

10.1 非同次連立線形微分方程式

$X' = AX + F$ の解法

$X' = AX$ の解 X_c は ΦC で与えられるので、定数変化法を用いて、非同次方程式の解 X_p を $\Phi(t)U(t)$ と置く。すると、

$$(\Phi U)' = \Phi' U + \Phi U'$$

が成り立つ。そこで $X = \Phi U$ を $X' = AX + F$ に代入すると、

$$\Phi' U + \Phi U' = A\Phi U + F$$

となる。ここで、 $\Phi' U = A\Phi U$ より、 $\Phi U' = F$ 。よって Cramer の公式より、 $U' = \frac{[\Phi:F]}{|\Phi|}$ となり、積分して、一般解

$$X = \Phi C + \Phi U$$

を得る。

例題 10.1 $X' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$ を解け。

解 $\det(A - \lambda E) = (\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$ より、固有値 $\lambda = 4, 1$ 。固有値 4 に対する固有ベクトルは $(A - 4I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ より、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。したがって $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$ は解である。また固有値 1 に対する固有ベクトルは $(A - E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より、 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。したがって、 $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$ も解である。これより基本行列

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{4t} & e^t \\ e^{4t} & -e^t \end{pmatrix}$$

を得る。一般解を求めるには連立方程式

$$\Phi U' = F$$

を解けばよい。つまり、

$$\begin{pmatrix} 2e^{4t} & e^t \\ e^{4t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

を解けばよいので、Cramer の公式を用いる。

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t} & e^t \\ 2e^{2t} & -e^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e^{4t} & e^t \\ e^{4t} & -e^t \end{vmatrix}} = \frac{-3e^{3t}}{-3e^{5t}} = e^{-2t} \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & 2e^{2t} \end{vmatrix}}{-3e^{5t}} = \frac{3e^{6t}}{-3e^{5t}} = -e^t$$

となるので、積分して、

$$u_1 = -\frac{1}{2}e^{-2t}, \quad u_2 = -e^t$$

を得る。したがって一般解は

$$\begin{aligned} X &= \Phi C + \Phi U = \begin{pmatrix} 2e^{4t} & e^t \\ e^{4t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{4t} & e^t \\ e^{4t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2c_1e^{4t} + c_2e^t - 2e^{2t} \\ c_1e^{4t} - c_2e^t + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられる。■

例題 10.2 $y'' + 4y' + 3y = t$ を連立微分方程式に変形してから解け .

解 $y'_1 = y_2$ とおくと , $y'_2 = y'' = -4y' - 3y + t$. よって

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -4y_2 - 3y_1 + t \end{cases}$$

ここで $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと ,

$$\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} .$$

と書き直せる .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

より固有値 $\lambda = -3, -1$ を得る .

固有値 $\lambda = -3$ に対する固有ベクトル \mathbf{C} を Gauss の消去法を用いて求める . $A + 3I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

より $c_2 = 3\alpha$ とおくと , $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. よって解 $\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t}$ を得る .

固有値 $\lambda = -1$ に対する固有ベクトル \mathbf{C} を Gauss の消去法を用いて求める . $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

より $c_2 = 3\beta$ とおくと , $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. よって解 $\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ を得る . これよ

り基本行列 Φ は

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

で与えられる .

次に , $\Phi \mathbf{U}' = \mathbf{F}$ より特殊解 \mathbf{U} を求める .

$$\begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

より Cramer の公式を用いると

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -e^{-t} \\ t & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{te^{-t}}{2e^{-4t}} = \frac{1}{2}te^{3t}, \quad u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} -e^{-3t} & 0 \\ -e^{-3t} & -e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{-te^{-3t}}{2e^{-4t}} = -\frac{1}{2}te^t.$$

これより

$$u_1 = \frac{1}{2} \int te^{3t} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} \right), \quad u_2 = -\frac{1}{2} \int te^t dt = -\frac{1}{2} (te^t - e^t).$$

よって一般解は

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \Phi \mathbf{C} + \Phi \mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} \right) \\ -\frac{1}{2} (te^t - e^t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられる .