

1.1 微分方程式

独立変数 x とその関数 $y(x)$ および導関数 $y', y'', \dots, y^{(n)}$ の間の関係式

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

を y に関する常微分方程式 (ordinary differential equation) という。常微分方程式の例をいくつかあげる。

$$(y' \equiv \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.)$$

$$(a) y' = x^2 \quad (b) y' = 2x + y \quad (c) xy'' + y = 0 \\ (d) (y')^2 = y \quad (e) y'' + xy' = 0 \quad (f) xy'' = \sin y - x^3$$

階数

微分方程式に含まれる導関数の最高階数を、その微分方程式の階数 (order) という。

線形

微分方程式が未知関数とその導関数についての一次式で表わせるとき、線形 (linear) であるという。 n 階の線形微分方程式は次の形で表せる。

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x),$$

解

微分方程式に代入したとき、方程式をある区間上で恒等的に満たすような関数を微分方程式の解 (solution) という。解を求めることを微分方程式を解く (solve) という。解はいつも $y = f(x)$ という式で与えられるわけではなく陰関数 $G(x, y) = 0$ の形で与えられることもある。

問 1.1 e^x, e^{x+c}, ce^x は $y' = y$ の解であることを示せ。また $e^{2x}, e^x + c$ ($c \neq 0$) は $y' = y$ の解ではないことを示せ。

問 1.2 $y_1 = x^5 + x^4$ と $y_2 = x^5$ は $y' = 4(y/x) + x^4$ の解であることを示せ。

一般解, 特殊解

微分方程式の解はひとつとは限らない。一般に n 階の微分方程式では、任意にその値をとることができる n 個の定数を含む解が存在する。この解をその方程式の一般解 (general solution) という。また一般解の任意定数にある特定の値を入れてできた解を特殊解 (particular solution) という。たとえば、 $y' = y$ の一般解は $y = ce^x$ で与えられ、 $x = 0, y = 1$ を代入して得られた $y = e^x$ は特殊解。

微分方程式 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ について、 x のある値 x_0 における y の $n-1$ 階までの導関数の値をあらかじめ指定する条件

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

を初期条件 (initial condition) という。またこの条件を満たす解を求める問題を初期値問題 (initial value problem) という。いい換えると初期条件を満たす解曲線を求める問題のことである。

1.2 変数分離形微分方程式

1 階の微分方程式は一般に

$$y' = f(x, y)$$

または微分を用いて

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

の形で表される．後の形の方程式を全微分方程式 (total differential equation) という．ここで

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad xdx + ydy = 0$$

を考えてみる．この2つの式は $x = 0$ の場合を除けば同じものとして扱える．一般に上の2つの形の微分方程式は，形式的に同じものとして扱う．

例題 1.1 $x^2 dx - dy = 0$ の一般解を求めよ．

解 与えられた微分方程式は $y' = x^2$ と書き直せる．よって両辺を x について積分して一般解

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

を得る． ■

例題 1.2 初期値問題 $y' = e^{x^2}, y(0) = 3$ を解け．

解 この場合，微分方程式 $y' = e^{x^2}$ を x について積分したのでは初期値問題は解けない．なぜならば e^{x^2} の原始関数は初等関数ではない．そこで不定積分の代わりに原始関数を用いる．

$$\int_0^x y'(t)dt = \int_0^x e^{t^2} dt$$

より

$$y(x) - y(0) = \int_0^x e^{t^2} dt.$$

よって $y(x) = 3 + \int_0^x e^{t^2} dt$. ■

$y' = f(x, y)$ が

$$y' = F(x)G(y)$$

の形で表わされるとき，微分方程式は変数分離形 (separable) であるという．このとき

$$y'(x) = F(x)G(y(x))$$

を満たす解 $y(x)$ を求める．左辺に y の関数，右辺に x の関数となるように書き直すと

$$\frac{y'(x)}{G(y(x))} = F(x).$$

この両辺を x について積分すると

$$\int \frac{y'(x)}{G(y(x))} dx = \int F(x) dx$$

となるので

$$\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x) dx.$$

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $(\sin x)y' + (\cos x)y = 0$ (b) $y' = e^{x+y}$

(c) $y' = \frac{1-y^2}{1-x^2}$ (d) $y' = (1+2x)(1+y^2)$

2. 次の初期値問題を解け．

(a) $(1+e^x)y' = y, y(0) = 1$ (b) $y' + y \sin x = 0, y(\pi) = 3$

(c) $xyy' - y^2 = 1, y(2) = 1$ (d) $y' = \frac{x(y^2-1)}{(x-1)y^3}, y(2) = 2$