7.1 未定係数法

未定係数法

$$L(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

は

$$L(D)y = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = f(x)$$

と表せる．ここで $f(x)$ が同次線形微分方程式の解の形をしているとすると，$H(D)f(x) = 0$ を満たす D の多項式 $H(D)$ が存在する．そこでこの方程式の特殊解を y_p とすると

$$H(D)L(D)y_p = H(D)f(x) = 0$$

より特殊解 y_p を見つけるには同次方程式

$$H(D)L(D)y = 0$$

の解の中から

$$L(D)y = f(x)$$

を満たすものを見つければよい．この解法のことを**未定係数法 (method of undetermind coefficient)** という．
よく用いられる $H(D)$ をあげておく．

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^m \Longrightarrow H(D)f(x) = D^{m+1}x^m = 0\\
&f(x) = e^{ax} \Longrightarrow H(D)f(x) = (D-a)e^{ax} = 0\\
&f(x) = e^{ax}\cos bx \Longrightarrow H(D)f(x) = (D^2 - 2aD + a^2 + b^2)e^{ax}\cos bx = 0\\
&f(x) = e^{ax}\sin bx \Longrightarrow H(D)f(x) = (D^2 - 2aD + a^2 + b^2)e^{ax}\sin bx = 0
\end{aligned}$$

例題 7.1 $L(y) = y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$ を解け．

解 補助方程式 $L(y) = 0$ の特性方程式は $m^2 - m - 2 = 0$ より特性根 $m = -1, 2$ を得る．よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

となる．次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求める．$D = \frac{d}{dx}, H(D) = D - 3$ とおくと，$H(D)2e^{3x} = 2(D-3)e^{3x} = 0$ より求める特殊解 y_p は

$$(H(D)L(D))y = 2(D-3)(D^2 - D - 2)y = 0$$

の解である．この方程式の特性方程式は $2(m-3)(m^2 - m - 2) = 0$ より基本解は e^{3x}, e^{-x}, e^{2x} である．よって

$$y_p = Ae^{3x} + Be^{-x} + Ce^{2x}$$

と表わせる．しかし，y_p は $L(D)y_p = f(x)$ を満たさなければならないので $L(D)y = 0$ を満たす $Be^{-x} + Ce^{2x}$ は省いてもよい．したがって特殊解 y_p の形を

$$y_p = Ae^{3x}$$

とおく．これを $L(D)y = 2e^{3x}$ に代入すると

$$L(D)Ae^{3x} = (Ae^{3x})'' - (Ae^{3x})' - 2(Ae^{3x}) = 4Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

となる．よって $A = \frac{1}{2}$．これより特殊解 $y_p = \frac{1}{2}e^{3x}$ を得る．したがって一般解は

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$

で与えられる． ■

7.2 定数変化法

定数変化法

y_1 と y_2 は $L(y) = 0$ の基本解だとする．ここで $L(y) = f(x)$ の特殊解を

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

とおく．ただし $u_1(x), u_2(x)$ は後で定める未定関数．2 つの関数を決めなければならないので，2 つの条件が必要となる．最初の条件は $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ が $L(y) = f(x)$ の解であることである．2 つめの条件は計算を簡単にするために設けた条件

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0.$$

である．最初の条件より，

$$y' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'.$$

2 つめの条件より

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2'.$$

これより y'' を求めると

$$y'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''.$$

これらを $L(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ に代入すると

$$(u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'') + a_1(u_1 y_1' + u_2 y_2') + a_0(u_1 y_1 + u_2 y_2) = f(x).$$

整理すると

$$(u_1' y_1' + u_2' y_2') + u_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + u_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) = f(x).$$

ここで，y_1 と y_2 は $L(y) = 0$ の解より u_1 と u_2 の係数は 0．したがって u_1' と u_1' は連立方程式

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

を満たす．そこで Cramer の公式を用いると

$$u_1' = \frac{-y_2 f(x)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}},\ u_2' = \frac{y_1 f(x)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}.$$

ここで分母は y_1 と y_2 の Wronski の行列式．また y_1, y_2 は一次独立なので Wronski の行列式は 0 にならない．よって u_1', u_2' を求めることができ，これより u_1, u_2．ひいては $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ を求めることができる．

例題 7.2 $L(y) = y'' + y = \sec x$ を求めてみよう．

解 補助方程式 $L(y)=0$ の特性方程式は $m^2+1=0$ より特性根 $m=\pm i$ を得る．よって余関数は

$$y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$$

で与えられる．次に特殊解 y_p を求める．定数変化法より

$$y_p = u_1\cos x + u_2\sin x$$

とおくと，

$$u_1' = \frac{-\sin x\sec x}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}},\ u_2' = \frac{\cos x\sec x}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}.$$

よって

$$u_1' = -\sin x\frac{1}{\cos x} = -\tan x,\ u_2' = \cos x\frac{1}{\cos x} = 1$$

となる．積分すると

$$u_1 = \log|\cos x|,\ u_2 = x\ (\text{定数無視})$$

となるので，これより一般解

$$y = y_c + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x + (\log|\cos x|)\cos x + x\sin x$$

を得る． ■

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

の余関数が

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

のとき，定数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を変数 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ で置き換えると特殊解

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_ny_n$$

を得ます．ただし $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ は連立方程式

$$\begin{cases} u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n & = 0\\ u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' & = 0\\ \vdots & \vdots\\ u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)} & = f(x)\end{cases}$$

を満たす.

問 7.1 $y''' - y' = \frac{1}{1+e^x}$ を解きなさい.