10.1　定積分

定積分

$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で定義されているとする．この区間 $[a,b]$ を次のような点 $x_i(i=1,2,\ldots,n)$ で n 個の小区間に分割する．

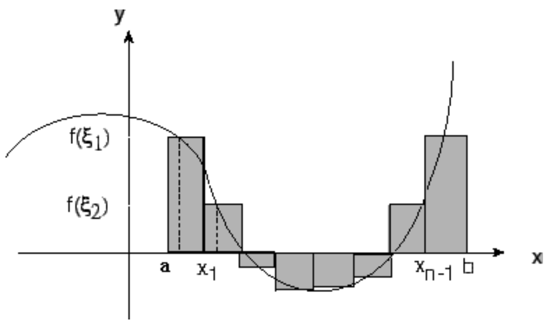


図 10.1　定積分

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$$

この分割を Δ で表し，分割の幅 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ のうちで最も大きい値を $|\Delta|$ で表す．いま，それぞれの小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ のなかに任意の点 ξ_i をとり，微小長方形の和，**リーマン和** とよばれる次の和を考える．

$$S(\Delta) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

このとき，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S$$

となる実数 S が存在するならば，この S を $f(x)$ の **定積分** といい，$f(x)$ は $[a,b]$ で**積分可能** であるという．また，この S を次のように表す．

$$S = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

リーマン積分の理解

x 軸を微小区間に分け，微小区間内の任意の点における関数の値と微小区間の幅を用いて，微小長方形を作成する．この微小長方形の和が微小区間の幅を限りなく小さくするとき，ある値に近づくならばその値を定積分とする．

積分可能

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で積分可能であるということは，分割の仕方および点 $\xi_i(i=1,2,\ldots,n)$ のとり方に関係なく一通りに定まるということである．

区分求積法

区間 $[a,b]$ を $n(b-a)$ 等分すると，$\Delta x = \frac{1}{n}$ となり

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n(b-a)} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^{b-a} f(x)dx.$$

区分求積法の使い方

区分求積法をうまく用いるには，区分の幅が $\frac{1}{n}$ になるように，区間 $[a,b]$ を等分することである．これにより，$\frac{k}{n}$ を x とおくと，積分範囲は $k=1$ のとき，$x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$．また，$k = n(b-a)$ のとき，$x = \lim_{n\to\infty} \frac{n(b-a)}{n} = b-a$ となる．

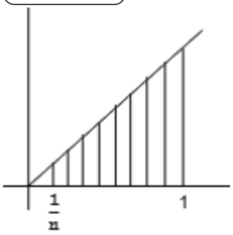
例題 10.1　直線 $y=x$ と $y=0$ と $x=2$ で囲まれた図形の面積を積分を用いて表してみよう．

解 区間 $[0,2]$ を $2n$ 等分し，小区間の幅が $\frac{1}{n}$ になるように分割する．このとき，微小長方

形の右端を高さとすると微小長方形の面積の和は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{2n}{n^2}\right).$$

例題 3-13



$\sum$ を用いて書き直すと，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{2n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2}.$$

ここで，$\frac{1}{n}$ をくくりだすと，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n}$$

$x=\frac{k}{n}$ とおくと，$\begin{array}{c|ccc} k & 1 & \to & 2n \\ \hline x & \frac{1}{n} & \to & 2 \end{array}$ ここで，$n\to\infty$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2}=\int_{x=0}^{2}x\,dx \blacksquare$$

演習問題 10.1　曲線 $y=\frac{1}{x}$ と $y=0$ および直線 $x=1$ と $x=3$ で囲まれた図形の面積を積分を用いて表しなさい．

積分不可能

x が有理数のとき $f(x)=x$ となり，x が無理数のとき $f(x)=0$ となる関数 $f(x)$ を $0\leqq x\leqq 1$ で考える．すると，どんな微小区間内にも有理数と無理数が存在するため，微小区間の幅を 0 に近づけても，微小長方形の和は一定の値に近づかない．したがって，微分不可能となる．

積分可能

定理 10.1 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続ならば，$[a,b]$ で積分可能である．

今後，特に断らない限りこの章にでてくる $f(x)$, $g(x)$ などの関数は，考えている区間で連続であるとする．

定積分の定義より，ただちに次の公式が得られる．

定積分公式

定理 10.2 $f(x),g(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であるとすると，

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\pm g(x)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$ (c : 定数)

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(4) $\displaystyle\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

(5) $[a,b]$ で $f(x)\geqq g(x)$ ならば，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geqq\int_a^b g(x)dx$

証明 (1) $a<b$ の場合．$[a,b]$ の任意の分割を

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

とし，ξ_i を $[x_{i-1},x_i]$ 内の任意の点としてリーマン和を考えると，

$$\sum_{i=1}^{n}\{f(\xi_i)+g(\xi_i)\}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i$$

定積分の性質

(1) 和の不定積分は不定積分の和

(2) スカラー倍の不定積分は不定積分のスカラー倍

(3) 積分範囲を逆にすると，マイナスの元の定積分

(4) 積分範囲を分割して積分しても積分結果は変わらない

ここで， $|\Delta| \to 0$ とすると，定理 10.1 より，

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{|\Delta|\to 0} -\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = -\int_b^a f(x)\,dx \ \blacksquare\end{aligned}$$

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続であるとき， $[a,b]$ 内の任意の点 x に対して定積分 $\int_a^x f(t)dt$ を考えると，これは $[a,b]$ を定義域にもつ関数になる．この関数について，次の定理が成り立つ．

微積分学の基本定理 1

定理 10.3 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続であれば， $\int_a^x f(t)dt$ は x について微分可能であって，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

説明 $f(t)$ が物体の速さだとすると，$\int_a^x f(t)dt$ は時間 $t=a$ から $t=x$ まで物体の動いた距離と解釈できる．すると $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ は運動している物体のある時刻 x での微分，つまり，その時の速さと考えられる．$f(t)$ が時刻 t でのある物体の速さのことなので，時刻 x での物体の速さは $f(x)$ である．

例題 10.2 $f(t)$ が連続のとき

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt$$

を求めてみよう．

解答 まず， $u = x^2$ とおくと $du = 2xdx$．よって

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt = \frac{d(\int_a^u f(t)dt)}{du}\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx} = f(x^2)(2x) \ \blacksquare$$

演習問題 10.2 $f(t)$ が連続のとき

$$\frac{d}{dx}\int_{2x}^{2x+1} f(t)dt$$

を求めなさい．

微積分学の基本定理 2

定理 10.4 閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ の 1 つの原始関数を $G(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

である．

定理 3.9 の理解

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおくと，この定理より $F'(x) = f(x)$ となり，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．つまり，連続な関数は必ず原始関数をもっていることがわかり，その原始関数は定積分で与えられることがわかる．

例題 3-14

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ とは $\frac{d(\int_a^x f(t)dt)}{dx}$ のことである．

演習 3-14

積分範囲が $2x$ から $2x+1$ では微積分学の基本定理が使えない．そこで，不定積分の性質 (5) より，積分範囲をわける．

定積分計算記号

$G(b) - G(a)$ をもっと簡便な記号で表したものが，$[G(x)]_a^b$ である．

定積分の計算

定積分の計算は被積分関数の不定積分を求め，積分範囲の上端を代入した値から下端を代入した値の差を求めればよい．

例題 3 − 15-(2)

$\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ の計算は，$\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2}$ と先に計算するよりも，それぞれの項において，$\frac{\pi}{2} - 0 - (\frac{\sin \pi}{2} - \frac{\sin 0}{2})$ と計算する方が間違いが少ない．

例題 3-15-(3)

$\tan^{-1} 1$ とはタンジェントをとったら 1 になる角のことである．ただし，その角は $-\frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2}$ の間になければならない．よって，求める角は $\frac{\pi}{4}$ となる．

証明 微積分学の基本定理 1 より，$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ も $f(x)$ の原始関数．よって，$F(x) = G(x)+c$ (c : 定数)．ここで $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ だから，$F(a) = G(a)+c = 0$. よって，$c = -G(a)$. このとき $F(x) = G(x) - G(a)$ となるから，$x = b$ とすると，

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \ \blacksquare$$

例題 10.3 次の定積分の値を求めてみよう．

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ (3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$

解答 (1)

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_1^4 x^{-2}dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^4 = -(\frac{1}{4} - 1) = \frac{3}{4} \ \blacksquare$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} \ \blacksquare$$

(3)

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{2}{2} - \tan^{-1} 0\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \ \blacksquare$$

演習問題 10.3 次の定積分の値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2-2x+3}\,dx$

演習問題 10.4 **1.** 関数 $f(t)$ が連続であるとき，$g(x)$ を求めよう．

(a) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ (b) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$

(c) $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{2x} x^2 f(t)dt$

2. 次の定積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\int_1^5 2\sqrt{x-1}dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2-t}{t^3}dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{e^x+1}dx$

3. 定理 12.2(2)，(3)，(4) を証明しよう．

4. 次の不等式を証明しよう．

(a) $\dfrac{\pi}{4} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx < 1 \quad (n > 2)$ (b) $\dfrac{1}{2n+2} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$

5. 次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{1}{n^2+i^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan(t^2)dt}{x^3}$