を払う．すると両辺に多項式が生まれる．この多項式はすべての x で等しいので，対応する係数どうしは等しくなければならない．そこで左辺の x^k の係数と右辺の x^k の係数を等しくおくことにより連立方程式が作れる．この連立方程式を解くと定数 $A, B, C, D, \ldots$ が求まり，部分分数分解が完成する．

例題 8.2 $\dfrac{3x}{(x-2)^3}$ を部分分数分解してみよう．

解答 例題 8.1 より，$\frac{3x}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$．ここで分母を払い整理すると

$$\begin{aligned} 3x &= A(x-2)^2 + B(x-2) + C = Ax^2 - 4Ax + 4A + Bx - 2B + C \\ &= Ax^2 + (-4A+B)x + (-2B+C). \end{aligned}$$

左辺と右辺の係数が等しいことに注意すると

$$A = 0, -4A + B = 3, -2B + C = 0.$$

有理関数の積分の確認

1. 分子の次数 $<$ 分母の次数．もしそうでないなら分子を分母で割る．
2. 分母を因数分解する．このときの分母の因数の数が部分分数の数となる．
3. 部分分数分解を行う．

代数学の基本定理

3 次以上の多項式は，必ず因数分解ができることを示したのが代数学の基本定理である．

次数合わせの欠点

次数合わせによる係数の求め方では，分母の次数が大きくなると連立方程式の数が増え，計算が煩雑になる．そこで，次数の大きいときには，**ヘービサイドの展開定理**という方法が用いられる．

例題 8-2

$\frac{3x}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$ の分母を払い，$x \to 2$ とすると $\lim_{x\to 2} 3x = \lim_{x\to 2}(A(x-2)^2 + B(x-2) + C)$．これより，$C = 6$ となる．これがヘービサイドの展開定理の一部である．

これより $A=0,\ B=3,\ C=6$ となり，

$$\frac{3x}{(x-2)^3}=\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}.$$

演習問題 8.2 $\dfrac{3x}{(x^2+1)^3}$ を部分分数分解しなさい.

演習 8-2

分母のカッコ内の次数は 2 で分子の次数は 1．このように，分子の次数が分母のカッコ内の次数より低ければ，これ以上部分分数分解はできない.

演習 8-2

$t=x^2+1$ とおくと, $dt=2xdx$ より,

$$\begin{aligned}&\int\frac{3x}{(x^2+1)^3}dx\\&=\int\frac{3/2}{t^3}dt\\&=\frac{3}{8}t^4+c\\&=\frac{3}{8}(x^2+1)^4+c\end{aligned}$$

有理関数の攻略

1. 分母のカッコ内が 1 次式のとき，$t=1$ 次式 とおくことで積分できる.
2. 分母のカッコ内が 2 次式で分子が 1 次式の場合，$t=2$ 次式 とおくことで積分できる.
3. 分母のカッコ内が 2 次式で分子が定数の場合，部分積分法または，次節でまなぶ三角置換で積分できる.

式の確認

$\left(\frac{1}{(x^2+A)^n}\right)'=\frac{-((x^2+A)^n)'}{(x^2+A)^{2n}}=\frac{-n(x^2+A)^{n-1}(2x)}{(x^2+A)^{2n}}$

式の確認

$\frac{x^2}{(x^2+A)^{n+1}}$ を $\frac{x^2+A-A}{(x^2+A)^{n+1}}=\frac{1}{(x^2+A)^n}-\frac{A}{(x^2+A)^{n+1}}$ と表すことで，I_n と $_{n+1}$ の形に分解している.

部分分数分解後の形

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を部分分数分解すると，次の形の分数の和として表せる.

$$\frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Bx+C}{\{(x-a)^2+b^2\}^n}$$

これらの関数の積分は，$t=x-a$ とおくと，次の形の関数に帰着する.

$$\frac{1}{t^n},\quad \frac{1}{(t^2+b^2)^n},\quad \frac{t}{(t^2+b^2)^n}.$$

まとめると，有理関数の不定積分は次の 3 つの関数の不定積分ができれば必ず求められる.

有理関数の積分公式

定理 8.1 (1) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\begin{cases}\frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+c & (n=2,3,4,\ldots)\\ \log|x-a|+c & (n=1)\end{cases}$

(2) $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+b^2)^n}dx=\begin{cases}\frac{-1}{2(n-1)(x^2+b^2)^{n-1}}+c & (n=2,3,4,\ldots)\\ \frac{1}{2}\log|x^2+b^2|+c & (n=1)\end{cases}$

(3) $\displaystyle I_n=\int\frac{dx}{(x^2+A)^n}$ とおくと，次の漸化式が成り立つ.

$$I_{n+1}=\frac{1}{2nA}\left\{\frac{x}{(x^2+A)^n}+(2n-1)I_n\right\}\ (n\geqq 1)$$

証明 (1) $t=x-a$ とおくと， $dt=dx$ より

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\int\frac{dt}{t^n}=\int t^{-n}dt=\begin{cases}\log|t|+c & n=1\\ \frac{1}{-n+1}t^{-n+1}+c & n\neq 1\end{cases}$$

(2) $t=x^2+b^2$ とおくと， $dt=2xdx$ より

$$\int\frac{xdx}{(x^2+b^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n}=\frac{1}{2}\int t^{-n}dt\begin{cases}\log|t|+c & n=1\\ \frac{1}{-n+1}t^{-n+1}+c & n\neq 1\end{cases}$$

(3) 分母の括弧内が 2 次式で分子が定数という形をしているので，置換積分ではなく部分積分を用いる. $\begin{cases}f=\frac{1}{(x^2+A)^n} & & g'=1\\ & \searrow & \\ f'=\frac{-2nx(x^2+A)^{n-1}}{(x^2+A)^{2n}} & \leftarrow & g=x\end{cases}$ より

$$\begin{aligned}I_n=\int\frac{dx}{(x^2+A)^n}&=\frac{x}{(x^2+A)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{(x^2+A)^{n+1}}\\&=\frac{x}{(x^2+A)^n}+2n\int\frac{x^2+A-A}{(x^2+A)^{n+1}}dx\\&=\frac{x}{(x^2+A)^n}+2nI_n-2nAI_{n+1}\ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 8.3 $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^3-1}dx$ を求めてみよう.

解答 分子の次数が分母の次数以上なので割ると，

$$\frac{x^4}{x^3-1} = \frac{x(x^3-1)+x}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1}.$$

次に，分母を因数分解すると

$$\frac{x^4}{x^3-1} = x + \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

ここで，$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}$ の部分分数分解を行うと，

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

分母を払い整理すると，

$$x = A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C) = (A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C).$$

ここで左辺と右辺の係数が等しいことに注意すると

$$A+B=0, A-B+C=1, A-C=0$$

これを解くと $A=\dfrac{1}{3}$，$B=-\dfrac{1}{3}$，$C=\dfrac{1}{3}$．よって

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}dx = \int (x + \frac{1/3}{x-1} + \frac{-x/3+1/3}{x^2+x+1})dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}[\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx]$$

$$\int \frac{x^4}{x^3-1} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}[\int \frac{x-1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx]$$

ここで $x+\dfrac{1}{2}=t$ とおくと，$dx=dt, x=t-\frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx &= \int \frac{t-3/2}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt = \int \frac{t}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt - \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2) - \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)+c \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c. \blacksquare\end{aligned}$$

> 式の確認
> x^2+x+1 に次数は 2 より，分子は分母のカッコ内の次数ー 1．つまり 1 次式.

> 式の確認
> 残った積分の被積分関数 $\frac{x-1}{x^2+x+1}$ の分母は 2 次式なので，平方完成を行う．
> $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ となる．

> 式の確認
> $\int \frac{t}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt$ において，$u = t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ とおくと，$du=2t\,dt$ より，$\int \frac{t}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt = \int \frac{1}{2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\log|u|+c = \frac{1}{2}\log(t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)+c$

演習問題 8.3 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+16)^2}$ を求めなさい.

8.2 三角関数の積分

> 三角関数の積分 [I]
>
> $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx.$$
>
> (1) $m=1$ ならば，$t=\cos x$ とおくと，$dt=-\sin x$ より，
>
> $$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \int \cos^n x \sin x dx = \int t^n(-dt) = -\int t^n\,dt$$
>
> また，$n=1$ ならば，$t=\sin x$ おくと，$dt=\cos x$ より，
>
> $$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \int \sin^m x\cos x dx = \int t^m dt.$$

> 三角関数の積分の理解
> 三角関数の積分は，置換積分法により有理関数の積分に変形する.

例題 8.4　$\sin^3 x\cos x$ の不定積分を求めてみよう.

どれを t とおくか

$\int \sin^3 x \cos x \quad dx$ は $\int (\sin x)^3 \cos x\ dx$ のことである．すると，$t = \sin x$ または $t = \cos x$ の可能性があるが，$t = \cos x$ では $dt = -\sin x dx$ によって，すべてを t の関数と dt で表すことができない．

解答 $t = \sin x$ とおくと，$dt = \cos x dx$ より，

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c \blacksquare$$

演習問題 8.4　$\sin x \cos^4 x$ の不定積分を求めなさい．

三角関数の積分 [I]

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx.$$

(2) m が奇数ならば，$m-1$ は偶数となり，$\sin^{m-1} x$ を $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を用いて $\cos x$ の形に直せる．したがって，

$$\int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cos^n x \sin x dx.$$

ここで，$t = \cos x$ とおくと，$dt = -\sin x dx$ より

$$\int (1-\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cos^n x \sin x dx = \int (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} t^n (-dt)$$

同様に，n が奇数の場合もできる．

$\boxed{\text{例題 8-5}}$

奇数乗があったら，1 つだけ取り出し，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ をもちいて．偶数乗になった項を書き直す．$\sin^3 x \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 x \sin x$

例題 8.5　$\sin^3 x \cos^2 x$ の不定積分を求めてみよう．

解答 $\sin^3 x$ は $\sin x$ の奇数乗なので，

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int (1-\cos^2 x) \cos^2 x \sin x\, dx$$

と変形する．ここで，$t = \cos x$ とおくと $dt = -\sin x dx$ より

$$\begin{aligned}\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x\, dx &= \int (1-t^2) t^2 (-dt) = -\int (t^2 - t^4) dt \\ &= -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c \blacksquare\end{aligned}$$

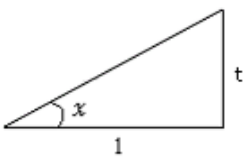
$\boxed{\text{演習 8-5}}$

$\sin x$ も $\cos x$ も奇数乗なので，どちらを用いてもよい．つまり，$\sin^3 x \cos^3 x = \sin^2 x \cos^3 x \sin x = (1 - \cos^2 x) \cos^3 x \sin x$ と表してもよい．

演習問題 8.5　$\sin^3 x \cos^3 x$ の不定積分を求めなさい．

$\boxed{\text{三角関数} \to \text{有理関数}}$

斜辺は $\sqrt{1+x^2}$ より，$\cos^2 x, \sin^2 x$ は有理関数になる．また，$\tan x$ の導関数は $\frac{1}{\cos^2 x}$ と 2 乗の関数で与えられることを利用する．



三角関数の積分法 [I]

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx.$$

(3) m と n の両方が偶数のとき．$t = \tan x$ とおくと，$\sin^2 x, \cos^2 x, dx$ を t を用いて表すことができる．$t = \tan x$ となるような角 x の隣辺が 1 で，対辺が t となる直角三角形を考える．すると，

$$\cos^2 x = (\cos x)^2 = (\frac{1}{\sqrt{1+t^2}})^2 = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = (\sin x)^2 = (\frac{t}{\sqrt{1+t^2}})^2 = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

また，

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\frac{1}{t^2+1}} dx = (t^2+1) dx, dx = \frac{dt}{t^2+1}.$$

$\boxed{\text{例題 8-6}}$

$\cos(x - x) = \cos^2 x + \sin^2 x$, $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ より，両式を加えると，

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x.$$

両式の差をとると，

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x.$$

例題 8.6　次の関数の不定積分を求めてみよう．

(1) $\sin^2 \cos^2 x$　　　(2) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$

解答 (1) この問題は，$t=\tan x$ と置かずに，倍角の公式を用いて解く方が簡単である．

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

より，

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx &= \int \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{4}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 2x}{4}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\left(\int 1-\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\,dx = \frac{1}{4}\left(x-\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}\right)\ \blacksquare\end{aligned}$$

$\boxed{\text{式の確認}}$
$\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$

(2) $t=\tan x$ とおくと，$\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{1}{t^2+1}dt$ より，

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\int \frac{t^2}{1+t^2}(1+t^2)^2\frac{1}{t^2+1}dt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+c=\frac{1}{3}\tan^3 x+c$$

演習問題 8.6　次の関数の不定積分を求めなさい．
(1) $\tan^2 x$　　(2) $\dfrac{1}{\cos x}$

三角関数の積分 [II]

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx\ \text{以外の三角関数の積分}$$

$x=2\tan^{-1}t$ とおくと，

$$dx=d(2\tan^{-1}t)=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

また，$t=\tan\frac{x}{2}$ となるような角 $\frac{x}{2}$ の隣辺が 1 で，対辺が t となる直角三角形を考えると，

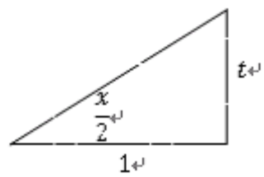
$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

より，

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 2\cdot\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x &= \cos 2\cdot\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

最後の置換

$x=2\tan^{-1}x$ の置換はあくまで最後に用いるもので，もっと簡単に有理関数に変えられる場合はそちらを用いる．



斜辺は $\sqrt{1+t^2}$ であるが，角を $\frac{x}{2}$ とおくことで，すべての三角関数を有理関数に置き換えることができる．

例題 8.7　$\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}$ を求めてみよう．

解答 [1] の形をしていないので，$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと，$x=2\tan^{-1}t$ より，

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+\cos x} &= \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{1+t^2+1-t^2}dt\\ &= \int dt=t+c=\tan\left(\frac{x}{2}\right)+c\ \blacksquare\end{aligned}$$

演習問題 8.7　次の不定積分を求めなさい．
(1) $\displaystyle\int\sec^3 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx$