12.1　定積分の定義の拡張

例題 12.1　次の広義積分を求めてみよう．

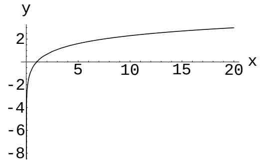
(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$

例題 11-1-(1)
置換積分を用いて被積分関数を簡単な形にしてから，広義積分を用いる．

解答 (1) $t=\sqrt{1-x}$ とおくと $t^2=1-x$ より $2tdt=-dx$．また，$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 1 & \to & 0 \end{array}$ より，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_1^0 \frac{-2tdt}{t} = \int_0^1 \frac{2t}{t}dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 2\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}[2t]_\varepsilon^1 = 2 \blacksquare$$

例題 11-1-(2))



$\lim_{x\to 0+}\log x = -\infty$ であることを確認する．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$f(x)$ は $(0,1]$ で連続となり，また $f(x)$ の不定積分は $\log|x|$ なので，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}[\log|x|]_\varepsilon^1 = \log 1 - \lim_{\varepsilon\to 0+}\log|\varepsilon| \\ &= 0-(-\infty) = \infty \blacksquare\end{aligned}$$

演習問題 12.1　次の広義積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\log x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

演習 11-1-(1)
$x=1$ で連続でないので，$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{1}{x\log x}\,dx$ と書きたくなるが，置換積分を用いる場合は，先に置換積分を行う方がよい．

演習解答 (1) $\frac{1}{x\log x}$ は $(0,e]$ で連続であるが $x=0$ で連続でない．そこで，$t=\log x$ とおくと，$dt=\frac{1}{x}dx$, $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & e \\ \hline t & 0 & \to & 1 \end{array}$ より，

$$\int_1^e \frac{1}{x\log x}dx = \int_0^1 \frac{1}{t}dt.$$

ここで，$f(t)=\frac{1}{t}$ は $t=0$ のとき連続でないので，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t}dt &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}[\log t]_\varepsilon^1 = \log 1 - \lim_{\varepsilon\to 0+}\log\varepsilon \\ &= 1-(-\infty) = \infty \blacksquare\end{aligned}$$

演習 11-1-(2)
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

$\displaystyle\lim_{\varepsilon'\to 0+}\sin^{-1}(1-\varepsilon') = \frac{\pi}{2}$

(2) $f(x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ は $-1<x<1$ で連続であるが，$x=\pm 1$ では連続でない．このとき，

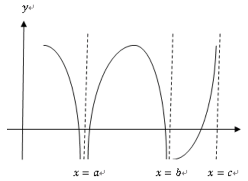
$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0+}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

と表す．すると，

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0+}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0+}\left[\sin^{-1}x\right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon'} = \frac{\pi}{2}-\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \pi$$

と表せる $\blacksquare$

不連続点が 2 個以上



例題 12.2　$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ を求めてみよう．

解答 $x=0$ で関数 $\frac{1}{x^2}$ は不連続である．そこで，定積分を次のように書きなおす．

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

このとき，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = -(1-\infty) = \infty.$$

となるので，広義積分は存在しない ■

演習問題 12.2 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{2/3}} & (-1 < x < 0) \\ \frac{1}{x^2} & (0 < x < 1) \end{cases}$ とするとき，$\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ を求めなさい．

演習解答 $x = 0$ で関数 $f(x)$ は不連続である．そこで，定積分を次のように書きなおす．

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

このとき，

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0-}\int_{-1}^\varepsilon x^{-2/3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0-}\left[3x^{1/3}\right]_{-1}^\varepsilon = 0-(-3) = 3.$$

となるが，$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \infty$ より，広義積分は存在しない ■

例題 12.3 次の広義積分を求めてみよう．

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p},\ p > 0$$

解答 $p \neq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}\left[x^{1-p}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ \infty, & p<1 \end{array}\right].\end{aligned}$$

$p = 1$ のとき，

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\log|x| - 1 = \infty \ ■$$

また $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で連続であるとき，有限な極限 $\lim_{a\to-\infty,b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ が存在するならば，この極限値を $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ で表す．

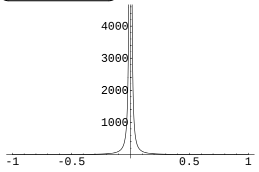
演習問題 12.3 次の無限積分を求めなさい．

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

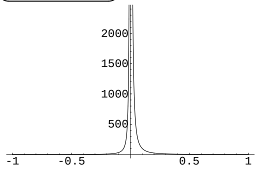
演習解答

$$\begin{aligned}I &= \lim_{a\to-\infty,b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty,b\to\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_a^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}b - \lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}a = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi \ ■\end{aligned}$$

例題 11-2



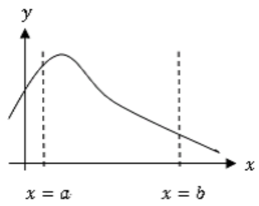
演習 11-2



広義積分の和を考えるとき，どちらかが無限大になると広義積分は存在しない

広義積分第 2 種とは

広義積分第 2 種とは，積分区間が無限区間の場合である．



a から b までの積分はこれまでの定積分である．

例題 11-3

この積分は $p = 1$ を境に，広義積分の結果がはっきりと分かれるので，他の積分の発散，収束を調べるのに便利な積分である．例えば，$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ は $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ よりも小さく，$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ が収束することから，収束するとわかる．

演習 11-