1.1　関数の極限と連続関数

直感的極限値

関数 $f(x)$ において，x を x_0 に限りなく近づけていくとき，$f(x)$ がある定数 l に限りなく近づくならば，l を x が x_0 に近づくときの $f(x)$ の **極限値 (limit)** といい，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

で表す．

極限値の表記

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ と書く代わりに，$x \to x_0$ のとき $f(x) \to l$ と書くことも可能である．

説明 x が x_0 に限りなく近づくとは，絶対値 $|x - x_0|$ を限りなく小さくできるということと同じである．同様に，$f(x)$ が定数 l に限りなく近づくということも $|f(x) - l|$ を限りなく小さくできることと同じである．

極限値の基本的な考え方

限りなく小さくできるということは，どんな小さな正の数を比較の相手に選んでも，それよりも小さくできるということである．

極限値の性質

定理 1.1 $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ とすると，

(1) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$

(2) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = cl$

(3) $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = lm$

(4) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ $(m \neq 0)$

[*1]**説明** 関数の極限値は分母が 0 にならないかぎり，四則演算に従うことがわかる．

例題 1.1　次の関数の極限を求めてみよう．

(1) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$　　(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

例題 1-1-(1)

$x \to 2$ のとき，$x^2-3x+2 \to 0$, $x^2 - 4 \to 0$ となる．つまり，分子，分母とも $x - 2$ を共通因子に持っていることになる．よって，$(x - 2)$ で因数分解できることがわかる．

例題 1-1-(2)

$x \to 0$ のとき，$\sqrt{x+4} - 2 \to 0$, $x \to 0$ となる．よって，x で因数分解できることがわかる．

演習問題 1.1 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ の極限値を求めなさい．

演習 1-1

無理関数 $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ は $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ を分子と分母にかけることで有理化できる．

無限大に発散

x が x_0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなる場合には，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

x が x_0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負となりその絶対値が限りなく大きくなる場合には，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

と表す．

説明 ここで限りなく大きくなるとは，どんな大きな実数 M が与えられても，x がある実数 N より大きいとき，$f(x) > M$ となるということである．

$\infty - \infty$ 型の極限値

$\infty - \infty$ 型の極限値は，1 つの分数で表わすことで $\frac{0}{0}$ または $\frac{\infty}{\infty}$ に書き直す．

例題 1.2　次の関数の極限を求めてみよう．

(1) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$　(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$

演習問題 1.2 $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+2x+1} + x + 1)$ を求めなさい

$x \to -\infty$ の対処法

$x \to -\infty$ は $x = -t$ とおき，$t \to \infty$ と書き換えてから計算を行う．

実際に極限値を求めるには先の定理だけでは不十分である．たとえば，$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ の極限値

[*1] この定理の (4) は，有理関数の分母と分子の極限値が 0 でなければ，有理関数の極限値は分子と分母の極限値の商をとればよい．

は上で用いた方法では求められない．そんなとき便利なものに，次のようなものがある．

はさみうちの定理

定理 1.2 x_0 の δ 近傍 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ で $f(x) < h(x) < g(x)$ であって，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

ならば，$\displaystyle\lim_{x\to x_0} h(x) = l$ である．

説明 $f(x) < h(x) < g(x)$ より，$f(x)-l < h(x)-l < g(x)-l$．ここで，$|f(x)-l|$ と $|g(x)-l|$ は限りなく小さくできるので，間に挟まれた $|h(x)-l|$ も限りなく小さくできるだろういうことである．

例題 1.3 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を求めてみよう．

演習問題 1.3 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ を求めなさい．

例題 1.4 次の関数の極限を求めてみよう．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

演習問題 1.4 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ を求めなさい．

1.1.1 片側極限値

x を x_0 に近づけるとき，特に $x < x_0$ という制限があるときには，x は x_0 より小さい値をとりながら x_0 に近づくので，これを $x \to x_0 - 0$ または $x \to x_0-$ と表す．同様に，x が x_0 より大きい値をとりながら，x_0 に近づくとき，これを $x \to x_0 + 0$ または $x \to x_0+$ と表す．

左側極限値

$x \to x_0 - 0$ のときに，$f(x)$ がある定数 l に限りなく近づくことを

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = l \text{ または } f(x_0-0) = l$$

と表し，l を $f(x)$ の x_0 における**左側極限値** という．

右側極限値

$x \to x_0 + 0$ のときに，$f(x)$ がある定数 l に限りなく近づくことを

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = l \text{ または } f(x_0+0) = l$$

と表し，l を $f(x)$ の x_0 における**右側極限値** という

例題 1.5 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2-1, & x>0 \end{cases}$ の $x=0$ における右側極限値と左側極限値を求めてみよう．

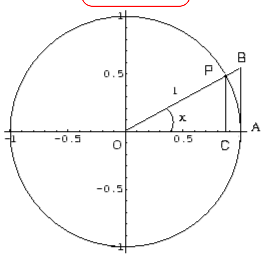
演習問題 1.5 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ の $x=0$ における右側極限値と左側極限値を求めなさい．

$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$ は $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形である．そこで，分子と分母を x の最大次数で割る．

演習 1.2 $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2}$ で $x+1$ が負であることに注意すると，$\sqrt{(x+1)^2} = -(x+1)$

例題 1-3



演習 1-3

$X = 2x$ とおくと，$\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X} = 1$

例題 1-4-(1)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{3x}{2x}$

例題 1-4-(2)

$\tan 3x$ を $\sin$ と $\cos$ で表わすと，$\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$

$\lim_{x\to 0}\cos 3x = 1$

$\infty\cdot 0$ の不定形

$\infty\cdot 0$ の不定形はどちらかを分数で表わすことで $\frac{0}{0}$ または $\frac{\infty}{\infty}$ に変形する．

片側極限値の表記法

$\lim_{x\to 0-0}$ にかぎり，$\lim_{x\to -0}$ と表すこともできるが，統一性を考えてここでは $\lim_{x\to 0-}$ と表す．また，$\lim_{x\to 0+0}$ にかぎり，$\lim_{x\to +0}$ と表すこともできるが，統一性を考えてここでは $\lim_{x\to 0+}$ と表す，

極限値の存在

定理 1.3 $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ とは $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = l$ かつ $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = l$ ということと同値である.

極限値の非存在

極限値が存在しないことを示すには，$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ を示せばよい.

説明 $f(x_0 - 0)$ と $f(x_0 + 0)$ が存在し，かつ等しいときに限り $f(x)$ の極限値が存在するといえる．つまりそれ以外の場合には極限値が存在しない.

例題 1.6　次の関数の極限を求めてみよう.

(1) $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{x - 2}$　　(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

演習問題 1.6　$\lim_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{\sqrt{(2 - x)^2}}$ の極限を求めなさい

例題 1 − 6

右側極限値と左側極限値が存在するか調べる.

演習 1-6

$\sqrt{x^2} = |x|$ であることを思い出す．$x < 2$ のとき，$2 - x > 0$ となり，$\sqrt{(2 - x)^2} = 2 - x$. $x > 2$ のとき，$2 - x < 0$ となり，$\sqrt{(2 - x)^2} = -(2 - x)$

1.2　連続関数

連続関数

関数 $f(x)$ は区間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ で定義されていて，

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x = x_0$ で**連続** であるという.

連続関数

関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続になるためには，$x = x_0$ で関数が値を持ち，$x = x_0$ で極限値が存在し，その 2 つの値が等しいことである.

説明 関数 $f(x)$ の定義域が区間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ を含んでいるとき，関数 $f(x)$ は次の 2 つの理由を除いて連続である.

1. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ が存在しない
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ は存在するがその値は $f(x_0)$ と等しくない

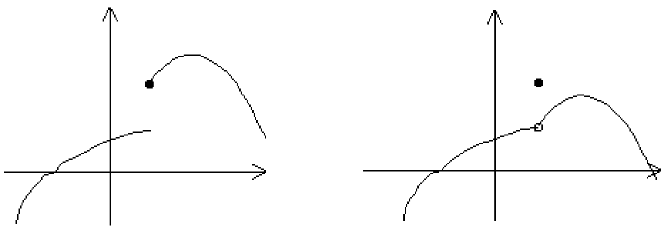


図 1.1　不連続

例題 1 − 7

左側および右側極限値を調べ，等しければ連続である.

1. の場合，x_0 は**真性不連続点**といい，2 の場合は，**除去可能な不連続点**という．つまり，2. の場合は，$f(x_0)$ の値を新たに定義することにより，x_0 で連続にすることができる.

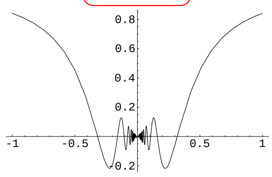
例題 1.7　$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$　は $x = 2$ で連続か調べてみよう.

演習問題 1.7 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$　は $x = 0$ で連続か調べなさい.

演習 1 − 7

振動しているのではさむ.

演習 1-7



$0 \leqq |\sin \frac{1}{x}| \leqq 1$ の両辺に $|x|$ を掛けると，$0 \leqq |x \sin \frac{1}{x}| \leqq |x|$

区間で連続

$f(x)$ が区間 I のどの点でも連続であるとき，$f(x)$ は区間 I で連続であるという.

連続関数の性質

整式，$\sin x$, $\cos x$, $\tan^{-1} x$ は区間 $(-\infty, \infty)$ で連続．また，有理関数は分母が 0 になる点を除いたすべての区間で連続．連続関数は，四則の演算を行っても合成してもまた連続であるというすばらしい性質を持っている．

連続関数の性質

定理 1.4 $f(x)$ と $g(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとすると

(1) $f(x) \pm g(x)$ も $x = x_0$ で連続である

(2) $cf(x)$ も $x = x_0$ で連続である．ただし， c は定数

(3) $f(x)g(x)$ も $x = x_0$ で連続である

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も $x = x_0$ で連続である．ただし， $g(x_0) \neq 0$

連続関数の合成関数

定理 1.5 $y = f(x)$ が $x = x_0$ で連続で,$z = g(y)$ が $y = f(x_0)$ で連続ならば，合成関数 $z = g(f(x))$ も $x = x_0$ で連続である．

これらのことからわかるように連続な関数は非常に扱いやすい関数である．

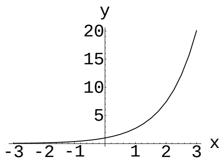
例題 1-8

連続関数の性質を用いる．

例題 1.8 $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は $x \neq 0$ で連続であることを示してみよう．

演習問題 1.8 $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^{\frac{1}{x}}}$ は $x \neq 0$ で連続であることを示しなさい．

e^x のグラフ



1.3 逆三角関数

ここでは，三角関数の逆関数である逆三角関数について学ぶ．

逆正弦関数

閉区間 $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ を定義域としたとき， $y = \sin x$ は 1 対 1 の関数になるので，逆関数を考えることができる．この関数を

$$y = \sin^{-1} x \text{ または } y = \arcsin x$$

と表し，**逆正弦関数** という．

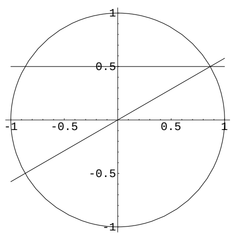
$\sin^{-1} x$ の読み方

$\sin^{-1} x$ はアークサインと読む

説明 この関数の定義域は $y = \sin x$ の値域 $[-1, 1]$ となり，値域は $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ となる．つまり

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y \ (-1 \leqq x \leqq 1, -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$$

という関係が成り立つ．このとき y の値域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を **逆正弦関数の主値** という．



例題 1-9

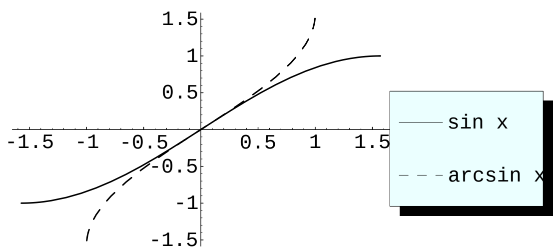


図 1.2　arcsin x

主値の確認

逆関数の問題では，主値が何であるか確認する必要がある．

例題 1.9 $\sin^{-1}(\dfrac{1}{2})$ の値を求めてみよう．

演習問題 1.9 $\sin^{-1}(-\dfrac{1}{2})$ の値を求めなさい．

逆余弦関数

閉区間 $[0, \pi]$ を定義域としたとき，$y = \cos x$ は 1 対 1 の関数になるので，逆関数を考えることができる．この関数を

$$y = \cos^{-1} x \text{ または } y = \arccos x$$

と表し，**逆余弦関数** という．

説明 この関数の定義域は $y = \cos x$ の値域 $[-1, 1]$ となり，値域は $[0, \pi]$ となる．つまり

$$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y \ (-1 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \pi)$$

という関係が成り立つ．このとき y の値域 $[0, \pi]$ を **逆余弦関数の主値** という．

例題 1.10 $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めてみよう．

演習問題 1.10 $\sin^{-1}\frac{1}{3} = \cos^{-1} x$ をみたす x を求めてみよう．

逆正接関数

開区間 $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ を定義域としたとき，$y = \tan x$ は 1 対 1 の関数になるので，逆関数を考えることができる．この関数を

$$y = \tan^{-1} x \text{ または } y = \arctan x$$

と表し，**逆正接関数**いう．

この関数の定義域は $y = \tan x$ の値域 $(-\infty, \infty)$ となり，値域は $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ となる．つまり

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y \ (-\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

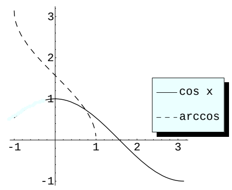
という関係が成り立つ．このとき y の値域を **逆正接関数の主値** という．

例題 1.11 次の式をみたす x を求めてみよう．

(1) $\tan^{-1} 2 = \cos^{-1} x$　　(2) $\sin^{-1}\frac{1}{3} = \cos^{-1} x$

演習問題 1.11 すべての x において，$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示しなさい．

$\cos^{-1} x$ のグラフ



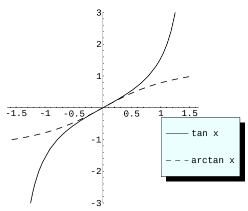
$\cos^{-1} x$ の読み方

$\cos^{-1} x$ はアークコサインとよむ.

$\cos^{-1} x$ の値域

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ より，$\cos^{-1} x$ の値域は $\sin^{-1} x$ の値域に $\frac{\pi}{2}$ を加えたものである．

$\tan^{-1} x$ のグラフ



$\tan^{-1} x$ の読み方

$\tan^{-1} x$ はアークタンジェントとよむ.

$\tan x$ の変形

$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$ より，$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ の両辺を $\cos^2 y$ で割ると，$\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$．これより，$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$

演習 1-11

$\sin a = \cos b$ をみたす a, b を求めるため，$\cos b$ を $\sin$ を用いて表すことを考える．$\sin(\frac{\pi}{2} - b) = \sin\frac{\pi}{2}\cos b - \cos\frac{\pi}{2}\sin b = \cos b$