3.1 高次導関数

第 n 次導関数

$y=f(x)$ の導関数 $y'=f'(x)$ が微分可能ならば，その導関数 $(y')'$ が考えられる．これを $y=f(x)$ の **第 2 次導関数** といい，

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, D^2f(x)$$

などの記号で表す．この第 2 次導関数が微分可能ならば，さらに，第 3 次導関数を考えることができる．このようにして， $y=f(x)$ を次々に n 回微分することにより**第 n 次導関数**が定義される．第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が存在するとき， $f(x)$ は n **回微分可能** であるという．

高次導関数の表記

第 3 次導関数は $f'''(x)$ または $\frac{d^3y}{dx^3}$ と表すが，第 4 次導関数は，$f''''(x)$ とは表さない．代わりに $f^{(4)}(x)$ と表す．

説明 $f^{(n)}(x)$ が連続のとき， C^n 級であるという．また，すべての自然数 n について $f^{(n)}(x)$ が存在するとき，**無限回微分可能**あるいは C^∞ 級であるという．

無限回微分可能な関数

$\sin x, \cos x, e^x$ は区間 $(-\infty,\infty)$ で無限回微分可能な関数である．

第 n 次導関数に関して次の定理が成り立つ．

高次導関数の性質

定理 3.1 $f(x), g(x)$ が C^n 級のとき，次の公式が成り立つ．

(1) $\{f(x)\pm g(x)\}^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$

(2) $\{cf(x)\}^{(n)}=cf^{(n)}(x)$ （c：定数）

(3) $\{f(x)g(x)\}^{(n)}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x)$

(4) $\dfrac{dt}{dx}=c$ (定数) ならば，$\dfrac{d^nf(t)}{dx^n}=c^n\dfrac{d^nf(t)}{dt^n}$

説明 上の定理の (3) は **ライプニッツの定理** といい， $\binom{n}{i}$ は $\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ を表す．

(3) の証明

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

よりライプニッツの定理は $n=1$ のときに成り立つ．次に $n=k$ のときに成り立つと仮定し， $n=k+1$ のときを考える．

$$(f(x)g(x))^{(k+1)}=[(f(x)g(x))^{(k)}]'=[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(k-i)}(x)g^{(i)}(x)]'$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x)+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(k-i)}(x)g^{(i+1)}(x)\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x)+\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x)\\
&=f^{(k+1)}(x)g(x)+\sum_{i=1}^{k}(\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1})f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x)+f(x)g^{(k+1)}(x)\\
&=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}f^{(k+1-i)}(x)g^{(i)}(x).
\end{aligned}$$

式の解説

なぜ，$\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}=\binom{k+1}{i}$ となるのか解説する．5 個のピンポン玉から 2 個のピンポン玉を取り出すとき，その場合の数を調べる．1 個に印をつけておく．まず印のついたピンポン玉を除いて 2 個のピンポン玉を取り出す場合の数は $\binom{4}{2}$ である．次に，印のついたピンポン玉を含めて 2 個取り出す場合の数は $\binom{4}{1}$ である．したがって，$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=\binom{5}{2}$ が成り立つ．

よって，帰納法より

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x) \ ■$$

(4) の証明 $\frac{dt}{dx}=c$ とすると，$\frac{df(t)}{dx}=\frac{df(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=c\frac{df(t)}{dt}$ となり，$n=1$ で成り立つ．そこで，$n-1$ で成り立つと仮定し，n の場合を考える．

$$\frac{d^n f(t)}{dx^n}=\frac{d(\frac{d^{n-1}f(t)}{dx^{n-1}})}{dx}=\frac{d(c^{n-1}\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}})}{dx}=c^{n-1}\frac{d(\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}})}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=c^n\frac{d^n f(t)}{dt^n}\ \blacksquare$$

例題 3.1 次の関数の第 n 次導関数を求めてみよう．

(1) $f(x)=\sin x$ (2) $f(x)=\sin 2x$ (3) $f(x)=\frac{1}{1-x}$

解答 (1) $f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ $f''(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)$ $f'''(x)-\cos x=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$ より $f^{(n)}x=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ が帰納法で示せる ■

(2) $t=2x$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=2$ 定数．したがって，

$$\frac{d^n(\sin 2x)}{dx^n}=2^n\frac{d^n(\sin t)}{dt^n}=2^n\sin(t+\frac{n\pi}{2})=2^n\sin(2x+\frac{n\pi}{2}).$$

(3) $f'(x)=\frac{-(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$ $f''(x)=-2(1-x)^{-3}(-1)=2(1-x)^{-3}$ より $f^{(n)}x=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ が帰納法で示せる ■

演習問題 3.1 次の関数の第 n 次導関数を求めなさい．

(1) $\frac{1}{1-x^2}$ (2) $h(x)=x^3e^{-x}$ (3) $\frac{x^3}{1-x}$

演習解答 (1) まず，

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})$$

と分解し，$(\frac{1}{1+x})^{(n)}$ と $(\frac{1}{1-x})^{(n)}$ の第 n 次導関数を計算するのがよい．

$$(\frac{1}{1-x})^{(n)}=n!(1-x)^{-(n+1)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

となることはすでに示した．次に，$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}$ を考える．$t=-x$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=-1$ 定数より，

$$(\frac{1}{1+x})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

したがって，

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)}=\frac{1}{2}\left((-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}+n!(1-x)^{-(n+1)}\right)\ \blacksquare$$

(2) $(x^3)''''=0$ に注意し，$g(x)=x^3$，$f(x)=e^{-x}$ とおくと，ライプニッツの定理より，

$$\begin{aligned}h^{(n)}(x)&=(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f(x))^{(n-k)}(g(x))^{(k)}\\&=(-1)^ne^{-x}(x^3)+n((-1)^{n-1}e^{-x}(3x^2))\\&+\frac{n(n-1)}{2}((-1)^{n-2}e^{-x}(6x))+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}((-1)^{n-3}e^{-x}(6))\\&=(-1)^ne^{-x}(x^3-3nx^2+3n(n-1)x-n(n-1)(n-2)\ \blacksquare\end{aligned}$$

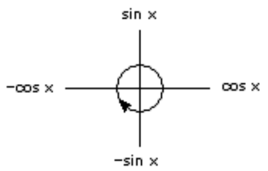
(3) 分子の次数 $=3\geqq 1=$ 分母の次数なので，分子を分母で割ると，

$$\frac{x^3}{1-x}=-x^2-x-1+\frac{1}{1-x}.$$

sin, cos の導関数

下の図で時計回りが導関数．また，$\sin x$ に $\pi/2$ 加えると $\cos x$ になることがわかる．よって，$\sin(x+\pi/2)=\cos x=(\sin x)'$

sin x, cos xの導関数



高次導関数の基本公式

1) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

2) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

3) $(\frac{1}{1-x})^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

演習 4-1

$\frac{1}{1-x^2}$ を $\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}$ とおき分母をはらうと，$1=A(1-x)+B(1+x)=(-A+B)x+A+B$．これより，$\begin{cases}-A+B=0\\A+B=1.\end{cases}$ この式を解くと，$A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}$.

演習 4-2

x^3 と e^{-x} の n 次導関数は $(x^3)^{(n)}=0$ $n>3$ で $(e^{-x})^{(n)}=(-1)^ne^{-x}$．これより，ライプニッツの定理の $g(x)$ を x^3 とする．