12.1　Frobenius 法 (確定特異点の場合)

通常点でない点は**特異点 (singular point)** という．$x = a$ が特異点のとき，

$$(x-a)P(x),\ (x-a)^2Q(x)$$

が $x = a$ でともに解析的であるとき，$x = a$ は**確定特異点 (regular singular point)** といい，それ以外は**不確定特異点 (irregular singular point)** という．

例題 12.1 次の微分方程式の特異点を見つけ，分類せよ．

$$(x-1)^2x^2(x-2)y'' + 5x^2y' - (x-2)y = 0.$$

解

$$P(x) = \frac{5x^2}{(x-1)^2x^2(x-2)},\ Q(x) = \frac{-(x-2)}{(x-1)^2x^2(x-2)}$$

より $x = 1, 0, 2$ は特異点．次に

$$(x-1)P(x) = \frac{5x^2}{(x-1)x^2(x-2)}$$

より $x = 1$ は不確定特異点．他の 2 つの特異点は確定特異点．■

2 階線形微分方程式の 1 つの解

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

において $x = a$ が確定特異点であるとき，$x = a$ のまわりで

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^{n+r},\ c_0 \neq 0$$

の形で表わされる解が存在する．

この級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^{n+r}$ は **Frobenius 級数 (Frobinius series)** とよばれ，この級数を解として c_n を求める方法を Frobenius 法という．

例題 12.2 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの級数解を求めよ．

$$L(y) = 2xy'' + 3y' - y = 0$$

解

$$P(x) = \frac{3}{2x},\ Q(x) = -\frac{1}{2x}$$

より $x = 0$ は確定特異点．よって解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+r}$，$c_0 \neq 0$ とおく．これを微分することにより得られる

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

を元の式に代入すると

$$L(y) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} = 0$$

となる．ここで x のベキを必ず一番小さいものにそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_nx^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n+r-1} = 0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものにそろえると

$$\underbrace{r(2r-1)c_0x^{r-1}}_{n=0}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(2n+2r+1)c_n-c_{n-1}]x^{n+r-1}=0$$

となる．ここで $n=0$ のときでてきた方程式 $r(2r+1)=0$ を**決定方程式 (indicial equation)** という．この方程式を解くと $r=0,\ \frac{1}{2}$. これより 2 つの一次独立な級数解

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ y_2(x)=|x|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

を得る．また x^{n+r-1} の係数を 0 とおくと漸化式

$$c_n=\frac{c_{n-1}}{(n+r)(2n+2r+1)},\ n\geq 1$$

を得る．ここで $r=0$ とおくと

$$c_n=\frac{c_{n-1}}{n(2n+1)}\ \text{より}\ c_n=\frac{2^nc_0}{(2n+1)!}$$

となるので,

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nc_0}{(2n+1)!}x^n.$$

また $r=\frac{1}{2}$ とおくと

$$c_n=\frac{c_{n-1}}{n(2n-1)}\ \text{より}\ c_n=\frac{2^nc_0}{(2n-1)!}$$

となるので,

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}|x|^{-\frac{1}{2}}\frac{2^nc_0}{(2n-1)!}x^n.\ \blacksquare$$

例題 12.3 次の微分方程式の $x=0$ のまわりでの級数解をひとつ求めよ．

$$L(y)=4x^2y''+(3x+1)y=0.$$

解 $Q(x)=\frac{3x+1}{4x^2}$ より $x=0$ は確定特異点．そこで $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ とおくと，

$$L(\sum c_nx^{n+r})=\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}3c_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

となる．ここでベキを一番小さな x^{n+r} でそろえると，

$$\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+r)(n+r-1)+1]c_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}3c_{n-1}x^{n+r}=0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものでそろえると

$$\underbrace{(4r(r-1)+1)c_0x^r}_{n=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\{[4(n+r)(n+r-1)+1]c_n+3c_{n-1}\}x^{n+r}=0$$

を得る．決定方程式は $4r^2-4r+1=0$ となるので，$r=\frac{1}{2}$. また漸化式

$$c_n=\frac{-3c_{n-1}}{4(n+r)(n+r-1)+1}\ \text{より}\ c_n=\frac{-3c_{n-1}}{4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})+1}=\frac{-3c_{n-1}}{4n^2}.$$

よって，ひとつの解は

$$y_1(x) = |x|^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\ \text{ただし } c_n = \frac{-3c_{n-1}}{4n^2},\ n \geq 1.\ \blacksquare$$

決定方程式の解が重解の場合

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

において $x = 0$ が確定特異点で，決定方程式の解 r が重解のとき，1 次独立な 2 つの解 y_1, y_2 は次の形で与えられる．

$$y_1 = |x|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ (c_n \neq 0),$$

$$y_2 = y_1 \log|x| + |x|^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

例題 12.4 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの級数解を求めよ．

$$L(y) = 4x^2y'' + (3x+1)y = 0$$

解上の例題で y_1 はすでに求めたので，y_2 を求める．定理より，$y_2 = y_1 \log|x| + |x|^{3/2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ の形をした解を探す．計算の都合上 $x > 0$, $c_0 = 1$ とおく．$L(y) = 0$ に y_2 を代入すると

$$\begin{aligned}
L(y_2) &= 4x^2(y_1'' \log x + \frac{2y'}{x} - \frac{y_1}{x^2}) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+\frac{3}{2})(n+\frac{1}{2})C_n x^{n+3/2} + (3x+1)y_1 \log x + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^{n+5/2} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+3/2} \\
&= \log x L(y_1) + 8xy' - 4y_1 + 3C_0x^{3/2} + C_0x^{3/2} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}[4(n+\frac{3}{2})(n+\frac{1}{2})C_n + C_n + 3C_{n-1}]x^{n+3/2} = 0
\end{aligned}$$

となる．y_1 の最初の何項かを表わすと

$$y_1 = x^{1/2} - \frac{3}{4}x^{3/2} + \frac{9}{64}x^{5/2} - \frac{27}{(36)(64)}x^{7/2} + \cdots.$$

ここで $L(y_1) \equiv 0$ を用いると

$$(4C_0 - 6)x^{3/2} + (16C_1 + 3C_0 + \frac{9}{4})x^{5/2} + (36C_2 + 3C_1 - \frac{9}{32})x^{7/2} + \cdots = 0$$

これより $C_0 = \frac{3}{2}, C_1 = -\frac{27}{64}, C_2 = \frac{11}{256}, \ldots.$ よって

$$y_2 = \log x(x^{1/2} - \frac{3}{4}x^{3/2} + \frac{9}{64}x^{5/2} - \frac{3}{256}x^{7/2} + \cdots) + \frac{3}{2}x^{3/2} - \frac{27}{64}x^{5/2} + \frac{11}{256}x^{7/2} + \cdots.\ \blacksquare$$

例題 12.5 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの級数解を求めよ．

$$L(y) = x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 3y = 0.$$

解 $P(x) = \frac{x^2-3x}{x^2}$, $Q(x) = \frac{3}{x^2}$ より $x=0$ は確定特異点．そこで $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ とおくと

$$L(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n x^{n+r} = 0.$$

ここでベキを x^{n+r} でそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1) - 3(n+r) + 3]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r} = 0.$$

これより

$$\underbrace{(r(r-1) - 3r + 3)c_0 x^r}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+r)(n+r-1) - 3(n+r) + 3]c_n + (n+r-1)c_{n-1}\}x^{n+r} = 0$$

を得る．ここで決定方程式 $r^2 - 4r + 3 = 0$ より $r = 1, 3$．よって 2 つの解

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1},\ y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+3}$$

を得る．また x^{n+r} の係数を 0 とおくことより，漸化式

$$c_n = \frac{-(n+r-1)c_{n-1}}{(n+r)(n+r-1) - 3(n+r) + 3}$$

を得る．$r = 1$ のとき c_n を求めると

$$c_n = \frac{-nc_{n-1}}{(n+1)n - 3(n+1) + 3} = \frac{-nc_{n-1}}{n^2 - 2n}$$

となる．また $r = 3$ のとき C_n を求めると

$$C_n = \frac{-(n+2)C_{n-1}}{(n+3)(n+2) - 3(n+3) + 3} = \frac{-(n+2)C_{n-1}}{n^2 + 2n}.$$

ところが c_n と C_n はよく見ると $c_{n+2} = C_n$．つまり $y_1 = y_2$．そこでもうひとつ一次独立な解を探さなければならない．そのために次のような定理がある．

決定方程式の解の差が正の整数

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

において $x = 0$ が確定特異点で，決定方程式の解 r_1, r_2 の差が正の整数のとき，1 次独立な 2 つの解 y_1, y_2 は次の形で与えられる．

$$y_1 = |x|^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\ (c_n \neq 0),$$

$$y_2 = cy_1 \log|x| + |x|^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\ (C_0 \neq 0).$$

この定理を用いると，もうひとつの解は $y_2 = cy_1 \log x + x\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ を $L(y) = 4x^2y'' + (3x+1)y = 0$ に代入することにより求めることができる．■