4.1　平均値の定理

平均値の定理

定理 4.1 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)\ (a<\xi<b)$$

をみたす ξ が少なくとも 1 つ存在する．

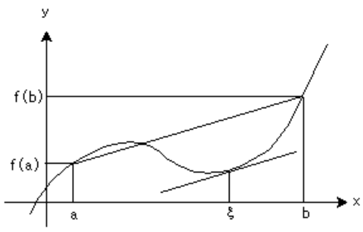


図 4.1　平均値の定理

ロルの定理

定理 4.2 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能で，さらに $f(a)=f(b)$ ならば，

$$f'(\xi) = 0\ (a<\xi<b)$$

をみたす ξ が少なくとも 1 つ存在する．

$f(x)$ は微分可能であるから，両不等式の左辺の極限値は $f'(\xi)$ であり，次の 2 式が成り立つ．

$$f'(\xi) \leqq 0,\ f'(\xi) \geqq 0.$$

$f'(\xi)$ は存在するので，

$$f'(\xi) = 0.$$

もし，最小値が $f(a)=f(b)$ ならば， $a<\xi<b$ であるような点で最小値をとるから，いまと同様にして， $f'(\xi)=0$ となる ■

例題 4.1　ロルまたは平均値の定理における ξ の値を，次の関数と区間について求めてみよう．
$f(x) = x^3 - x^2,\ [-1,1]$

演習問題 4.1　ロルまたは平均値の定理における ξ の値を，次の関数と区間について求めてみよう．
$f(x) = \sin^{-1} x,\ [0,1]$

ロルの定理を用いた平均値の定理の証明

ロルの定理の条件をみたすような関数を作る．2 点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ を通る直線の方程式 $P(x)$ は

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) = P(x).$$

そこで，関数 $f(x)$ とこの直線との差を $g(x)$ とおくと，

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right).$$

平均値の定理の理解

平均値の定理は平均時速が 60km で走行した車があれば，走行中必ず一回は車のスピードメーターは時速 60km を指したことがあるはずだといっている．

ロルの定理の理解

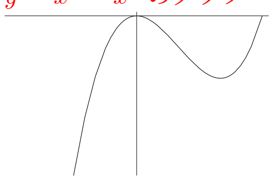
地表面上で停止している物体を上方に打ち上げ，しばらくしてから地表面上に戻ってきたら，この物体は途中で一度は停止したはずであるといっている．つまり $f'(\xi)=0$ となったところである．

片側微分係数

$$f'_{+}(\xi) = \lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$
$$f'_{-}(\xi) = \lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

例題 4-1

$y = x^3 - x^2$ のグラフ

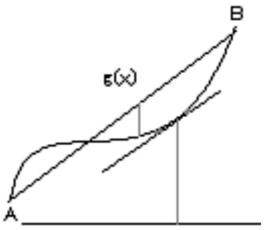


式の計算の確認

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ をみたす x を求めるため，両辺を 2 乗すると，$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\pi^2}{4}$. ここで逆数をとると，$1-x^2 = \frac{4}{\pi^2}$. これより，$x^2 = 1 - \frac{4}{\pi^2}$.

証明の考え方

2 点 A,B を直線で結び，この直線を x 軸だと考えれば，2 点 A,B で関数は 0 をとるので，ロルの定理が使える．



これより, $g(a) = f(a) - P(a) = f(a) - f(a) = 0$. また, $g(b) = f(b) - P(b) = f(b) - f(b) = 0$ となり，ロルの定理の条件をみたす．したがって，ロルの定理より，

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

をみたす ξ が少なくとも１つ存在する ■

関数の増加と減少

関数 $f(x)$ が $x = a$ の近傍で定義されていて， $h(>0)$ が十分小さいとき，つねに
$f(a-h) < f(a) < f(a+h)$ である場合に，$x = a$ で**増加の状態**
$f(a-h) > f(a) > f(a+h)$ である場合に，$x = a$ で**減少の状態**にあるという．[a]

[a] $x = a$ の近傍とは，δ を小さな正の実数とするとき，$(a-\delta, a+\delta)$ の範囲のことである．

このような状態を簡単に見分ける方法はないのだろうか．そんな疑問に次の定理は答えてくれる．

関数の増減

定理 4.3 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であり， $f'(a) > 0$ ならば， $f(x)$ は $x = a$ で増加の状態にあり， $f'(a) < 0$ ならば， $f(x)$ は $x = a$ で減少の状態にある．

平均値の定理の応用

関数の性質

定理 4.4 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能とする．
(1) (a, b) において，常に $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は $[a, b]$ で定数関数.
(2) (a, b) において，常に $f'(x) \geqq 0$ であって，しかも有限個の点でしか $f'(x) = 0$ とならないならば， $f(x)$ は $[a, b]$ で狭義の単調増加関数である．

導関数の等しい関数の性質

定理 4.5 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) において，常に $f'(x) = g'(x)$ ならば，そこで

$$f(x) = g(x) + c \ (c : \text{定数})$$

である．

証明 $F(x) = f(x) - g(x)$ とおくと， $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ より $F(x)$ は定数関数．よって $F(x) = f(x) - g(x) = c$ ■

例題 4.2 $f(x) = x - \sin x$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で狭義の単調増加関数であることを示してみよう．

演習問題 4.2 $x > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示しなさい．

$$1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$$

関数の増加・減少

関数の増加・減少は x の値が増えたときに，$f(x)$ の値がどうなっているかを調べている．

関数の増加・減少の理解

曲線のある１点で接線の傾きが正になるような曲線を考えてみる．このとき，この点の近くでは曲線が右上がりになっている．逆に，接線の傾きが負になるような曲線の場合，接点の近くでは曲線が右下がりになっている．

式の確認

$h < 0$ のとき，$h = -k$ とおくと, $k > 0$ より, $f(a+h) < f(a)$ は $f(a-k) < f(a)$ となる．

狭義の単調増加の理解

曲線の傾きがところどころ０になるところがあるが，連続して０になることはない．

例題 4-2

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で $f'(x) \geqq 0$．また，$f'(x) = 0$ となる x は有限個であることを示す．

演習 4-2

関数の大小を比較するにも，単調増加，単調減少が使える．

4.2　関数の極値

極値

a の近傍のすべての x において $f(x) < f(a)$ のとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**，$f(x) > f(a)$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で**極小** であるという．また， $f(a)$ をそれぞれ極大値，極小値といい，両方をあわせて**極値** という．

1 回微分テスト

定理 4.6 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能で，かつこの点で極値をとれば， $f'(a) = 0$ である．

極大・極小の判定

定理 4.7 関数 $f(x)$ は $x = a$ の近傍で連続で， $h(> 0)$ は十分小さいとする．
(1) $(a - h, a)$ では $f'(x) > 0, (a, a + h)$ では $f'(x) < 0$ であるならば， $f(x)$ は $x = a$ で極大値をとる．
(2) $(a - h, a)$ では $f'(x) < 0, (a, a + h)$ では $f'(x) > 0$ であるならば， $f(x)$ は $x = a$ で極小値をとる．
(3) $f'(x)$ が $x = a$ の前後で符号を変えなければ， $f(a)$ は極値でない．

変曲点

関数のグラフ上の点 P の近くで，グラフが点 P における接線 (y 軸に平行でない) の上側にあるとき，グラフは点 P で**下に凸** であるといい，グラフが下側にあるとき**上に凸** であるという．また，グラフが点 P の片側で接線の上側，もう片側では接線の下側にあるとき点 P を **変曲点** という．

2 回微分テスト

定理 4.8 関数 $f(x)$ が $x = a$ を含むある区間で 2 階微分可能で，

$$f'(a) = 0$$

であるとする．
(1) $f''(a) > 0$ ならば，グラフは下に凸で $f(a)$ は極小値
(2) $f''(a) < 0$ ならば，グラフは上に凸で $f(a)$ は極大値
(3) $f''(a) = 0$ でその点の前後でグラフの凹凸が変わるならば，$(a, f(a))$ は変曲点である．

例題 4.3 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$ の極値およびグラフの凹凸を調べてみよう．

解答 まず， $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で微分可能より，極値をとれば， $f'(x) = 0$ となる．そこで，$f'(x) = 0$ をみたす x を求める．

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x - 4) = 0$$

より $x = 0, 4$ が極値の候補となる．次にグラフの凹凸を調べるため， $f''(x)$ を求める．

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3)$$

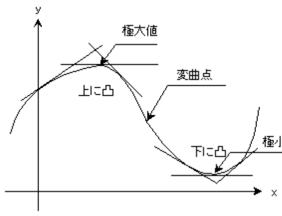
より，$x = 0, 3$ が変曲点の候補となる．ここで極値の候補と変曲点の候補を x 軸上に，その下

点の近傍

点 a の近傍とは，点 a からの距離がある小さな値 δ 未満の場所のことである．この場合，a の近傍とは $|x - a| < \delta$．つまり，$-\delta < x - a < \delta$.

極値の理解

微分可能な関数は極値をとる点では，接線の傾きは 0 になる．しかし，$f(x) = x^3$ のように，接線の傾きが 0 になったからといって，その点で極値をとるとは限らない．
また，関数が微分可能でない点でも極値をとることがある．例として $f(x) = |x|$ を考えてみよう． $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能ではないが $x = 0$ で極小値 $f(0) = 0$ をとる．



2 回微分の理解

1 回微分が接線の傾きを表すと考えると，2 回微分は，その接線の傾きの変化を表す．つまり，$f''(a) > 0$ のとき，点 a の近傍では接線の傾きが増加していることを表す．図で考えると下に凸のグラフになる．

極値と凹凸の手順

1. 関数の定義域の確認
2. 極値の候補を求める．
3. 変曲点の候補を求める．
4. 増減表を描く

計算の確認

$f(4)$ の求め方．$f(x)=x^5-5x^4+1=x^4(x-5)+1$ と表し，$x=4$ を代入すると，$f(4)=4^4(4-5)+1=256(-1)+1=-256+1=-255$ と計算が楽になる

に $f'(x)$ の符号，その下に $f''(x)$ の符号，最後に $f(x)$ の増減を表した増減表を書く．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		1				-255	

1 回微分を用いると， $x=0$ で極大値 $f(0)=1$ をとり， $x=4$ で極小値 $f(4)=-255$ をとることがわかる．次に 2 回微分を用いると $x=3$ が変曲点で，その左側では上に凸，その右側では下に凸になっている ■

演習問題 4.3 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2}$ の極値およびグラフの凹凸を調べなさい．

演習 2-18

$f(x)=\frac{x^3}{x^2-2}$ より，x^2-2 が 0 になるところではこの関数は定義できない．そこで，$x=\pm2$ は増減表を書くときに，必ず除いて書かなければならない．

漸近線

漸近線とは，曲線が限りなく近づいていく直線である．したがって，関数の分母が 0 になる場合と x が正の無限大，負の無限大に近づく場合とがある．

4.2.1 曲線の概形

与えられた方程式が表している曲線の性質を調べ，その曲線の概形を描く．そのためには次のことに注意しなければならない．

1. 曲線の対称性の有無
2. 曲線の存在範囲
3. 曲線が座標軸と交わる点
4. 漸近線と，曲線の漸近線への近づき方
5. 曲線の増減，曲線の凹凸，極値と極値をとる点，変曲点

問題によっては，まだ調べなければならないこともあり，またこのうちのいくつかを省いても実際に曲線の概形を描くことができることもある．

例題 4.4 関数 $f(x)=x^5-5x^4+1$ のグラフの概形を描いてみよう．

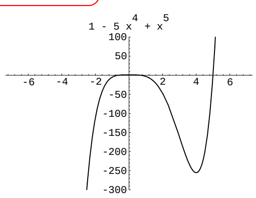
解答

1. $f(-x)=-x^5-5x^4+1$ より対称性はなし．
2. 全ての実数でこの関数は存在．
3. $f(-1)=-5, f(5)=1$ となるので，中間値の定理より，この間で x 軸と少なくとも 1 回交わる．
4. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
5. 例題 2.22 で次のような増減表を得た．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		1				-255	

これを用いてグラフを描くと次のようになる ■

例題 2-19



演習問題 4.4 曲線 $y=\dfrac{x^3}{x^2-2}$ の概形を描きなさい．