## 6.1　ダランベールの判定法

ダランベールの判定法

**定理 6.1** 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ において,

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{b_{n+1}}{b_n}| < 1 \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ 収束.}$$

級数の収束判定

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の $a_n x^n$ を $b_n$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} x$ となる．したがって，$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < 1$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| < 1$ となり，$|x| < \frac{a_n}{a_{n+1}}$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する.

**例題 6.1**　次の関数のマクローリン展開を求めてみよう.

(1) $f(x) = e^x$　　(2) $f(x) = \sin x$

**解答** (1) $f(x) = e^x$ とすると，$f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(0) = 1$. よって，$a = 0$ のテイラー多項式 $P(x)$ は,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k.$$

ここで，$e^x$ のマクローリン展開の一般項を $b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{n!} x^n$ とおき，ダランベールの判定法を用いると,

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{b_{n+1}}{b_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x}{n+1}| = 0 < 1$$

より，すべての $x$ に対して $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ は収束する．したがって，$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となり,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \blacksquare$$

(2) $f(x) = \sin x$ とすると $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ より $f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n\pi}{2})$. ここで, $k$ が偶数のとき, $\sin(\frac{k\pi}{2}) = 0$. $k$ が奇数のとき, つまり $k = 2m+1$ のとき, $\sin(\frac{k\pi}{2}) = \sin(\frac{(2m+1)\pi}{2}) = (-1)^m$ に注意すると,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k = \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}.$$

$\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = (-1)^n$

| $n$ | $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$ | $(-1)^n$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | $-1$ | $-1$ |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | $-1$ | $-1$ |
| 4 | 1 | 1 |

ここで，$\sin x$ のマクローリン展開の一般項を $b_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$ とおき，ダランベールの判定法を用いると

$$\lim_{m\to\infty} |\frac{b_{2m+3}}{b_{2m+1}}| = \lim_{m\to\infty} |\frac{\sin(\frac{(2m+3)\pi}{2}) x^{2m+3}}{(2m+3)!} \cdot \frac{(2m+1)!}{\sin(\frac{(2m+1)\pi}{2}) x^{2m+1}}|$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{x^2}{(2m+3)(2m+2)} = 0 < 1$$

式の確認

ダランベールの判定法は隣り合う項の比の極限値を求める．しかし，$b_{2m} = 0$ なので，$\frac{2m+3}{2m+2} \cdot \frac{2m+2}{2m+1} = \frac{2m+3}{2m+1}$ を考える.

より，すべての $x$ に対して $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k$ は収束する．よって，$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ より,

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} \ \blacksquare$$

**演習問題 6.1**　次の関数のマクローリン展開を求めなさい.

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$　　(2) $f(x) = \log(1+x)$

**解答** (1) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ とすると，$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ より，$f^{(n)}(0)=n!$． よって，テイラー多項式は $P(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n-1}x^k$．ここで，マクローリン展開の一般項 $b_n$ を $b_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x^n$ とおき，ダランベールの判定法を用いる．

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{b_{n+1}}{b_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{x^{n+1}}{x^n}|=|x|$$

より $|x|<1$ のとき，$\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ は収束する．したがって，$\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となり，

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (|x|<1) \blacksquare$$

**収束半径**

$\lim_{n\to\infty}|\frac{x^{n+1}}{x^n}|=|x|<$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ は収束することから，$|x|<1$ を収束半径という．

(2) $f(x)=\log(1+x)$ とすると $f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$．ここで，$t=-x$ とすると，

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{d^n(\frac{1}{1+x})}{dx^n}=(-1)^n\frac{d^n(\frac{1}{1-t})}{dt^n}=(-1)^n\frac{n!}{(1-t)^n}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^n}.$$

これより

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & ,n=0\\ (-1)^{n-1}(n-1)! & ,n\geqq 1\end{cases}$$

よって，テイラー多項式は　$P(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$．ここで，マクローリン展開の一般項 $b_n$ を $b_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ とおき，ダランベールの判定法を用いると

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{b_{n+1}}{b_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{(n+1)x}{n}|=|x|.$$

これより，$|x|<1$ のとき，$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ は収束する．したがって，$\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となり，

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (-1<x\leqq 1) \blacksquare$$

**$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束する**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ は収束することを示す．

$s_{2m+1}=(1-\frac{1}{2})+\cdots+(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m})+\frac{1}{2m+1}$

$s_{2m+3}=s_{2m+1}-(\frac{1}{2m+2}-\frac{1}{2m+3})$

より，$s_{2m+3}<s_{2m+1}$．ここで，数列 $s_{2m+1}$ は減少数列で 0 より大きい．したがって，$s_{2m+1}\to l$．また，$s_{2m+2}=s_{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$ より，$s_{2m+2}\to l$．したがって，$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束する．

**テイラー・マクローリンの定理の応用 (漸近展開)**

**定理 6.2** 関数 $f(x)$ がマクローリン展開可能なとき，

$$R_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

ただし，$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$．

**証明** $\lim_{n\to 0}\frac{(R_n-\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(\theta x)-f^{(n)}(0)}{n!}=0$

**例題 6.2** 次の極限値を漸近展開を用いて求めてみよう．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

**解答** 分母が $x^2$ なので，マクローリンの定理を用いて $f(x)=\cos x$ の 2 次の項まで求める．$\cos x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$ より，

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

よって，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}-\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{2} \blacksquare$$

**定理 2.17 の理解**

マクローリンの定理の応用で，剰余項は $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$ で与えられることを学んだ．つまりマクローリン展開可能なときには，剰余項は第 $n$ 項と $x^n$ よりも圧倒的に小さなものでできていることがわかる．

**演習問題 6.2** 次の極限値を漸近展開を用いて求めなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$$

**演習解答** 分母が $x^3$ なので，マクローリンの定理を用いて $f(x)=\log(1+x)$ の 3 次の項まで求める．$f'(x)=\frac{1}{1+x}, f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}, f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ より，

$$\begin{aligned}\log(1+x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3!}+o(x^3).\end{aligned}$$

したがって，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\big(\frac{2}{3!}+\frac{o(x^3)}{x^3}\big)=\frac{1}{3}\ \blacksquare$$

**例題 6.3** 次の関数のマクローリン展開を求めよ.

(1) $e^{2x}$　(2) $\dfrac{1}{1+x^2}$　(3) $\sin(x+1)$

(**解答**) (1) $f(t)=e^t$, $t=2x$ とおき，$f(t)$ のマクローリン展開を求めると，

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

これに $t=2x$ を代入して，

$$e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2x)^n=1+\frac{2x}{1!}x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots+\frac{(2x)^n}{n!}+\cdots$$

(2) $f(t)=\dfrac{1}{1+t}$, $t=x^2$ とおき，$f(t)$ のマクローリン展開を求めると，

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^nt^n+\cdots\quad(-1<t<1)$$

これに $t=x^2$ を代入して，

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots\quad(-1<x<1)$$

(3) $f(t)=\sin t$, $t=x+1$ とおき，$f(t)$ のマクローリン展開を求めると，

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad(-\infty<t<\infty)$$

これに $t=x+1$ を代入して，

$$\sin(x+1)=x+1-\frac{(x+1)^3}{3!}+\frac{(x+1)^5}{5!}+(-1)^n\frac{(x+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad(-1<x<1)$$

**演習問題 6.3** 次の関数のマクローリン展開を求めよ.

(1) $\cos 2x$　(2) $\log(1+3x)$　(3) $\sqrt{1+x}$　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$　(5) $e^{x^4}$

(6) $\sin x^3$　(7) $\log(1+x^2)$　(8) $\sqrt{1-2x^2}$　(9) $\sin x\cos x$　(10) $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(11) $\dfrac{2}{1-4x+3x^2}$　(12) $2^x$

**例題 6.4** 次の関数のマクローリン展開を求めよ.

(1) $\tan^{-1} x$ (2) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

**(解)**

(1) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ であり, $\dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots$ だから, $|x| < 1$ のとき,

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \{1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots\} dt$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

(2) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{1-x}$ であり, $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ だから, $|x| < 1$ のとき,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

**別解** $f(x) = \tan^{-1} x$ より, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. これより,

$$(1+x^2) f'(x) = 1$$

ここで, Leibniz の定理を用いて, 両辺を $n$ 回微分すると,

$$f^{(n+1)}(x)(1+x^2) + n f^{(n)}(x)(2x) + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-1)}(x)(2) = 0$$

となる. ここで, $x = 0$ とおくと, 漸化式

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1) f^{(n-1}(0) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$$

を得る. 初期値を求めると, $f(0) = \tan^{-1} 0 = 0, f'(0) = 1$. これより,

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(0) = \cdots = \begin{cases} (-1)^{n-1}(n-1)! & n \text{ 奇数} \\ 0 & n \text{ 偶数} \end{cases}$$

**演習問題 6.4** 次の関数のマクローリン展開を求めよ.

(1) $\sin^{-1} x$ (2) $\log(x + \sqrt{x^2+1})$ (3) $\dfrac{x}{x^2+1}$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$