5.1 不定形の極限値

コーシーの平均値の定理

定理 5.1 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能とする．$g(a) \neq g(b)$ で，しかも $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 にならないならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < x)$$

をみたす ξ が (a,b) 内に少なくとも 1 つ存在する．

証明 平均値の定理のときと同じように，ロルの定理の条件をみたすような関数を考える．

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) - f(a)$$

という関数を考えると， $G(a) = G(b) = 0$ となり， $G(x)$ はロルの定理の条件をみたす．したがって，ロルの定理より，

$$G'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = 0$$

をみたす ξ が少なくとも 1 つ存在する．ところで，

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = 0$$

より， $g'(\xi) = 0$ ならば $f'(\xi) = 0$ となり仮定に反する．したがって， $g'(\xi) \neq 0$ となり，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

を得る ■

よくある間違い

平均値の定理を $f(x)$, $g(x)$ に適用すると，

$$f(b)-f(a) = f'(\xi_1)(b-a)$$

$$g(b)-g(a) = g'(\xi_2)(b-a)$$

となり，これより両辺の商を求めると，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

残念ながら ξ_1 と ξ_2 の値は一般に等しくないので，この方法では Cauchy の平均値の定理は得られない．

式の確認

$G(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(a)-g(a)) - f(a) = 0$. また，$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(a)) - f(a) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$.

ロピタルの定理

定理 5.2 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能とする．$f(a) = g(a) = 0$ で，しかも $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ が存在するならば， $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$ である．

証明 $a < x < b$ である x をとると，コーシーの平均値の定理より，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < x)$$

をみたす ξ が少なくとも 1 つ存在する．したがって，

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l \ ■$$

ロピタルの定理の使い方

1. 極限が $(\frac{0}{0})$ または $(\frac{\infty}{\infty})$ の不定形であることを確認する．
2. 分子と分母を別々に微分する．商の微分法ではない．
3. 微分が終わったら，極限を求める前に式の整理を行う．
4. 再び不定形であったら，2.3. を行う．

例題 5.1 次の極限値を求めてみよう．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$$

解答 これは $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形．そこで，分母，分子を別々に微分し，その商の極限値を求めると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x - 1}.$$

これも $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形．そこでもう一度，分母，分子を別々に微分し，その商の極限値を求めると，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x + x\cos x}{-\sin x}.$$

これもまた，$\dfrac{0}{0}$ の形の不定形．そこでもう一度，分母，分子を別々に微分し，その商の極限値を求めると，

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos x - x\sin x}{-\cos x} = \frac{2}{-1} = -2.$$

したがって，ロピタルの定理を順に使うことにより，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x} = -2 \ \blacksquare$$

解答を書くときには，次のように表すのが一般的である．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x} &= (\frac{0}{0})\\ &\overset{*}{=} \lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos x - 1} = (\frac{0}{0})\\ &\overset{*}{=} \lim_{x\to0}\frac{2\cos x - x\sin x}{-\cos x} = \frac{2}{-1} = -2.\end{aligned}$$

式の計算の確認

$(\sin x + x\cos x)' = (\sin x)' + (x\cos x)' = \cos x + x'(\cos x) + x(\cos x)' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x.$

ロピタル記号

$\overset{*}{=}$ はロピタルの定理を用いたことを表す．

$(\frac{0}{0}), (\frac{\infty}{\infty})$ 以外の不定形

ロピタルの定理は $\left(\dfrac{0}{0}\right), \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ の不定形のときにしか使えない．その他の不定形のときは，次のようにして $\left(\dfrac{0}{0}\right), \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ の形に変形する．

(1) $f(x)g(x) \to (0\cdot\infty)$ の場合，

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to (\frac{0}{0})$$

に変形

(2) $(f(x) - g(x)) \to (\infty - \infty)$ の場合，

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \to (\frac{0}{0})$$

に変形

(3) $(f(x)^{g(x)}) \to (1^{\infty}$ または $\infty^0)$ の場合，$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)} \to (e^{\infty\cdot0}$ または $e^{0\cdot\infty})$ に変形

演習問題 5.1 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\sin x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$

不定形でない $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2x}$ にロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2x} \overset{*}{=} \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2} = 0.$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2} = 0$ と書きたくなるが，これは間違い．

例題 5.2 $\displaystyle\lim_{x\to0+}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$ を求めてみよう．

解答 これは $\infty - \infty$ の不定形をしている．そこで $\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$ を $\dfrac{e^x - 1}{x}$ と書き直すと $\dfrac{0}{0}$ の不定形になり，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^x - 1}{x} \overset{*}{=} \lim_{x\to0+}\frac{e^x}{1} = 1$$

よって

$$\lim_{x\to0+}(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}) = 1$$

となる $\blacksquare$

演習問題 5.2 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}(\frac{e^x - 1}{x})^{1/x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$

5.2　テイラーの定理

超越関数 $f(x)$ を多項式を用いて表すことができないだろうか．そんな疑問に 次の定理は答えてくれる．

テイラーの定理

定理 5.3 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で C^n 級であるならば,

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}}_{\text{テイラー多項式}} + \underbrace{R_n}_{\text{剰余項}},$$

$$R_n = \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n}_{\text{ラグランジュの剰余項}},\ a < \xi < x$$

となるような ξ が存在する．

説明 $n=1$ のとき，$f(b) = f(a) + R_1$．ただし，$R_1 = f'(\xi)x = f'(\theta x)(b-a)$ $(0 < \theta < 1)$ となる．つまり，$n=1$ のときは，平均値の定理である．そこで，$n=2$ の場合について示す．$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + R_2$ とおいたとき，$R_2 = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(b-a)^2$ であることを示せばよい．

$$F(x) = f(b) - (f(x) + f'(x)(b-x) + R_2\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}$$

とおくと，$F(b) = f(b) - f(b) + f'(b)(b-b) + R_2 \cdot 0 = 0$．また，$F(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) + R_2 = 0$．したがって，Rolle の定理から，$F'(\xi) = 0$ $(a < \xi < b)$ を満たす ξ が存在する．これより，

$$F'(\xi) = -\left(f'(\xi) - f(\xi) + f^{(2)}(\xi) - 2R_2\frac{(b-\xi)}{(b-a)^2}\right) = 0$$

であるから，$R_2 = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(b-a)^2$

テイラーの定理において，$a=0$ とおいて得られる定理を **マクローリンの定理** といい，

マクローリンの定理

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n,$$

$$\text{ただし，} R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\ 0 < \theta < 1$$

となる．

ここで誤差の評価は

$$|R_n| = |\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n| \leqq (\max_{\theta\in[0,1]}|f^{(n)}(\theta x)|)\frac{|x|^n}{n!}$$

で与えられる．

例題 5.3　マクローリンの定理を使って $f(x) = e^x$ の テイラーの多項式とラグランジュの剰余項の誤差の評価を求めてみよう．

解答 $f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(0) = 1$ となるので，$a=0$ でのテイラー多項式を求めると，

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

超越関数

$A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x)$ を x の多項式とするとき，y についての方程式

$$A_0(x)y^n + \cdots + A_n(x) = 0$$

の解として定まる x の関数 y を x の **代数関数** といい，それ以外の関数を **超越関数** という．

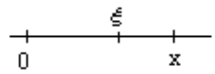
マクローリンの定理の理解

1. テイラー多項式 P(x) $= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.
2. ラグランジュの剰余項 $R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$

を求められるようにする．

$\xi \to \theta x$ の確認

$(x-0)\theta$ で 0 から θx までの値を与えることができる．ここでは，$\theta x < x$ より，$0 < \theta < 1$．となる．



誤差の評価

誤差の評価とは，n が大きくなったときの剰余項の大きさのこと．

次に，ラグランジュの剰余項を求めると，

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \frac{e^{\theta x}x^n}{n!} \ (0 < \theta < 1).$$

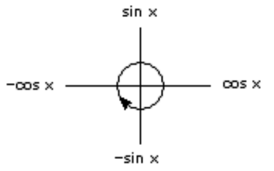
これより剰余項の誤差の評価は

$$|R_n| \leqq (\max_{\theta \in (0,1)} |e^{\theta x}|)\frac{|x|^n}{n!} \leqq |e^x|\frac{|x|^n}{n!} \ \blacksquare$$

sin, cos

$\cos(x + \pi/2) = -\sin x = (\cos x)'$

sin x, cos xの導関数



演習問題 5.3 マクローリンの定理を使って $f(x) = \cos x$ のテイラーの多項式とラグランジュの剰余項の誤差の評価を求めなさい．

マクローリン展開

$f(x)$ は $x = 0$ を含む区間 I で 無限回微分可能な関数とすると，マクローリンの定理より任意の自然数 n に対して，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(k)!}x^k + R_n$$

が成り立つ．このとき，もし $R_n \to 0 \ (n \to \infty)$ であるならば

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n)!}x^n$$

と表せる．この式を $f(x)$ の **マクローリン展開**という．

Σ の確認

k のとる整数は $k = 0$ から $k = n-1$．ここで，$k = 2m$ とおいたので，$2m$ のとる値は $2m = 0$ から $2m = n-1$．よって，$m = 0$ から $m = \frac{n-1}{2}$ となる．

基本関数のマクローリン展開

定理 5.4 次のマクローリン展開が成り立つ．

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n, \ (-\infty < x < \infty)$
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ (-\infty < x < \infty)$
3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ (-\infty < x < \infty)$
4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ (-1 < x < 1)$
5. $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \ (-1 < x \leqq 1))$
6. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{|infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, (-1 < x < 1)$

マクローリン展開の理解

マクローリンの定理では，多項式による近似で誤差がラグランジュの剰余項として与えられていた．そこで，多項式の次数を大きくしていき，やがて無限級数にもっていったとき，誤差も限りなく 0 に近づくならば，$f(x)$ を無限級数で表してもよいだろうというのがマクローリン展開である．

説明 $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ を示せばよい．ただし，ラグランジュの剰余項 R_n を用いて，$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ が必ず示せるわけではない．そこで，別の方法を取り入れる．それぞれの関数のマクローリン展開を級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ として表すと，n が限りなく大きくなるとき，剰余項が 0 に限りなく近づくということは，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束することと同じである．そして，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束することを示すには，次のダランベールの判定法を用いると便利である．

式の確認

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(0)}}{k!}x^k + R_n$