7.1　不定積分

原始関数

ある区間で定義されている関数 $f(x)$ に対して，この区間のすべての x について

$$F'(x)=f(x)$$

が成り立つような関数 $F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数** という．

原始関数の形

定理 7.1 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとすると，$f(x)$ のすべての原始関数は $F(x)+c$ の形で与えられる．ただし c は任意の定数である．

証明 $G(x)$ を $f(x)$ の任意の原始関数とすると，$G'(x)=f(x)$．また，$F'(x)=f(x)$ より $G'(x)=F'(x)$ となる．ここで，$H(x)=G(x)-F(x)$ とおくと，$H'(x)=0$．したがって，$c=H(x)=G(x)-F(x)$ となり，

$$G(x)=F(x)+c\ (c:\text{定数})$$

また，$F(x)+c$ が $f(x)$ の原始関数であることは $(F(x)+c)'=F'(x)$ より明らかである ■

不定積分

$f(x)$ の原始関数全体を $f(x)$ の **不定積分** といい，$\int f(x)dx$ で表す．

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を **積分する** といい，定数 c を **積分定数** という．

積分公式

定理 7.2 (1) $\displaystyle\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\quad(\alpha\neq-1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+c$

(3) $\displaystyle\int e^{x}dx=e^{x}+c,\ \int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\log a}+c\quad(a>0)$

(4) $\displaystyle\int \sin x dx=-\cos x+c$

(5) $\displaystyle\int \cos x dx=\sin x+c$

(6) $\displaystyle\int \tan x dx=\log|\sec x|+c=-\log|\cos x|+c$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}=\tan x+c$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}=-\cot x+c$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log|\frac{x-a}{x+a}|+c$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c\quad(a\neq0)$

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c\quad(|x|<a)$

(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\log|x+\sqrt{x^2+a}|+c\quad(x^2+a>0)$

説明　右辺を微分して左辺の被積分関数になればよい．

(1) $\displaystyle(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c)'=\frac{\alpha+1}{\alpha+1}x^{\alpha+1-1}+c'=x^{\alpha}$ より $\displaystyle\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$

原始関数の理解

$(\frac{x^3}{3})'=x^2$ なので，$\frac{x^3}{3}$ は $f(x)=x^2$ の原始関数．同様に，$(\frac{x^3}{3}+1)'=x^2$ となるので $\frac{x^3}{3}+1$ も $f(x)=x^2$ の原始関数．

定理 7.1 の理解

$f(x)$ のすべての原始関数 $G(x)$ と $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ の間には，$G'(x)=F'(x)$ という関係が成り立つ．つまり，すべての点において接線の傾きが等しいということである．したがって，$G(x)$ と $F(x)$ の差は定数である．

不定積分

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数の 1 つならば $\int f(x)dx=F(x)+c$ となる．

定理 7.2-(10) $\tan^{-1}x$ の導関数は演習問題 2.7 で導いていて，$(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$ である．

(10)

$$\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

例題 7.1 $\int (x^{-\frac{3}{2}}+\cos x)dx$ を求めてみよう．

解答 $(-2x^{-\frac{1}{2}})' = (-2)(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{3}{2}}, (\sin x)' = \cos x$. また，和の微分法より

$$(-2x^{-\frac{1}{2}}+\sin x)' = x^{-\frac{3}{2}}+\cos x.$$

よって， $\int (x^{-\frac{3}{2}}+\cos x)\,dx = -2x^{-\frac{1}{2}}+\sin x + c$ ■

演習問題 7.1 $\int (\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{x})dx$ を求めなさい．

計算の確認
$F'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{x}$ となる $F(x)$ を求める．
$(\frac{1}{\cos x})' = \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

三角関数

$\frac{1}{\cos x}$ を $\sec x$ と表す．また，$\frac{1}{\tan x}$ を $\cot x$ と表す．

不定積分の性質

定理 7.3 連続関数 $f(x), g(x)$ において，次の式が成り立つ．

(1) $\int \{f(x)\pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （k 定数）

(3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$

不定積分の性質
(1) は和の積分は積分の和，(2) は定数倍の積分は積分の定数倍，
(3) は分子が分母の導関数の積分は分母の絶対値の対数と覚える．
また，$\int kf(x)\,dx$ から k 積分記号の外に出せるが，x の関数は絶対に積分記号の外には出せないことに注意する．

説明

$$(1)\ \frac{d}{dx}(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx \pm \frac{d}{dx}\int g(x)dx. \\ = f(x)\pm g(x).$$

これより， $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ は $f(x)\pm g(x)$ の不定積分．

(2) k は定数なので積分記号の外にだせる．

(3)

$$\frac{d(\log|f(x)|)}{dx} = \frac{d(\log|u|)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

これより，

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c.$$

例題 7-2-(1)
和，定数倍，分子が分母の導関数のどれが使えるのかを判断する．この場合，不定積分の性質である和と定数倍についての性質を用いることができる．

例題 7.2 次の関数の不定積分を求めてみよう．

(1) $3\sin x + x^2$　　(2) $\frac{1}{3+x^2}$　　(3) $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$

解答 (1)

$$\int (3\sin x + x^2)dx \underbrace{=}_{\text{定理 7.3(1)}} \int 3\sin x dx + \int x^2 dx$$

$$\underbrace{=}_{7.3(2)} 3\int \sin x dx + \int x^2 dx$$

$$\underbrace{=}_{\text{定理 7.2(4),(1)}} -3\cos x + \frac{x^3}{3} + c \ ■$$

(2)

$$\int \frac{1}{3+x^2}\,dx = \int \frac{1}{(\sqrt{3})^2+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}}) + c \ ■$$

例題 7-2-(2)
積分公式をみると公式 (10) と形が似ている．したがって，公式 (10) が使える形に変形する．
$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

(3)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2+5}|+c \ ■$$

演習問題 7.2　次の関数の不定積分を求めなさい．

(1) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$　(2) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}$　(4) $\dfrac{1}{x^2-4}$

7.2　置換積分法・部分積分法

7.2.1　置換積分法

置換積分法

定理 7.4 $f(x)$ が連続であるとき，$x=\phi(t)$ とおくと，$\phi(t)$ が微分可能であれば，

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

が成り立つ．

説明 $x=\phi(t)$ とおくと，$dx=\frac{dx}{dt}dt=\phi'(t)dt$ と表せる．これより，与えられた被積分関数 $f(x)$ と dx を公式 (1) から (12) の中の形に変形できるとき，置換積分で求められる．問題によっては，$t=\psi(x)$ とおき，$dt=\frac{dt}{dx}dx=\psi'(x)dx$ より，与えられた被積分関数 $f(x)$ と dx を書き直した方が簡単な場合もある．

例題 7.3　次の積分を求めてみよう．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx$　(2) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$　(3) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

解答 (1) $t=x^2+x$ とおくと $dt=\frac{dt}{dx}dx=\frac{d(x^2+x)}{dx}dx=(2x+1)dx$．これより

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx = \int \frac{dt}{t}.$$

右辺は積分公式 (2) の形でダミー変数 t が用いられている．よって

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t|+c = \log|x^2+x|+c \ ■$$

(2) $t=x^2-4$ とおくと，$dt=2xdx$ となるので，

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{dt/2}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt$$
$$= \frac{1}{2}2t^{1/2}+c = \sqrt{x^2-4}+c \ ■$$

(3)

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

ここで，$t=e^x$ とおくと，$dt=e^xdx$．したがって，

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+1}\,dx$$
$$= \tan^{-1}t+c = \tan^{-1}(e^x)+c \ ■$$

演習問題 7.3　次の積分を求めなさい．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

例題 7-2-(3)
公式 (12) が使える形に変形する．$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \log|x+\sqrt{x^2+a}|+c$

演習 3-2-(1)
$\frac{2\text{ 次式}}{2\text{ 次式}}$ = (定数) + $\frac{\text{定数}}{2\text{ 次式}}$ の形にする．

演習 3-2-(2)
$\frac{2\text{ 次式}}{2\text{ 次式}}$ = (定数) + $\frac{1\text{ 次式}}{2\text{ 次式}}$ の形にする．割り算をすればよい．$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \log|x^2+1|+c$ であるが，$x^2+1>0$ より，$\log(x^2+1)$ と表す．

演習 3-2-(3)
公式 (11) が使える形に変形する．$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

演習 3-2-(4)
$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$ とおき，A, B を求める．

例題 3-3-(1)
分数関数を扱っているのは積分公式 (2) であるので，積分公式が使えるように分母を t とおく．

例題 3-3-(2)
$\frac{1\text{ 次式}}{\sqrt{2\text{ 次式}}}$ では，$t=2$ 次式 とおくとよい．そこで，ルートの中を t とおくと，$dt=2xdx$ より，被積分関数および dx を t の関数および dt で表せる．

例題 3-3-(3)
このままではどうにもならないので，式の変形をおこなう．$e^{-x}=\frac{1}{e^x}$．また，$e^xe^x = e^{x+x}=e^{2x}$．

演習 3-3-(1)
$\sqrt{1\text{ 次式}}$ があったら，$t=\sqrt{1\text{ 次式}}$ とおく．

演習 3-3-(2)
この積分は積分公式 (11) である．a^2-x^2 と 2 乗の差があるので，次の直角三角形を考える．

7.2.2 部分積分法

部分積分法

定理 7.5 $f(x), g(x)$ が微分可能なとき，次の式が成り立つ．

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

説明 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より，$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$ と表せる．ここで，両辺を x について積分すると，

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

つまり，部分積分法とは，与えられた積分 $\int f'(x)g(x)dx$ が簡単に求められないとき，代わりに $\int f(x)g'(x)dx$ を求めることで，問題を解決する方法である．

部分積分法の理解

置換積分で解けなかったら部分積分を用いる．

部分積分法の用い方

被積分関数が $\sin x, \cos x, e^{\pm x}$ のどれか 1 つを含んでいたら $g'(x)$ をこれらの関数とおき，それ以外を $f(x)$ とおく．

例題 7.4 部分積分法を用いて，次の積分を求めてみよう．

(1) $\int \log x dx$ (2) $\int \sin^{-1} x dx$

解答 (1) $\left\{\begin{array}{lcl} f(x) = \log x & & g'(x) = 1 \\ & \searrow & \\ f'(x) = \frac{1}{x} & \leftarrow & g(x) = \int dx = x \text{ (定数は無視)} \end{array}\right.$

よって

$$\int \underbrace{\log x}_{f}\underbrace{1}_{g'}dx = \underbrace{x}_{g}\underbrace{\log x}_{f} - \int \underbrace{x}_{g}\underbrace{\frac{1}{x}}_{f'}dx$$
$$= x\log x - x + c \ \blacksquare$$

$\boxed{例題 3\text{-}4\text{-}(1)}$
$\sin x, \cos x, e^{x}$ 以外であるから，$f(x) = \log x$ とおく．

$\boxed{定数の無視}$
部分積分法では，$g'(x)$ から $g(x)$ を求めるときに，定数 c を無視できる．

(2) $\left\{\begin{array}{lcl} f(x) = \sin^{-1} x & & g'(x) = dx \\ & \searrow & \\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \leftarrow & g(x) = \int dx = x \text{ (定数は無視)} \end{array}\right.$

よって

$$\int \underbrace{\sin^{-1} x}_{f}\underbrace{dx}_{g'} = \underbrace{x}_{g}\underbrace{\sin^{-1} x}_{f} - \int \underbrace{x}_{g}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{f'}.$$

$\boxed{例題 3\text{-}4\text{-}(2)}$
$\sin x, \cos x, e^{\pm x}$ 以外であるから，$f(x) = \sin^{-1} x$ とおく．

ここで， $t = 1 - x^2$ とおくと， $dt = -2xdx$．よって

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \frac{dt/2}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt$$
$$= -\frac{1}{2}(2)t^{\frac{1}{2}} = -t^{1/2} + c = -\sqrt{1-x^2} + c.$$

$\boxed{式の確認}\frac{1\ 次式}{\sqrt{2\ 次式}}$ では，t = 2 次式 とおく．

これより，

$$\int \sin^{-1} xdx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c \ \blacksquare$$

演習問題 7.4 次の積分を求めなさい．

(1) $\int xe^{-x}dx$ (2) $\int x\log x\, dx$ (3) $\int e^{x}\sin xdx$

$\boxed{演習 3\text{-}4\text{-}(1)}$
$\sin x, \cos x, e^{\pm x}$ の 1 つであるから，$g'(x) = e^{-x}$ とおく．

$\boxed{演習 3\text{-}4\text{-}(2)}$
$\sin x, \cos x, e^{\pm x}$ 以外であるから，$f(x) = \log x$ とおく．