

11.1 級数による解法

整級数

無限級数 $\sum a_n(x)$ において, とくに $a_n(x) = a_n x^n$ のときを整級数 (power series) という. たとえば $e^x, \sin x, \cos x, \log(1+x)$ の Taylor 級数は整級数である.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

収束半径

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ において, D'Alembert の判定法を用いると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

ここで $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ ならば $\sum |a_n x^n|$ は収束し, $|x| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ ならば $\sum a_n x^n$ は発散するのでこの極限值

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

を収束半径 (radius of convergence) という.

問 11.1 $\sum \frac{n^n x^n}{n!}$ の収束半径を求めよ.

解析的

関数 $f(x)$ が正の収束半径をもつ整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ で表わされるとき, $f(x)$ は点 a で解析的 (analytic) であるという.

問 11.2 次の関数は点 0 で解析的か調べよ.

(1) $P(x) = \frac{1}{1-x}$ (2) $Q(x) = \frac{x}{1-x}$ (3) $R(x) = \frac{1-x}{x}$

通常点

2 階線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

において, $P(x), Q(x)$ および $R(x)$ が点 a で解析的なとき, 点 a を通常点 (ordinary point) という.

通常点での整級数解

定理 11.1 2 階線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

において, a が通常点ならば, 任意の定数 b_0, b_1 に対して, 初期条件

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1$$

を満たす整級数解 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ がただひとつ存在する.

例題 11.1 $y' + y = e^x$ の $x = 0$ のまわりでの級数解を求めよ .

解 $P(x) = 1, Q(x) = 1, R(x) = e^x$ より , $x = 0$ は通常点 . よって , 解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

とおくと ,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

となる . また , $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ より , これらを与えられた方程式に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を得る . これらを整理すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - \frac{1}{n!}) x^n = 0$$

となるので , ここで x のべきを一番小さな $n - 1$ になるようにそろえると ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n c_n + c_{n-1} - \frac{1}{(n-1)!}] x^{n-1} = 0.$$

右辺は恒等的に 0 なので , 項別微分を行なうと , x^{n-1} の係数はすべて 0 になる . よって漸化式

$$n c_n + c_{n-1} - \frac{1}{(n-1)!} = 0, \quad n \geq 1.$$

または

$$c_n = \frac{1}{n!} - \frac{c_{n-1}}{n}$$

を得る . ここで , c_0 は初期条件 $y(0)$ で決まるので , この場合は任意の定数と考えられる . よって , c_1, c_2, \dots を順次求めると

$$c_1 = 1 - c_0, \quad c_2 = \frac{c_0}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3!} - \frac{c_0}{3!}, \dots$$

これより ,

$$c_{2n} = \frac{c_0}{(2n)!}, \quad c_{2n+1} = \frac{1 - c_0}{(2n+1)!}.$$

これを $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に代入すると

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

となりこの方程式の解は次の初等関数で表わせる .

$$y = c_0 e^{-x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad \boxed{\text{終}}$$