1.1　数列の極限値

数列

自然数 $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ のおのおのの数に対してそれぞれ実数

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

が対応しているとき，これを **数列**または無限数列といい，個々の $a_1, a_2, \ldots$ をこの数列の **項** という．

等差数列

隣り合う 2 つの項の差が一定である数列 $\{a_n\}$ を**等差数列**といい，$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = (n-1)d + a_1$ と表せる．

有界

数列 $\{a_n\}$ において，すべての n について $a_n \leqq M$ である定数 M が存在するとき，数列 $\{a_n\}$ は **上に有界** であるといい，すべての n について $a_n \geqq m$ である定数 m が存在するとき，数列 $\{a_n\}$ は **下に有界** であるという．また，すべての n について $m \leqq a_n \leqq M$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は **有界** であるという．

等比数列

隣り合う 2 つの項の比が一定である数列 $\{a_n\}$ を**等比数列**といい，$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} + \cdots + \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = a_1 r^{n-1}$ と表せる．

説明 数列 $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ は $n = 1, 2, 3, \ldots,$ において，$\frac{1}{n} > 0$ であり，$\frac{1}{n} < 1$ なので，上に有界であり下に有界であるので，有界．

単調増加/減少数列

すべての n について $a_{n+1} \geqq a_n$ となるとき，数列 $\{a_n\}$ は **単調増加数列** という．同様に，すべての n について $a_{n+1} \leqq a_n$ となるとき，数列 $\{a_n\}$ は **単調減少数列** という．

狭義の単調増加

n が大きくなるにしたがって，a_n が等号を含まず大きくなることを**狭義の単調増加**という．

例題 1.1 数列 $\{a_n\} = \{\dfrac{n}{n+1}\}$ は単調増加数列か調べてみよう．

演習問題 1.1　数列 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ は単調増加数列か調べなさい．

数列の極限値

数列 $\{a_n\}$ において，項の番号が限りなく大きくなるとき，a_n がある定数 a に限りなく近づくことを

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

と表し，数列 $\{a_n\}$ は a に**収束する** といい，この a を数列 $\{a_n\}$ の **極限値**または **極限** という．

極限の考え方

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とは，$|a_n - a|$ が限りなく小さくなると考えることができる．

説明 数列が収束するとき，a は実数でなければならない．したがって，a には $+\infty$ や $-\infty$ は用いることができない．数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，数列 $\{a_n\}$ は **発散する** という．

極限値の性質

定理 1.1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$ とすると，

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (ca_n) = ca$ (c : 定数)

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

が成り立つ．

発散の種類

発散には基本的に 2 種類ある．1 つは，n が限りなく大きくなるときに a_n が限りなく大きくなるときで，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と表す．もう 1 つは，n が限りなく大きくなるときに a_n が正と負の値を交互に取りながら，一定の値に収束しない場合である．このとき，a_n は**振動する**という．

極限値の性質

定理 1.2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b > 0$ とすると，

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

が成り立つ．

例題 1.2 $\{a_n\} = \{\dfrac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6}\}$ の極限値を求めてみよう．

演習問題 1.2 次の数列の極限値を求めなさい．
$\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

の極限値は定理 1.1 , 1.2 からは求められない．$\sin n\theta$ のように，n が大きくなるとき値が振動する場合には，次の定理は有効である．

はさみうちの定理

定理 1.3 すべての $n > n_0$ に対して $a_n < c_n < b_n$ となる整数 n_0 が存在し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ ならば，$\lim_{n\to\infty} c_n = a$ である．

例題 1.3 $\theta \neq 0$ のとき，$\{a_n\} = \{\dfrac{1}{n}\sin n\theta\}$ の極限値を求めてみよう．

演習問題 1.3 次の極限値を求めなさい．
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{1+3^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+4^n}{3^{n-1}-5^n}$

数列の収束，発散の基本となるものに $\{r^n\}$ の極限がある．

ベルヌーイの不等式

$x > 0$ の実数, $n > 1$ の整数とすると，$x^n \geqq n(x-1)+1$

例題 1.4 $a_n = \dfrac{r^{n+1}}{1+r^n}$ $(r \neq -1)$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めてみよう．

演習問題 1.4 数列 $\{a_n\} = \{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ は単調増加数列か調べてみなさい．

数列の基礎定理

定理 1.4 上に有界な単調増加数列は収束する．また下に有界な単調減少数列も収束する．

例題 1.5 $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, a_1 = 1$ で与えられている数列 $\{a_n\}$ が収束するか調べてみよう．

演習問題 1.5 $a_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$ で与えられている数列 $\{a_n\}$ が収束するか調べなさい．

ネピア数

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

例題 1.6 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n$ を求めてみよう．

演習問題 1.6 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ を求めなさい．

ダランベールの判定法

定理 1.5

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1 \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

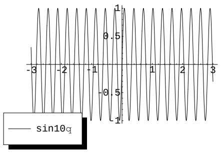
例題 1.7 $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$，$a_1 = 1$ の極限値を求めてみよう．

演習問題 1.7 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$ を求めなさい．

不定形

分子と分母が共に無限大に発散するときは，どうなるのだろうか．このときの形を**不定形**といい，このときは，分子と分母から n の最高次数の項をくくり出すことによって，定理 1.5.1 を用いることができる形に変形する．

$\sin n\theta$ のグラフ



演習 1-4

a_n と a_{n-1} を比較する．

数列の基礎定理の使い方

数列が収束するかどうかもわからないときに，この定理は役に立つ．

極限値 e

極限値 e は スイスの数学者レオナルド・オイラー (1707-1783) によって初めて定義されたのでオイラー (Euler) の頭文字をとって e で表す．さらに，$e = 2.7182818284590\ldots$ は無理数であることが知られている．

演習 1-6

$(1-\frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n}$ よりその逆数をとり，$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = e$ を用いる．

$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$

計算の確認

$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$.