2.1　微分係数と導関数

微分係数

関数 $f(x)$ が x_0 を含むある区間で定義されているとき，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A\ (A\neq\pm\infty)$$

が存在するならば，関数 $f(x)$ は， $x=x_0$ で**微分可能** であるという．また，この極限値 A を点 x_0 における**微分係数**といい， $f'(x_0)$ で表す．[a]

[a] 微分可能になるためには，極限値 A が実数でなければならない．

微分係数の定義

$x=x_0+h$ とおくと，微分係数の定義は次のように表すことができる．
$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

例題 2.1　定義にもとづいて，$f(x)=\sin x$ の微分係数 $f'(0)$ を求めてみよう．

演習問題 2.1　定義にもとづいて，$f(x)=x^2$ の微分係数 $f'(-3)$ を求めなさい．

例題 2.1

定義に基づいてとあるので，極限値をもちいて微分係数を求める．

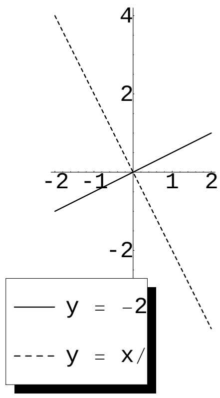
接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 (x_0,y_0) での接線の方程式は，

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

説明 $f'(x_0)$ が接線の傾きを表すので，接線上の任意の点 (x,y) と (x_0,y_0) を結ぶ直線の傾きは，$f'(x_0)$ と同じである．

接線と法線



法線の方程式

接線上の点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ において，接線と垂直な直線を点 P における**法線**という．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ での法線の方程式は，

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

である．

例題 2.2　曲線 $f(x)=x^2$ 上の点 $(-3,9)$ における接線と法線の方程式を求めよ．

演習問題 2.2 関数 $f(x)=\sin x$ のグラフにおいて，原点における接線と法線の方程式を求めよ．

第 1 次近似

接線の方程式は実は曲線 $y=f(x)$ の"第 1 次近似"になっている．つまり，$x\fallingdotseq a$ のとき $f(x)$ の値を接線の値で近似できる．
$f(x)\fallingdotseq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

左側微分係数

関数 $f(x)$ が x_0 で微分可能でなくても

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

が存在するとき，この値を**左側微分係数** といい， $f'_-(x_0)$ で表す．

右側微分係数

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

が存在するとき，この値を **右側微分係数** といい， $f'_+(x_0)$ で表す．

直線の方程式の確認

点 (a,b) を通り傾きが m の直線の方程式を考える．まず，直線上に点 (a,b) と異なる任意の点 (x,y) をとると，傾き $m=\frac{y-b}{x-a}$ となる．これより，$y-b=m(x-a)$ の式が得られる．

説明 微分可能の定義より， $f'_-(x_0)$ と $f'_+(x_0)$ が共に存在し，かつ両者が等しいときに限り

$f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能となる．

例題 2.3 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能か調べてみよう．

演習問題 2.3 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ は $x = 0$ で微分可能か調べなさい．

$f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能ではないが，$x = 0$ で連続である．微分可能性と連続性の間にはどんな関係があるのだろうか．

微分可能ならば連続

定理 2.1 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能ならば，$f(x)$ は $x = x_0$ で連続である．

証明 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ を示せばよい．

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0 \end{aligned}$$

この逆，つまり連続ならば微分可能とはならないことは例題 2.3 でみた．

導関数

関数 $f(x)$ が，ある区間 I の各点で微分可能なとき $f(x)$ は **区間 I で微分可能**であるという．この場合，区間 I の各点にそこでの微分係数を対応させることにより定まる関数を $f(x)$ の **導関数**といい，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で表す．

説明 導関数の表記には，

$$\frac{df(x)}{dx}, Df(x), (f(x))'$$

などの表し方もある．また，関数 $f(x)$ の導関数を求めることを **微分する** という．

例題 2.4 次の関数の導関数を定義にしたがって求めてみよう．

(1) $f(x) = x^n$ (n 整数)　(2) $f(x) = \sin x$　(3) $f(x) = e^x$

演習問題 2.4 次の関数の導関数を定義にしたがって求めなさい．

(1) $f(x) = \cos x$　(2) $f(x) = \log x$

微分公式

定理 2.2 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ が微分可能のとき次式が成り立つ．

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ (和の微分法)
2. $(cf(x))' = cf'(x)$ (c : 定数)
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分法)
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (商の微分法)

例題 2.5 微分公式を使って次の関数の導関数を求めてみよう．

(1) $y = 3x^3 + 2x + 3$　(2) $y = e^x \sin x$

演習問題 2.5 微分公式を使って次の関数の導関数を求めなさい．

(1) $\tan x$　(2) $x^2 \log x$

微分可能

$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ のときに微分可能となり，$f'(x_0)$ と表す．このことから，関数のグラフが尖った場所では，微分可能にならない．

連続性の確認

$f(x)$ は $x = x_0$ で連続とは，$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ が成り立つことである．

微分可能性の確認

$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能とは，$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ が成り立つことである．

導関数と微分係数

$f(x)$ の瞬間的な変化率をある与えられた 1 点で求めるのが微分係数で，任意の点で求めるのが導関数である．

プライム記号

$(f(x))'$ と書くとカッコ内の変数 x について微分することを意味する．

微分計算の基本公式

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$
2) $(e^x)' = e^x$
3) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2.2　微分法

合成関数の微分法

定理 2.3 $y = f(u), u = g(x)$ がそれぞれ u, x の関数として微分可能ならば，合成関数 $y = f(g(x))$ も x の関数として微分可能で，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

が成り立つ．

例題 2.6　次の関数を微分してみよう．

(1) $y = \cos{(x^2 + x)}$　　(2) $y = \log{|x|}$　　(3) $e^{\sin 3x}$

演習問題 2.6　n, m を整数とするとき，$y = x^{\frac{m}{n}}$ を微分しなさい．

逆関数の微分法

定理 2.4 ある区間で $y = f(x)$ は微分可能で $f'(x) \neq 0$ とする．もし， $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在するならば，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

である．

証明 $x_0 = f^{-1}(y_0)$ とおくと

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{dy/dx} \ \blacksquare$$

例題 2.7 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めてみよう．

演習問題 2.7 次の関数の導関数を求めなさい．

(1) $y = \tan^{-1} x$　　(2) $(\sin^{-1} 2x)^3$

対数微分法

$y = x^\alpha$ の導関数を求めるために，

1．両辺の対数をとると．

$$\log y = \log x^\alpha \ (\log p^q = q \log p)$$
$$\log y = \alpha \log x$$

2．この両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{y}y' = \alpha\frac{1}{x}$$

よって，

$$y' = y(\alpha\frac{1}{x}) = x^\alpha(\alpha\frac{1}{x}) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

説明 このように両辺の対数をとって微分するので， **対数微分法**という．また，$y = x^\alpha$ の導関数は $y = x^n$ のときと同じ形をとる．

例題 2.8　対数微分法を使って $y = x^x$ を微分してみよう．

合成関数を理解する

x をプランクトンの数，u をプランクトンを食する小魚の数，y をその小魚を食する魚の数とすると，$\frac{du}{dx}$ はプランクトンの数の変化に対する小魚の数の変化率を表す．また，$\frac{dy}{du}$ は小魚の数に対する魚の数の変化率を表す，したがって，プランクトンの数に対する魚の数の変化率は，$\frac{dy}{dx}$ となる．

例題 2-6

$(\cos{(x^2 + x)})' = -\sin(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' = -(2x + 1)\sin(x^2 + x)$ と解けるようになろう．

逆関数の微分法

すでに $y = \log x$ の導関数を求めたが，$y = \log x$ は $y = e^x$ の逆関数である．つまり，$y = \log x$ は $x = e^y$ のことである．そこで，両辺を y で微分すると，$\frac{dx}{dy} = e^y$．したがって，$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$ となる．

式の確認

$\frac{d(\log y)}{dx} = \frac{d(\log y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{y}$

例題 2-8

x^x の導関数は微分計算の基本公式 (1) が使えない．そこで，対数微分法を用いる．

式の確認 $x\log x$ は 2 つの x があり，その間に $+,-$ がない．つまり，x と $\log x$ の積である．したがって，積の微分法を用いて微分すると $(x\log x)' = 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$.

式の確認

$\log(\sin x)^x$ は対数の性質を用いて，$x\log(\sin x)$ と書き直せる．

合成関数の微分法を用いると，$(\log\sin x)' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ と表せる．

解 両辺に対数をとると

$$\log y = \log x^x = x\log x.$$

ここで両辺を x について微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log x + x\frac{1}{x} = 1 + \log x.$$

これより

$$y' = x^x(1+\log x) \ \blacksquare$$

演習問題 2.8 対数微分法を使って次の関数を微分しなさい．

(1) $y = (\sin x)^x$ $y = x^{\sin x}$

演習解答 両辺に対数をとると

$$\log y = \log(\sin x)^x = x\log\sin x.$$

ここで両辺を x について微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log\sin x + x\frac{\cos x}{\sin x}$$

これより

$$y' = (\sin x)^x(\log\sin x + \frac{x\cos x}{\sin x}) \ \blacksquare$$

媒介変数の微分の理解

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$ と表されるので，その瞬間の変化率は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

である．

媒介変数表示による関数の微分法

定理 2.5 $x = f(t), y = g(t)$ がともに区間 I で微分可能で，しかも $f'(t) \neq 0$ であるならば，y は x に関して微分可能で，次の式が成り立つ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

説明 $y = f(x)$ は，x の値に対して y の値がきまる．しかし，時には，x と y の値がたとえば時間 t によって決まることもある．このようなとき，時間 t を媒介変数または**パラメタ**という．x と y がパラメタ t によって与えられるとき，t の小さな変化に対して，x と y も変化する．その変化量は Δx と Δy で与えられる．これより，微小な x に対する y の変化率は $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ となる．

例題 2.9 $x = a\cos t, y = a\sin t,\ a > 0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

解答

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} \ \blacksquare$$

$\cos^3 t$ の意味

$\cos^3 t$ とは $(\cos t)^3$ のことである．したがって，$(\cos^3 t)' = 3(\cos t)^2\cdot(\cos t)' = -3\sin t\cos^2 t$ となる．

演習問題 2.9 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t,\ a > 0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．

双曲線関数

$\sinh x = \frac{e^x - e^x}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

例題 2.10 $y = \sinh x$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい．