13.1　積分の応用

曲線の長さ

$f(x)$ が C^1 級のとき，曲線 $y = f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分の曲線の長さ s は

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

で与えられる．

説明 まず $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

をとり，点 $(x_i, f(x_i))$ を P_i で表す．$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ を順に結んで折れ線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ を作る．この折れ線の和を作ると

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i$$

ここで分割 Δ を細かくするとき，この和がある値 s に収束するならば，この s を曲線 $y = f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分の **弧の長さ** と決める．

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

ここで，$f(x)$ は C^1 級の曲線なので，平均値の定理を用いて

$$\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i = \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\Delta x_i,\ (x_{i-1} < \xi < x_i).$$

よって，$a \leqq x \leqq b$ の部分の長さ s は

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \ \blacksquare$$

例題 13.1 次の曲線の長さを求めてみよう．
$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ の全長

解答 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とおくと，曲線の 1 部分 Δl は

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}\Delta t$$

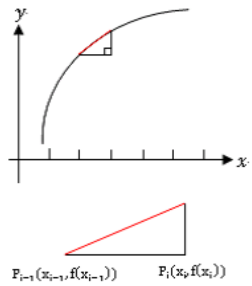
で与えられる．また，$t = \frac{\pi}{2}$ で，曲線は滑らかでない．したがって，求める曲線の長

滑らかな曲線

$f(x)$ が C^1 級のとき，曲線 $y = f(x)$ は滑らかな曲線という．

曲線の長さを積分で表す

線分の長さは x 方向の成分 Δx と y 方向の成分 Δy に分解すると，$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ で与えられることに注意する．

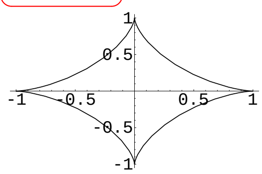


式の確認

$(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 = (x_i - x_{i-1})^2(1 + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}})^2$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

例題 3-23



アステロイド

例題 3-23

$y = f(x)$ の形に表すことが困難な式は，パラメター表示をするのがよい．$x = f(t), y = g(t)$ と表すとき，曲線が滑らかとは $f'(t), g'(t)$ はともに連続で，区間 (a, b) で同時に 0 にならないことである．$f'(t) = -3\cos^2 t \sin t, g'(t) = 3\sin^2 t \cos t$ より $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ で同時に 0 になる．

さは

$$
\begin{aligned}
l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \, dt \ (u = \sin t, du = \cos t \, dt) \\
&= 12\int_0^1 u du = 12\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

曲線の積分範囲

曲線が滑らかでない点を含んでいたら，C^1 級ではない．したがって，曲線の長さを求めるときには，C^1 級の部分の長さを求めるようにする．

演習問題 13.1　次の曲線の長さを求めなさい．
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の全長

ガンマ関数

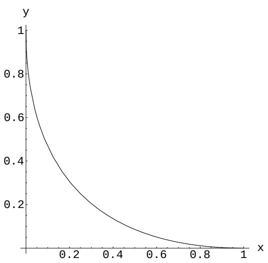
$\Gamma(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx$ について，次のことが成り立つ．

(1) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \ (n > 0)$

(2) n が自然数のとき，　$\Gamma(n) = (n-1)!$

(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

演習 3-23



$$
\left(\begin{array}{c|ccc}
\multicolumn{4}{c}{u = \sin t, du = \cos t dt} \\
t & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\
\hline
u & 0 & \to & 1
\end{array}\right)
$$

証明 (1)

$$
\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx
$$

無限積分より，

$$
\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^n e^{-x} dx.
$$

部分積分を用いると，$\begin{cases} f = x^n & g' = e^{-x} \\ f' = nx^{n-1} & g = -e^{-x} \end{cases}$ より，

$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^n e^{-x} dx &= \lim_{b\to\infty}\left[x^n(-e^{-x})\right]_0^b - \lim_{b\to\infty}\int_0^b nx^{n-1}(-e^{-x}) dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-x^n(e^{-x})\right]_0^b + n\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^{n-1}(e^{-x}) dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{-b^n}{e^b} + n\Gamma(n)
\end{aligned}
$$

ガンマ関数

ガンマ関数はもともと階乗を一般化するために作られたものであるが，今やいろいろな分野で重要な役目を果たしている．そこで，これまでで学んだことの復習として載せておく．