11.1　定積分の計算

置換積分法

定理 11.1 $x=\phi(t)$ は $[a,b]$ で微分可能で，$f(x)$ が $[\phi(a),\phi(b)]$ で連続なとき次の式が成り立つ．

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f\{\phi(t)\}\phi'(t)dt$$

説明 $x=\phi(t)$ とおくと，$dx=\phi'(t)dt$ となり，x についての積分から t についての積分になる．そこで，x についての積分範囲 $x=\phi(a)$ から $x=\phi(b)$ も t についての積分範囲になおす必要がある．そのために，次のような表を用いると便利である．

x	$\phi(a)$	$\to$	$\phi(b)$
t	a	$\to$	b

部分積分法

$f(x),g(x)$ が $[a,b]$ で微分可能なとき次の式が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

例題 11.1　次の定積分の値を求めてみよう．

(1) $\displaystyle\int_0^1 3x^2(x^3+1)^4dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\ dx$

解答 (1) $t=x^3+1$ とおくと，$dt=3x^2dx$ となるので，被積分関数は t^4 で表すことができる．また積分範囲は

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	2

となる．よって，

$$\int_0^1 3x^2(x^3+1)^4dx = \int_1^2 t^4dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_1^2 = \frac{32-1}{5} = \frac{31}{5} \ \blacksquare$$

(2) $\begin{cases} f=x & & g=e^x \\ & \searrow & \\ f'=1 & \leftarrow & g'=e^x \end{cases}$ とおくと

$$\int_0^1 xe^xdx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^xdx = e - [e^x]_0^1 = e-(e-1) = 1.$$

演習問題 11.1　次の定積分の値を求めなさい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}dx$$

また，積分範囲は

t	1	$\to$	$\sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

より，

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t\sqrt{2-t^2}}dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{2}\cos\theta}d\theta = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta}d\theta.$$

三角関数の積分 [1](2) より，分子と分母に $\sin\theta$ をかけると，

$$\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta}d\theta = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta$$

置換積分の使い方

$f(x)$ の不定積分がこれまで学んだ公式で求められないときに，用いるテクニックである．

部分積分法の使い方

置換積分法でうまくいかない場合に用いるテクニックで, $\sin x, \cos x, e^{\pm x}$ は $g'(x)$ とおく．

例題 11-1-(1)

定積分に置換積分法による変数変換を行うと，積分範囲が x のときから t の範囲に変わることに注意.

例題 11-1-(2)

$t=e^x$ とおくと，$dt=e^xdx$, $x=\log t$ となり，置換積分では解けない.

演習 11-1

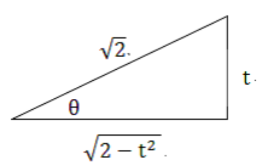
$\sqrt{1\text{次式}}$ のときと同様に，$t=\sqrt{1+\cos x}$ とおく．

式の確認

2 乗の差は, 和と差のせきより, $1-(t^2-1)^2=(1+t^2-1)(1-(t^2-1))=t^2(2-t^2)$

式の確認

$\sqrt{2-t^2} = \sqrt{2-(\sqrt{2}\sin\theta)^2} = \sqrt{2(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{2}\cos\theta$



ここで，$u=\cos\theta$ とおくと，$du=-\sin\theta d\theta$, $\begin{array}{c|ccc} \theta & \frac{\pi}{4} & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & \frac{\sqrt{2}}{2} & \rightarrow & 0 \end{array}$. これより，

$$\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta = \sqrt{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{-1}{1-u^2}\,du = \sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-u^2}\,du$$

$$= \sqrt{2}\left[\log\left|\frac{1-u}{1+u}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\log\left|\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| \blacksquare$$

何を t とおくか

置換積分において，何を t と置くかで，計算の複雑さが全くことなる．別解はそのよき例である．

別解 $1+\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ を用いると，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}}{1-\sin^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \sqrt{2}\left[\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\log\left|\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| \blacksquare$$

偶関数と奇関数の定積分

$f(x)$ が **偶関数** とは，$f(-x)=f(x)$ が成り立つことである．これを $f(x)$ のグラフで考えると y 軸対称となる．したがって，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ となる．

$f(x)$ が **奇関数** とは，$f(-x)=-f(x)$ が成り立つことである．これを $f(x)$ のグラフで考えると原点対称となる．したがって，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ となる．

定積分の性質

$f(x)$ は積分区間で連続であるとする．

(1) $f(x)$ が偶関数ならば，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(2) $f(x)$ が奇関数ならば，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

(4) $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2} & (n\ \text{偶数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n\ \text{奇数}) \end{cases}$

ただし，$n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdots 4\cdot 2 & (n\ \text{偶数}) \\ n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdots 3\cdot 1 & (n\ \text{奇数}) \end{cases}$

例題 11.2　定積分の性質 (1),(3),(4) を示してみよう．

解答 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$. と表せる．ここで，$f(x)$ は偶関数なので $f(x)=f(-x)$ より，

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

ここで，$t=-x$ とおくと $dt=-dx$．また，$\begin{array}{c|ccc} x & -a & \rightarrow & 0 \\ \hline t & a & \rightarrow & 0 \end{array}$ より $\int_{-a}^{0} f(-x)dx = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$．これより，

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \blacksquare$$

例題 11-2-(3)

積分範囲が $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ でこの範囲で $\sin x \geqq 0$ より，$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

(3) $t=\cos x$ とおくと，$dt = -\sin x dx = -\sqrt{1-t^2}dx$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 & \rightarrow & 0 \end{array}$ より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_1^0 f(t)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

式の確認

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

ここで，2 乗の差の平方根より，$t = \sin u$,（$0 \leqq t \leqq 1$）とおくと，$dt = \cos u du$, $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{\cos u}$. また，$u = \sin^{-1} t$ より，$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline u & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array}$. したがって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)du.$$

最後に，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \ \blacksquare$$

(4) (3) より $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ なので $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ について証明しよう．$n \geqq 2$ のときは,

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = -\left[\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \end{aligned}$$

ここで，$\sin 0 = 0, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ より，$\left[\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. そこで，残りの積分を考える．

$$\begin{aligned} (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

より漸化式 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を得る．ところで，$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ より,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{I_n}{I_{n-2}}\frac{I_{n-2}}{I_{n-4}}\cdots\frac{I_2}{I_0}I_0 = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2},\ n \text{ 偶数} \\ I_n &= \frac{I_n}{I_{n-2}}\frac{I_{n-2}}{I_{n-4}}\cdots\frac{I_3}{I_1}I_1 = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} = \frac{(n-1)!!}{n!!},\ n \text{ 奇数} \ \blacksquare \end{aligned}$$

式の確認
部分積分法で，$f(x) = \sin^{n-1} x, g'(x) = \sin x$ より，$f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x, g(x) = -\cos x$

式の確認
$I_2 = \frac{2-1}{2} I_{2-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$
$I_3 = \frac{3-1}{3} I_{3-2} = \frac{2}{3} \cdot 1$
$I_4 = \frac{4-1}{4} I_{4-2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4}$
$I_5 = \frac{5-1}{5} I_{5-2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$

演習問題 11.2　次の積分の値を求めなさい．$\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ dx$

演習解答 $a^2 - x^2$ の形の 2 乗の差の無理関数より $x = 2\sin t$ とおくと，$t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$, $dx = 2\cos t dt, x^2 = 4\sin^2 t, \sqrt{4-x^2} = 2\cos t$, $\begin{array}{c|cc} x & 0 \to & 2 \\ \hline t & 0 \to & \frac{\pi}{2} \end{array}$. これより，

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t(2\cos t)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= 4\frac{1!!}{2!!}\frac{\pi}{2} = \pi \ \blacksquare \end{aligned}$$

演習 3-17
この問題は半径 2 の四分の一円なので，その面積は π である．

演習問題 11.3 1.　　次の定積分の値を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x dx$　(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$　(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 \cos x dx$　(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos nx dx$ (n 整数)　(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\ dx$