

## 4.1 ベルヌーイ・リカッチ方程式

ベルヌーイ

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

で表される微分方程式を Bernoulli の方程式 (Bernoulli's equation) という。この方程式の両辺に  $y^{-\alpha}$  をかけると

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{(1-\alpha)} = Q(x).$$

ここで

$$u = y^{(1-\alpha)}$$

を用いて変換を行なうと,  $u = y^{(1-\alpha)}, u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$  より

$$\frac{1}{(1-\alpha)}u' + P(x)u = Q(x)$$

を得る。標準形になおすと

$$u' + (1-\alpha)P(x)u = (1-\alpha)Q(x).$$

これは  $u$  について線形なので前節で学んだ方法で解くことができる。

問 4.1  $y' + \frac{1}{x}y = -x^3y^2$  を解きなさい。

Hint: 右辺の  $y^2$  を消去するように, 両辺に  $y^{-2}$  をかけると,

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = -x^3.$$

ここで,  $u = y^{-1}$  とおくと,  $u' = -y^{-2}y'$  となる。

ベルヌーイの一般形

Bernoulli の方程式を解くときにあらわれた  $y^{-\alpha}y' + P(x)y^{(1-\alpha)} = Q(x)$  の形からもっと一般的な場合を考  
えることができる。

$$\frac{df(y)}{dy} \frac{dy}{dx} + P(x)f(y) = Q(x)$$

において  $u = f(y)$  とおくと,  $\frac{du}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \frac{dy}{dx}$  より

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x)$$

を得る。

問 4.2  $\cos y \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \sin y = 1$  を解きなさい。

Hint:  $f(y) = \sin y$  とすると, この微分方程式はベルヌーイの一般形となる。そこで,  $u = \sin y$  とおくと,

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(\sin y)}{dx} = \frac{d(\sin y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}.$$

したがって, 与式は

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = 1.$$

これは1階線形微分方程式より、解くことができる。

リカッチ

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

の形をした微分方程式を Riccati の方程式 (Riccati's equation) という。この微分方程式のひとつの解  $f(x)$  がわかった場合

$$y = f(x) + \frac{1}{u}$$

とおくと、 $y' = f'(x) - \frac{u'}{u^2}$ 。これより

$$f'(x) - \frac{u'}{u^2} = A(x)\left(f(x) + \frac{1}{u}\right)^2 + B(x)\left(f(x) + \frac{1}{u}\right) + C(x).$$

両辺に  $u^2$  をかけると

$$f'(x)u^2 - u' = A(x)(f(x)u + 1)^2 + B(x)(f(x)u^2 + u) + C(x)u^2.$$

これを整理すると  $u$  に関する線形微分方程式を得る。

注意：リカッチの微分方程式を解くには、一つの特解を見つけなくてはならない。

問 4.3  $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x$  の解  $f(x) = 1$  が与えられているとき、方程式を解きなさい。

Hint:  $y = 1 + \frac{1}{u}$  とおくと、 $y' = -\frac{u'}{u^2}$ 。よって、与式は

$$-\frac{u'}{u^2} = (1-x)\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 + (2x-1)\left(1 + \frac{1}{u}\right) - x.$$

両辺に  $u^2$  をかけると

$$-u' = (1-x)(u+1)^2 + (2x-1)(u^2+u) - xu^2.$$

整理すると

$$u' + u = 1 - x.$$

#### 4.1.1 演習問題

1. 次の微分方程式を解け。

(a)  $xy' - y = -y^2$                       (b)  $xy' + y = y^2 \log x$

(c)  $y' - y \cos x + y^2 \cos x = 0$

2. 次の微分方程式を解け。

(a)  $yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0$     (b)  $(y+1)y' + x(y^2 + 2y) = x$

3. 次の微分方程式を解け。

(a)  $x^2y' = -x^2y^2 - 4xy - 2$ , ただし  $f(x) = -2/x$  は解

(b)  $xy' = y - xy^2 + x^3$