ベクトル解析入門演習詳解

横田 壽

目 次

第1章　ベクトル

1.1　空間のベクトルI

演習問題 1.1

1. $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = -3\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $2\boldsymbol{A}$

(2) $3\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{A}$

(3) $|\boldsymbol{A}|$

(4) $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|$

2. $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{B} = -\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} +\,\boldsymbol{k}$ とするとき，次の値を求めよ．

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

(2) Angle between $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$

1.2　内積

演習問題 1.2

1. $\boldsymbol{A} = -\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} +\,\boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = 2\,\boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k}$ とするとき，次の質問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角

(2) $\boldsymbol{A}$ 方向への単位ベクトル．

2. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ と $\mathbf{B} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ とするとき，次の質問に答えよ．

(1) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の内積

(2) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角

1.3　外積

演習問題 1.3

1. $\boldsymbol{A} = {}^t[1\ 2\ 1], \boldsymbol{B} = {}^t[2\ \ -1\ \ -2]$ とするとき， $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよ.

2. $\boldsymbol{A} = 2\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

(2) $(2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B})$

3. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = 2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) **A** と **B** を 2 辺とする 4 角形の面積を求めよ..

(2) **A** と **B** に直交する零ベクトル以外のベクトルを求めよ.

1.4　内積・外積の応用

演習問題 1.4

1. $\boldsymbol{A} =: \boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = 2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{C} = -\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 4\,\boldsymbol{k}$ は共面ないことを示せ.

2. $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{C} = -|bfi + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ とするとき，$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ を求めよ.

3. $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ とする. $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|^2 = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2$ を示せ..

第2章　ベクトルの微分・積分

2.1　Space curve

演習問題 2.1

1.　$\boldsymbol{F}(t) = t\cos t\,\boldsymbol{i} + t\sin t\,\boldsymbol{j} + t^2\,\boldsymbol{k}$ とするとき，$\boldsymbol{F}(t)$ の軌跡を求めよ．

2.　$\boldsymbol{F}(t) = t^2\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + t^3\,\boldsymbol{k}$ とするとき，$\boldsymbol{F}'(t)$ を求めよ．

3.　$\boldsymbol{F} = 5t^2\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} - t^2\,\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{G} = \sin t\,\boldsymbol{i} - \cos t\,\boldsymbol{j}$ とするとき，以下を求めよ．

(1)　$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})'$

(2)　$(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})'$

4.　$\boldsymbol{F}(t), |\boldsymbol{F}(t)|$ が定数のとき，$\boldsymbol{F}(t)$ と $\boldsymbol{F}'(t)$ はすべての t で直交することを示せ．

5.　任意のベクトル関数 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$ に関して，$\int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}'\,dt = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}$ を証明せよ．

6.　$\int_2^3 \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{F}}{dt}\,dt$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{F}(2) = 2\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{F}(3) = 4\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}$

2.2　点の運動 (motion of objects)

演習問題 2.2

1. 2 点 $(-1,0,2),(1,4,3)$ を通る直線の方程式を求めよ.

2. 平面曲線 $\boldsymbol{r}(t)=\sin t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}$ を描け.

3. $t=\dfrac{\pi}{4}$ における $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}$ の接線の方程式を求めよ.

4. $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}$ の $0\le t\le 2\pi$ の部分の長さを求めてみましょう．.

5.

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos\pi t,\sin\pi t,t)$$

とする．$t=1$ のとき，$\mathbf{v}(t),\boldsymbol{A}(t),v,\mathbf{t},\boldsymbol{n}$ を求めよ.

6. $\boldsymbol{r}=2a(\sin^{-1}t+t\sqrt{1-t^2})\,\boldsymbol{i}+2at^2\,\boldsymbol{j}+4at\,\boldsymbol{k}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし， a は正の任意の定数とする.

(a) $t_1\le t\le t_2$ における弧の長さ

(b) 接線単位ベクトル $\mathbf{t}$

(c) 法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と曲率 κ

(d) 従法線ベクトル $\boldsymbol{B}$ とねじれ率 τ

7. 弧長 s をパラメターとして曲線 $\boldsymbol{r}(t)=5\cos t\boldsymbol{i}+5\sin t\,\boldsymbol{j}$ を表わせ.

8. 曲線 $y=f(x)$ の曲率を求めよ.

第3章　スカラー場・ベクトル場

3.1　勾配と方向微分係数

演習問題 3.1

1. 点 (x_0, y_0, z_0) を通る勾配は，点 (x_0, y_0, z_0) を通る等位面に直交することを示せ.

2. 点 $(1, 2, 3)$ で曲面 $z^2 = x^2 + 2y^2$ に直交する単位ベクトル (法線単位ベクトル) と $(1, 3, -1)$ 方向の方向微分係数と接平面の方程式を求めよ.

3. ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y) = -y\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j}$ の流線を求めよ.

4. 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$，ベクトル場を $\boldsymbol{F} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ とすると，このベクトル場は原点を除くどの領域でも保存場であり

$$f(x, y, z) = |\boldsymbol{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

は $\boldsymbol{F}$ のスカラーポテンシャルであることを示せ.

5. ベクトル場 $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$ とスカラー場 $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ について，次の式を証明せよ.

(1) $\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$

(2) $\nabla r^n = n r^{n-2} \boldsymbol{r}$

6. Let $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ r = |\boldsymbol{r}|$. Then find $\mathbf{A}, \mathbf{B}$..

(1) $\boldsymbol{A} = \nabla\left(2r^2 - 4\sqrt{r} + \frac{6}{3\sqrt{r}}\right)$

(2) $\boldsymbol{B} = \nabla(r^2 e^{-r})$

7. $\mathrm{P}(2, -2, 3)$ における $x^2 y + 2xz = 4$ の法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ を求めよ .

8. スカラー場 ϕ, ψ において

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\phi^2}$$

が成り立つことを示せ.

演習問題 3.2

1. スカラー場 $\phi = x^2z + e^{y/x}$, $\psi = 2z^2y - xy^2$ について，次のものを求めよ．

(1) $\nabla\phi$, $\nabla\psi$

(2) $\nabla(\phi\psi)$ の点 $\mathrm{P}(1, 0, -2)$ における値 $\nabla(\phi\psi)_P$

2. スカラー場 $\phi = 4xz^3 - 3x^2yz$ の点 $\mathrm{P}(2, -1, 2)$ における，単位ベクトル $\mathbf{u} = \frac{1}{7}(2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k})$ の方向への方向微分係数を求めよ．

3. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$ とする．次の $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を求めよ．

(1) $\boldsymbol{A} = \nabla\left(2r^2 - 4\sqrt{r} + \frac{6}{3\sqrt{r}}\right)$,　　(2) $\boldsymbol{B} = \nabla(r^2e^{-r})$

4. 曲面 $x^2y + 2xz = 4$ 上の点 $\mathrm{P}(2, -2, 3)$ における法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ を求めよ．

5. 任意のスカラー場 ϕ, ψ について次の式を証明せよ．

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\phi^2}$$

6. 2 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$, $\mathrm{Q}(\xi, \eta, \zeta)$ 間の距離を r とする．微分演算子

$$\nabla_P = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},\ \nabla_Q = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial \xi} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial \eta} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

について次の式を証明せよ．

(1) $\nabla_Q r = -\nabla_P r$　　(2) $\nabla_Q(\frac{1}{r}) = -\nabla_P(\frac{1}{r})$

3.2 線積分

演習問題 3.3

1. 力の場 $\mathbf{F} = 3xy\boldsymbol{i} - 5\mathbf{z} + 10x\boldsymbol{k}$ の中で質点が曲線

$$C : x = t^2 + 1,\ y = 2t^2,\ z = t^3$$

に沿って $t = 1$ から $t = 2$ まで運動する間に力 $\mathbf{F}$ がする仕事量 $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

2. スカラー場 $\phi = 2xyz^2$，ベクトル場 $\mathbf{F} = xy\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ がある．媒介変数表示 $x = t^2, y = 2t, z = t^3$ $(0 \leq t \leq 1)$ で表される曲線を C とする．次の線積分を求めよ.

(1) $\int_C \phi d\boldsymbol{r}$ (2) $\int_C \mathbf{F} \times d\boldsymbol{r}$

3. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．任意の閉曲線 C について $\int_C \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ であることを証明せよ.

4. 力の場 $\mathbf{F}$ がポテンシャル U をもつとする．この力の場内で質量 m の質点が運動して，点 A から点 B まで移動したとき，次の式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(B)$$

ここで，v_A, v_B はそれぞれ点 A,B におけるこの質点の速度ベクトルの大きさである.

5. 全空間から z 軸を除外した領域 D で $\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ は定義されている．xy 平面上で原点 O を中心とし，半径 a の円を C とする．次の等式を証明せよ.

$$\int_C (\nabla\phi) \cdot d\boldsymbol{r} = 2\pi$$

3.3　面積分 (surface integrals)

演習問題 3.4

1. 平面 $2x+2y+z=2$ と x 軸，y 軸, z 軸の交点をそれぞれ A,B,C とする．△ABC を曲面 S とする．次の面積分を求めよ．

(1) $\int_S f dS,\ f = x^2+2y+z-1$

(2) $\int_S \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{n}dS,\ \mathbf{A} = x^2\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$

2. xy 平面上の領域 $x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq a^2$ を曲面 S とする．次の面積分を求めよ．

$$\int_S \mathbf{A}\times\boldsymbol{n}dS,\ \mathbf{A} = x\boldsymbol{i}+(x-y)\boldsymbol{j}+(\log xy)\boldsymbol{k}$$

3. 次の面積分を求めよ．

$$\iint_S (3x\mathbf{i}+4z\mathbf{j}+2y\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}dS, S: y^2+z^2=4, 0\leq x\leq 3, y\geq 0, z\geq 0, (\mathbf{n}\text{ の } z \text{ 成分は正}$$

4 次の面積分を求めよ．

$$\iint_S (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-2z\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}dS, S: x^2+y^2=a^2, 0\leq z\leq 1$$

3.4 発散

演習問題 3.5

基本公式 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると，
(1) $\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$
(2) $\nabla r^n = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$
(3) $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

1. 次のものを求めよ．

(1) $\nabla\cdot(2x^2z\boldsymbol{i} - xy^2z\boldsymbol{j} + 3yz^2\boldsymbol{k})$ (2) $\nabla^2(3x^2z - y^2z^3 + 4x^2y)$

(3) $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}),\ \boldsymbol{F} = (3x^2y - z)\boldsymbol{i} + (xz^3 + y^4)\boldsymbol{j} - 2x^2z^2\boldsymbol{k}$

2. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ r = |\boldsymbol{r}|$ とする．次のスカラーを求めよ．

(1) $\nabla\cdot(r\nabla r^{-3})$ (2)$\nabla^2\left\{\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right)\right\}$

3. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ \mathbf{w}$ を定ベクトルとする．

$$\nabla\cdot(\mathbf{w}\times\boldsymbol{r}) = 0$$

を証明せよ．

4. スカラー場 ϕ, ψ について次の式を証明せよ．

(1) $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi$

(2) $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \phi\nabla^2\psi$

(3) $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi$

5. $\nabla\phi = 2xyz^3\boldsymbol{i} + x^2z^3\boldsymbol{j} + 3x^2yz^2\boldsymbol{k}$ を満足する $\phi = \phi(x,y,z)$ を求めよ．ただし，$\phi(1,-2,2) = 4$ とする．

6. スカラー場 U, V について次の式を証明せよ．

$$\nabla\cdot\{(\nabla U)\times(\nabla V)\} = 0$$

7. 曲線 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ とスカラー場 $\phi = \phi(x,y,z)$ について，この曲線に沿っての ϕ の微分係数 $\frac{d\phi(x(t),y(t),z(t))}{dt}$ は $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\nabla\phi$ に等しい．このことを証明せよ．

8. 関数 $\phi(x,y,z,t)$ に $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ を代入して得られる t の関数 $\phi(t)$ の導関数は $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\nabla\phi$ であることを証明せよ．ただし，$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

3.5　回転

演習問題 3.6

1. ベクトル場 $\boldsymbol{A} = 2xz^2\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + 3xz^3\boldsymbol{k}, \phi = x^2yz$ とする．次のものをもとめよ．

(1) $\nabla \times \boldsymbol{A}$

(2) $\nabla \times (\phi\boldsymbol{A})$

(3) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

2.

$\mathbf{V} = (x + 2y + az)\boldsymbol{i} + (bx - 3y - z)\boldsymbol{j} + (4x + cy + 2z)\boldsymbol{k}$ が $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ を満足するように a, b, c を定めよ．

3. $\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$, $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ であれば，$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$ であることを証明せよ．

4. $\boldsymbol{C}$ を定ベクトルとする．任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について次の式を証明せよ．

(1) $\nabla(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{C} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(2) $\nabla \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{C} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(3) $\nabla \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{C} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$

5. 任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について次の式を証明せよ．

$$(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{A}|^2 - \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

6. ρ と p をスカラー場とする．$\rho\boldsymbol{F} = \nabla p$ であれば，$\boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$ であることを証明せよ．

第4章　積分公式

4.1　ガウスの発散定理

演習問題 4.1

1. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, r = |\boldsymbol{r}|$ とする．任意の領域 V とその境界面 S について次の等式を証明せよ．

(1) $\int_V \frac{1}{r^2}\, dV = \int_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}\, dS$

(2) $\int_S \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}\, dS = 0$

(3) $\int_S r^n \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = (n+3) \int_V r^n\, dV$

(4) $\int_S r^n \boldsymbol{n}\, dS = n \int_V \mathbf{r} r^{n-2}\, dV$

(5) $\int_S r^n \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}\, dS = 0$

(6) $\int_V r\, dV = \frac{1}{2} \int_S r^2 \boldsymbol{n}\, dS$

(7) $\int_S F(r)\boldsymbol{n}\, dS = \int_V \frac{dF}{dr} \frac{\boldsymbol{r}}{r}\, dV$

2. スカラー場 ϕ 内の任意の領域 V の境界面 S について次の等式を証明せよ．

$$\int_S \boldsymbol{n} \times (\nabla\phi)\, dS = \mathbf{0}$$

3. ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を満足しているとする．このベクトル場内にある曲面 S の境界線になっている閉曲線 C をとる．このとき，面積分 $\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ は C を境界線にもつどんな曲面 S についても常に同一の値をもち，その値は閉曲線 C によって定まる．以上のことを証明せよ．この Φ を閉曲線 C を貫く**流速**という．

4. スカラー場 ϕ とベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の共通の定義域内にある，任意の領域 V とその境界面 S について次の等式を証明せよ．

(1) $\int_V \boldsymbol{A} \cdot \nabla\phi\, dV = \int_S \phi \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS - \int_V \phi \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dV$

(2) $\int_V \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})\, dV = \int_S (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_V \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dV$

(3) $\int_V (\nabla\phi) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dV = -\int_S ((\nabla\phi) \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$

(4) $\boldsymbol{A} = \nabla\phi, \nabla^2\phi = 0$ ならば，$\int_V |\boldsymbol{A}|^2\, dV = \int_S \phi \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$

5. スカラー場 ϕ, ψ の共通の定義域内にある，任意の領域 V とその境界面 S について次の等式を証明せよ．

(1) $\int_S \psi \frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS = \int_V \{\psi \nabla^2\phi + (\nabla\psi) \cdot (\nabla\phi)\}\, dV$

(2) $\int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS = \int_V \{\phi \nabla^2 \phi + |\nabla \phi|^2\}\, dV$

(3) $\int_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right)\, dS = \int_V \{\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi\}\, dV$ グリーンの公式

(4) ϕ が調和関数であれば

$$\int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS = \int_V |\nabla \phi|^2\, dV$$

(5) ϕ, ψ が調和関数であれば

$$\int_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right)\, dS = 0$$

(6) S 上で $\phi = 0$ (または，$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$) ならば，調和関数 ϕ は V 内で 0 (または，定数) である．

6. ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は全空間で定義されているとする．任意の領域の境界面 S について $\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$ ならば，$\boldsymbol{A}$ はベクトル・ポテンシャルをもつ．以上のことを証明せよ．

7. ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は全空間で定義されているとする．任意の領域の境界面 S について $\int_S \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{n} dS = 0$ ならば，$\boldsymbol{A}$ はスカラー・ポテンシャルをもつ．以上のことを証明せよ

4.2 ストークスの定理

Stokes の定理

演習問題 4.2

1. スカラー場 ϕ, ψ の共通な定義域内にある任意の曲面 S の境界線 C について次の式を証明せよ．

$$\int_C \phi(\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \psi(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r}$$

2. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ r = |\boldsymbol{r}|$ とし，ϕ をスカラー場とする．任意の曲面 S とその境界線 C について次の式を証明せよ．

(1) $\int_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = 2\int_S \boldsymbol{n}dS$

(2) $\int_C r^k\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$

(3) $\int_C \boldsymbol{r}(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\phi)\times\boldsymbol{n}dS$

3. スカラー場 ϕ とベクトル場 $\mathbf{A}$ の共通な定義域内にある任意の曲面 S の境界線 C について次の式を証明せよ．

$$\int_S \phi(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_C \phi\mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{r} - \int_S \{(\nabla\phi)\times\mathbf{A}\}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

4. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ r = |\boldsymbol{r}|$ とし，ϕ をスカラー場とする．任意の曲面 S とその境界線 C について次の式を証明せよ．

$$\int_C \frac{\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}}{r^3} = -\int_S \boldsymbol{n}\cdot\nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)dS = \int_S \left(\frac{3|bfr\cdot\boldsymbol{n}}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{n}}{r^3}\right)dS$$

5. ベクトル場 $\mathbf{A}$ は全空間で定義されているとする．任意の曲面の境界線 C について

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

ならば，$\mathbf{A}$ はスカラー・ポテンシャルをもつ．以上のことを証明せよ．

第 5 章　演習問題詳解

演習問題詳解 1.1 1.

1.1 (1) $2\boldsymbol{A} = 2(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}) = -2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$. (2) $3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A} = 3(-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})-2(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k} = 2\,\boldsymbol{i}-13\,\boldsymbol{j}$. (3) $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$. (4)

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |-\boldsymbol{i}+2\,\boldsymbol{j}+3\,\boldsymbol{k}-3\,\boldsymbol{j}+2\,\boldsymbol{k}| \\ &= |-\boldsymbol{i}-\ \boldsymbol{j}+5\,\boldsymbol{k}| = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

1.2 (1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i}+2\,\boldsymbol{j}+3\,\boldsymbol{k}-\ \boldsymbol{i}+2\,\boldsymbol{j}+\ \boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ (2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = \sqrt{1+4+9}\sqrt{4+16+16}\cos\theta \\ &= 6\sqrt{14}\cos\theta \end{aligned}$$

Note that $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = -2+8+12 = 18$. よって,

$$\cos\theta = \frac{18}{6\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

したがって, $\theta = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{14}}$.

演習問題詳解 1.2

(1)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = \sqrt{1+9+1}\sqrt{4+16+4}\cos\theta \\ &= \sqrt{11}\sqrt{24}\cos\theta \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = -2+12-2 = 8$ に注意すると,

$$\cos\theta = \frac{8}{\sqrt{11}\sqrt{24}} = \frac{4}{\sqrt{66}}$$

したがって, $\theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{66}}$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 方向の単位ベクトル $\mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u} = \frac{-\boldsymbol{i}+3\,\boldsymbol{j}+\ \boldsymbol{k}}{\sqrt{1+9+1}} = \frac{-\boldsymbol{i}+3\,\boldsymbol{j}+\ \boldsymbol{k}}{\sqrt{11}}$$

演習問題詳解 1.3

1.3 1.

$$\begin{aligned} {}^t[1\ 2\ 1]\times{}^t[2\ \ -1\ \ -2] &= \begin{Vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{Vmatrix} \\ &= -3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k} \end{aligned}$$

2. (1)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

(2)

$$\begin{aligned} (2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + 2|bfB) &= (\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -18 & 4 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 70\mathbf{i} + 21\mathbf{j} + 77\mathbf{k} \end{aligned}$$

(1) 四辺形の面積は

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = |-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$$

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + -5\boldsymbol{k} = {}^t[-3\ 4\ -5]$

演習問題詳解 1.4 1. $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$ Thus they are not coplanar.

2.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2-1)\mathbf{i} - (4+1)\mathbf{j} + (2-1)\mathbf{k} \\ &= -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

Then

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -12$$

3. Note that $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Let $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Then

$$\mathbf{C} = (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\mathbf{j} + (A_1B_20A_2B_1)\mathbf{k}$$

Thus,

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 &= (A_2B_3 - A_3B_2)^2 + (A_1B_3 - A_3B_1)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2 \\ &= A_2^2B_3^2 + A_3^2B_2^2 + A_1^2B_3^2 + A_3^2B_1^2 + A_1^2B_2^2 + A_2^2B_1^2 - (2A_2A_3B_2B_3 + 2A_1A_3B_1B_3 + 2A_1A_2B_1B_2) \\ &= (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) - (A_1^2B_1^2 + A_2^2B_2^2 + A_3^2B_3^2 + 2A_2A_3B_2B_3 + 2A_1A_3B_1B_3 + 2A_1A_2B_1B_2) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \end{aligned}$$

演習問題詳解 2.1 1. $\boldsymbol{F}(t)$ の成分は $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t^2$. よって，$z = x^2 + y^2$ でその軌跡 $\boldsymbol{F}(t)$, $(x(t), y(t), z(t))$ は放物面 $z = x^2 + y^2$ である.
2. それぞれの成分を微分することにより

$$\boldsymbol{F}'(t) = 2t\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3t^2\,\boldsymbol{k}$$

3. $F' = (5t^2)'\,\boldsymbol{i} + (t)'\,\boldsymbol{j} + -(t^2)'\,\boldsymbol{k} = 10t\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\,\boldsymbol{k},\ G' = (\sin t)'\,\boldsymbol{i} - (\cos t)'\,\boldsymbol{j} = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j}$.
(1)

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})' &= \boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}' \\
&= (10t\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\,\boldsymbol{k})\cdot(\sin t\,\boldsymbol{i} - \cos t\,\boldsymbol{j}) + (5t^2\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} - t^2\,\boldsymbol{k})\cdot(\cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j}) \\
&= (5t^2 - 1)\cos t + 11\sin t
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})' &= \boldsymbol{F}'\times\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}' \\
&= (10t\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\,\boldsymbol{k})\times(\sin t\,\boldsymbol{i} - \cos t\,\boldsymbol{j}) + (5t^2\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} - t^2\,\boldsymbol{k})\times(\cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j}) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 10t & 1 & -2t \\ \sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5t^2 & t & -t^2 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} \\
&= (t^2\sin t - 2t\cos t)\,\boldsymbol{i} - (t^2\cos t + 2t\sin t)\,\boldsymbol{j} + (5t^2\sin t - \sin t - 11t\cos t)\,\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

4. $|\boldsymbol{F}(t)| = c$ とすると，$|\boldsymbol{F}(t)|^2 = \boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{F}(t) = c^2$. よって，ベクトル関数の導関数より

$$(\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{F}(t))' = 2\boldsymbol{F}'(t)\cdot\boldsymbol{F}(t) = 0$$

これより内積は 0， $\boldsymbol{F}(t)$ と $\boldsymbol{F}'(t)$ は直交
5. $\int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}'\,dt = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F} - \int \boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{F}\,dt$. したがって，$\int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}'\,dt = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}$.
6. $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F})' = 2\boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{F}$ とすると，

$$\int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F'}dt = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}dt = \frac{1}{2}|\boldsymbol{F}|^2$$

よって，

$$\int_2^3 \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F'}dt = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}\,|_2^3 = \frac{1}{2}(16 + 4 + 9 - (4 + 1 + 4)) = \frac{20}{2} = 10$$

演習問題詳解 2.2 1. 点 $(-1, 0, 2)$ を通り方向が ${}^t[1, 4, 3] - {}^t[-1, 0, 2] = {}^t[2, 4, 1]$ の直線を求める. 直線上の任意の点を (x, y, z) とすると

$$(x, y, z) = (-1, 0, 2) + (2, 4, 1)t, \quad t \in R$$

この式を t について解くと

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{1}$$

3. 求める直線は始点を $(-1,0,2)$ にもち，方向が ${}^t[1,4,3]-{}^t[-1,0,2]={}^t[2,4,1]$ と考えられるので，直線上の任意の点を (x,y,z) とすると，

$$(x,y,z)=(-1,0,2)+(2,4,1)t,\quad t\in R$$

またはこの式を t について解くと

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{1}$$

が得られます．

4. $x=\cos t, y=\sin t, z=t$ より， $x^2+y^2=1$ となり， $\boldsymbol{r}(t)$ は半径 1 の円柱の回りをらせん状に回転する滑らかな曲線だということが分かります．そこで

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-\sin t\,\boldsymbol{i}+\cos t\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

より

$$|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

よって

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=2\sqrt{2}\pi$$

となります．

5.

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos\pi t,\sin\pi t,t)$$

$$\mathbf{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)=(-\pi\sin\pi t,\pi\cos\pi t,1)$$

$$\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{r}''(t)=(-\pi^2\cos\pi t,-\pi^2\sin\pi t,0)$$

より $t=1$ のとき

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(1)&=(0,\pi,1)\\ \boldsymbol{A}(1)&=(\pi^2,0,0)\end{aligned}$$

となるので

$$v=|\mathbf{v}(1)|=\sqrt{\pi^2+1}$$

$$\mathbf{t}=\frac{\mathbf{v}(1)}{|\mathbf{v}(1)|}=\frac{(0,\pi,1)}{\sqrt{\pi^2+1}}$$

ここで $\boldsymbol{n}$ を求めるには色々な方法があります．ここでは計算が簡単な方法を考えます．

$$\boldsymbol{A}=a_{\mathbf{t}}+a_{\boldsymbol{n}},a_{\mathbf{t}}=(\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{t})\mathbf{t}=0$$

より

$$a_{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_{\mathbf{t}}=(\pi^2,0,0)$$

したがって，

$$\boldsymbol{n}=\frac{a_{\boldsymbol{n}}}{|a_{\boldsymbol{n}}|}=(1,0,0).$$

他にも

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\pi^2 \sin^2 \pi t + \pi^2 \cos^2 \pi t + 1} = \sqrt{\pi^2 + 1} \text{より}$$

$$a_{\mathbf{t}} = \frac{dv}{dt} = 0$$

よって $\boldsymbol{n} = \dfrac{a_{\boldsymbol{n}}}{|a_{\boldsymbol{n}}|} = (1, 0, 0)$ と求めることができます.

(a) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 4a\sqrt{1-t^2}\,\boldsymbol{i} + 4at\,\boldsymbol{j} + 4a\,\boldsymbol{k}$ より

$$|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}| = \sqrt{16a^2(1-t^2) + 16a^2t^2 + 16a^2} = \sqrt{32a^2} = 4\sqrt{2}a$$

よって,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}| dt = 4\sqrt{2}a(t_2 - t_1)$$

(b)

$$\mathbf{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}/dt}{ds/dt} = \frac{4a\sqrt{1-t^2}\,\boldsymbol{i} + 4at\,\boldsymbol{j} + 4a\,\boldsymbol{k}}{4\sqrt{2}a}$$

(c) $\dfrac{d\mathbf{t}}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}), \dfrac{ds}{dt} = 4\sqrt{2}a$ より

$$\kappa = |\frac{d\mathbf{t}}{ds}| = |\frac{d\mathbf{t}/dt}{ds/dt}| = \frac{1}{8a}\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2} + 1} = \frac{1}{8a\sqrt{1-t^2}}$$

また, $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ より

$$\boldsymbol{n} = -t\,\boldsymbol{i} + \sqrt{1-t^2}\,\boldsymbol{j}$$

(d)

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{t} \times \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \sqrt{1-t^2} & t & 1 \\ -t & \sqrt{1-t^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{1-t^2}\,\boldsymbol{i} - t\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

また,

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{B}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{8a}(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) = -\tau\boldsymbol{n}$$

より $\tau = \dfrac{1}{8a\sqrt{1-t^2}}$

8. まず, $|\dfrac{d\phi}{ds}|$ を求めてみましょう. $\tan\phi$ は接線の傾きなので, $\tan\phi = y'(x)$ となります. よって

$$\phi = \tan^{-1}(y')$$

これを x について微分すると

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{1+(y')^2} \cdot \frac{d}{dx}(y') = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

ここで,

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{d\phi}{ds}\sqrt{1+(y')^2}$$

に注意すると

$$\frac{d\phi}{ds}\sqrt{1+(y')^2}=\frac{y''}{1+(y')^2}$$

よって

$$\kappa=|\frac{d\phi}{ds}|=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

となります.

演習問題詳解 3.1

1. 点 (x_0,y_0,z_0) を通る等位面を

$$f(x,y,z)=c$$

とし，この等位面上で点 (x_0,y_0,z_0) を通る任意の曲線を

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\,\boldsymbol{i}+y(t)\,\boldsymbol{j}+z(t)\,\boldsymbol{k}$$

とすると， $f(\boldsymbol{r}(t))=f(x(t),y(t),z(t))=c$ が成り立つので，この両辺を t について微分すると，

$$f_xx_t+f_yy_t+f_zz_t=(f_x,f_y,f_z)\cdot(x_t,y_t,z_t)=\nabla f\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$$

よって，すべての等位面上の曲線の接線に直交するので，勾配は等位面に直交します.

2.

$$f(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2\text{とおくと，}$$

等位面 $f(x,y,z)=0$ はもとの曲面と同じ．また，法線ベクトルは ∇f で与えられるので，

$$\nabla f=(2x,4y,-2z),\nabla f\,|_{(1,2,3)}=(2,8,-6)$$

よって

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{(2,8,-6)}{\sqrt{4+64+36}}=\frac{(2,8,-6)}{\sqrt{104}}$$

次に点 $(1,2,3)$ での $(1,3,-1)$ 方向の方向微分係数を求めるため方向単位ベクトルを求めると $\mathbf{u}=\dfrac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}}$．よって方向微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\nabla f\cdot\mathbf{u}=(2,8,-6)\cdot\frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}}=\frac{32}{\sqrt{11}}$$

また，接平面の方程式は

$$2(x-1)+8(y-2)-6(z-3)=0\text{ すなわち }2x+8y-6z=0$$

となります.

3. $f(x,y)=c$ を流線の方程式とすると $\nabla f(x,y)=f_x\,\boldsymbol{i}+f_y\,\boldsymbol{j}$ は $f(x,y)=c$ の法線ベクトルを表わすので，

$$\nabla f(x,y)\cdot\boldsymbol{F}(x,y)=0\text{ よって }(f_x\,\boldsymbol{i}+f_y\,\boldsymbol{j})\cdot(-y\,\boldsymbol{i}+x\,\boldsymbol{j})=0$$

これより， $-yf_x + xf_y = 0$．ここで $f(x,y) = c$ の接線の傾きは

$$f_x dx + f_y dy = 0 \text{ より } \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

に注意すると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x}{y}$$

より $xdx + ydy = 0$．これより $f_x = x, f_y = y$ となるので，

$$f(x,y) = \int f_x dx = \frac{x^2}{2} + c(y) \tag{5.1}$$

次に式 5.1 を y で偏微分すると

$$f_y = c'(y) = y \text{ より } c(y) = \frac{y^2}{2}$$

よって求める流線は

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

4.

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|} \\ f_y &= \frac{y}{|\boldsymbol{r}|} \\ f_z &= \frac{z}{|\boldsymbol{r}|} \end{aligned}$$

より $-\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \boldsymbol{F}$．よって， $\boldsymbol{F}$ は保存場であり

$$f(x,y,z) = |\boldsymbol{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

は $\boldsymbol{F}$ のスカラーポテンシャルとなります．

(1)

$$\nabla r = (\frac{\partial}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\boldsymbol{k})\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

(2)

$$\begin{aligned} \nabla r^n &= \frac{\partial}{\partial x}(r^n)\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(r^n)\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(r^n)\,\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(r^n)\frac{\partial r}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial r}(r^n)\frac{\partial r}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial r}(r^n)\frac{\partial r}{\partial x}\,\boldsymbol{k} \\ &= nr^{n-1}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-1}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = nr^{n-2}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

(1)

$$\mathbf{A} = \nabla\left(2r^2 - 4\sqrt{r} + \frac{6}{3\sqrt{r}}\right) = 2(2\boldsymbol{r}) - 4(\frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{r}) + \frac{6}{3}(-\frac{1}{2}r^{-\frac{5}{2}}\boldsymbol{r}) = (4 - \frac{2}{r\sqrt{r}} - \frac{1}{r^2\sqrt{r}})\boldsymbol{r}$$

(2)

$$\mathbf{B} = \nabla(r^2e^{-r}) = (\nabla r^2)e^{-r} + r^2(\nabla e^{-r}) = 2e^{-r}\boldsymbol{r} + r^2(-e^{-r})\nabla r = 2e^{-r}\boldsymbol{r} - r^2e^{-r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = (2-r)e^{-r}\boldsymbol{r}$$

Alternate 詳解 Using $\nabla f(\phi) = \frac{df}{d\phi}\nabla\phi$, we have

$$\mathbf{B} = \nabla(r^2e^{-r}) = \frac{d(r^2e^{-r})}{dr}\nabla r = (2re^{-r} - r^2e^{-r})\frac{\boldsymbol{r}}{r} = (2-r)e^{-r}\boldsymbol{r}$$

7. Note that $\nabla\phi$ of $\phi(x,y,z) = x^2y+2xz$ is orthogonal to $\phi(x,y,z) = 4$. Therefore the unit normal vector $\boldsymbol{n}$ is

$$\boldsymbol{n} = \frac{(\nabla\phi)_P}{|\nabla\phi|_P}$$

Here, $(\nabla\phi)_P = (2xy+2z)\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k})\,|_{(2,-2,3)} = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ implies

$$\boldsymbol{n} = \frac{-2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{1}{3}(-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$$

8. $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ implies

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\phi}{\psi}) &= \boldsymbol{i}\frac{\phi_x\psi - \phi\psi_x}{\psi^2} = \frac{\psi\phi_x\boldsymbol{i} - \phi\psi_x\boldsymbol{i}}{\psi^2} \\
\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\phi}{\psi}) &= \boldsymbol{j}\frac{\phi_y\psi - \phi\psi_y}{\psi^2} = \frac{\psi\phi_y\boldsymbol{j} - \phi\psi_y\boldsymbol{j}}{\psi^2} \\
\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\phi}{\psi}) &= \boldsymbol{k}\frac{\phi_z\psi - \phi\psi_z}{\psi^2} = \frac{\psi\phi_z\boldsymbol{k} - \phi\psi_z\boldsymbol{k}}{\psi^2}
\end{aligned}$$

Here, $\phi_x\boldsymbol{i} + \phi_y\boldsymbol{j} + \phi_z\boldsymbol{k} = \nabla\phi$, $\psi_x\boldsymbol{i} + \psi_y\boldsymbol{j} + \psi_z\boldsymbol{k} = \nabla\psi$. Thus,

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi}{\phi^2}$$

演習問題詳解 3.2

1.

(1) $\phi = x^2z + e^{y/x}$ より，

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} = (2xz + e^{y/x}(-\frac{y}{x^2}))\boldsymbol{i} + (e^{y/x}(\frac{1}{x}))\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$$

$\psi = 2z^2y - xy^2$ より，

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{k} = -y^2\boldsymbol{i} + (2z^2 - 2xy)\boldsymbol{j} + 4zy\boldsymbol{k}$$

(2) $\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi\nabla\psi$. (1) より，

$$\begin{aligned}
\nabla(\phi\psi) &= ((2xz + e^{y/x}(-\frac{y}{x^2}))\boldsymbol{i} + (e^{y/x}(\frac{1}{x}))\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k})(2z^2y - xy^2) \\
&+ (x^2z + e^{y/x})(-y^2\boldsymbol{i} + (2z^2 - 2xy)\boldsymbol{j} + 4zy\boldsymbol{k})
\end{aligned}$$

より，点 $\mathrm{P}(1,0,-2)$ での値は

$$\nabla(\phi\psi)_P = (-4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})(0) + (-2+1)(8)\boldsymbol{j} = -8\boldsymbol{j}$$

2. ϕ の点 $\mathrm{P}(2,-1,2)$ における $\mathbf{u}$ 方向への方向微分係数は，

$$\frac{\partial\phi(2,-1,2)}{\partial u} = \nabla\phi(1,0,-2)\cdot\mathbf{u}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\nabla\phi(2,-1,2) &= (4z^3-6xyz)\boldsymbol{i}+(-3x^2z)\boldsymbol{j}+(12xz^2-3x^2y)\boldsymbol{k}\mid_{(2,-1,2)}\\ &= (32+24)\boldsymbol{i}+(-24)\boldsymbol{j}+(96+12))\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

より，

$$\frac{\partial\phi(2,-1,2)}{\partial u} = (56\boldsymbol{i}-24\boldsymbol{j}+108\boldsymbol{k})\cdot\frac{2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}}{7} = \frac{1}{7}(112+72+648) = \frac{832}{7}$$

3. $\nabla r^n = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-1}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$ を用いると簡単である．

(1)

$$\mathbf{A} = \nabla\left(2r^2-4\sqrt{r}+\frac{6}{3\sqrt{r}}\right) = 2(2\boldsymbol{r})-4(\frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{r})+\frac{6}{3}(-\frac{1}{2}r^{-\frac{5}{2}}\boldsymbol{r}) = (4-\frac{2}{r\sqrt{r}}-\frac{1}{r^2\sqrt{r}})\boldsymbol{r}$$

(2)

$$\mathbf{B} = \nabla(r^2e^{-r}) = (\nabla r^2)e^{-r}+r^2(\nabla e^{-r}) = 2e^{-r}\boldsymbol{r}+r^2(-e^{-r})\nabla r = 2e^{-r}\boldsymbol{r}-r^2e^{-r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = (2-r)e^{-r}\boldsymbol{r}$$

別解 $\nabla f(\phi) = \frac{df}{d\phi}\nabla\phi$ を用いると，

$$\mathbf{B} = \nabla(r^2e^{-r}) = \frac{d(r^2e^{-r})}{dr}\nabla r = (2re^{-r}-r^2e^{-r})\frac{\boldsymbol{r}}{r} = (2-r)e^{-r}\boldsymbol{r}$$

4. $\phi(x,y,z) = x^2y+2xz$ の勾配 $\nabla\phi$ は点 P でこの曲面 $\phi(x,y,z)=4$ に垂直である．したがって，単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = \frac{(\nabla\phi)_P}{|\nabla\phi|_P}$$

ここで，$(\nabla\phi)_P = (2xy+2z)\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+2x\boldsymbol{k})\mid_{(2,-2,3)} = -2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ より，

$$\boldsymbol{n} = \frac{-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{1}{3}(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$$

5. $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\phi}{\psi}) &= \boldsymbol{i}\frac{\phi_x\psi-\phi\psi_x}{\psi^2} = \frac{\psi\phi_x\boldsymbol{i}-\phi\psi_x\boldsymbol{i}}{\psi^2}\\ \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\phi}{\psi}) &= \boldsymbol{j}\frac{\phi_y\psi-\phi\psi_y}{\psi^2} = \frac{\psi\phi_y\boldsymbol{j}-\phi\psi_y\boldsymbol{j}}{\psi^2}\\ \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\phi}{\psi}) &= \boldsymbol{k}\frac{\phi_z\psi-\phi\psi_z}{\psi^2} = \frac{\psi\phi_z\boldsymbol{k}-\phi\psi_z\boldsymbol{k}}{\psi^2}\end{aligned}$$

ここで，$\phi_x\boldsymbol{i}+\phi_y\boldsymbol{j}+\phi_z\boldsymbol{k} = \nabla\phi$, $\psi_x\boldsymbol{i}+\psi_y\boldsymbol{j}+\psi_z\boldsymbol{k} = \nabla\psi$ であるから，

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi}{\phi^2}$$

6.

(1) $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, $\nabla_Q=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial\xi}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial\eta}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial\zeta}$, $\nabla_P=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ とすると，

$$\begin{aligned}
\nabla_Q r &= \boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial\xi}+\boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial\eta}+\boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial\zeta}\\
&= \boldsymbol{i}\frac{2(\xi-x)}{2r}+\boldsymbol{j}\frac{2(\eta-y)}{2r}+\boldsymbol{k}\frac{2(\zeta-z)}{2r}\\
\nabla_P r &= \boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial z}\\
&= \boldsymbol{i}\frac{-2(\xi-x)}{2r}+\boldsymbol{j}\frac{-2(\eta-y)}{2r}+\boldsymbol{k}\frac{-2(\zeta-z)}{2r}=-\nabla_Q r
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\nabla_Q(\frac{1}{r}) &= \boldsymbol{i}\frac{\partial r^{-1}}{\partial\xi}+\boldsymbol{j}\frac{\partial r^{-1}}{\partial\eta}+\boldsymbol{k}\frac{\partial r^{-1}}{\partial\zeta}\\
&= \boldsymbol{i}(-r^{-2}\frac{(\xi-x)}{r})+\boldsymbol{j}(-r^{-2}\frac{(\eta-y)}{r})+\boldsymbol{k}(-r^{-2}\frac{(\zeta-z)}{r})\\
\nabla_P(\frac{1}{r}) &= \boldsymbol{i}\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\\
&= \boldsymbol{i}(r^{-2}\frac{(\xi-x)}{r})+\boldsymbol{j}(r^{-2}\frac{(\eta-y)}{r})+\boldsymbol{k}(r^{-2}\frac{(\zeta-z)}{r})=-\nabla_Q(\frac{1}{r})
\end{aligned}$$

演習問題詳解 3.3 1. $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=(t^2+1)\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$ より，

$$d\boldsymbol{r}=(2t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k})dt$$

また，$\mathbf{F}=3xy\boldsymbol{i}-5z\boldsymbol{j}+10x\boldsymbol{k}=3(t^2+1)(2t^2)\boldsymbol{i}-5(t^3)\boldsymbol{j}+10(t^2+1)\boldsymbol{k}$. したがって，

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_1^2\left(12t^3(t^2+1)-20t^4+30(t^2+1)t^2\right)dt\\
&= \int_1^2(12t^5+10t^4+12t^3+30t^2)dt=\left[2t^6+2t^5+3t^4+10t^3\right]_1^2\\
&= 2(64-1)+2(32-1)+3(16-1)+10(8-1)=303
\end{aligned}$$

2.

(1) $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=t^2\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$ $(0\le t\le 1)$ より，

$$d\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k}$$

また，$\phi=2xyz^2=2t^2(2t)(t^3)^2=4t^9$. したがって，

$$\begin{aligned}
\int_C \phi d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 4t^9(2t\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k})dt\\
&= \int_0^1(8t^{10}\boldsymbol{i}+8t^9\boldsymbol{j}+12t^{11}\boldsymbol{k})dt=\left[\frac{8}{11}t^{11}\boldsymbol{i}+\frac{8}{10}t^{10}\boldsymbol{j}+t^{12}\boldsymbol{k}\right]_0^1\\
&= \frac{8}{11}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ $(0 \leq t \leq 1)$ より，

$$d\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$$

また，$\mathbf{F} = xy\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k} = 2t^3\boldsymbol{i} - t^3\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k}$．したがって，

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \times d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} = \int_0^1 \left((-3t^5 - 2t^4)\boldsymbol{i} - (6t^5 - 2t^5)\boldsymbol{j} + (4t^3 + 2t^4)\boldsymbol{k}\right) dt \\
&= \left[(-\frac{t^6}{2} - \frac{2t^5}{5})\boldsymbol{i} - \frac{4t^6}{6}\boldsymbol{j} + (t^4 + \frac{2t^5}{5})\boldsymbol{k}\right]_0^1 \\
&= (-\frac{1}{2} - \frac{2}{5})\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + (1 + \frac{2}{5})\boldsymbol{k} = -\frac{9}{10}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{7}{5}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

3. ベクトル場 $\mathbf{A}$ は $\mathbf{A} = -\nabla\phi$ のとき，がスカラー･ポテンシャルを持つといい，そのとき，$\int_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ である．そこで，$\boldsymbol{r} = \nabla\phi$ であるような ϕ を求める．

$$\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = \nabla r^2 = 2\boldsymbol{r}$$

より，$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})$．したがって，

$$\int_C \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\int_C \nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = 0$$

4. 力の場 $\mathbf{F}$ がポテンシャル U をもつことより，$\mathbf{F} = -\nabla U$．これより，この質点の運動方程式は

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = -\nabla U$$

また，$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$．そこで，

$$m\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\cdot\mathbf{v} = -\nabla U\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

これより，

$$m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\nabla U = 0$$

ここで，$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\nabla U$ を計算すると，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\nabla U = (\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k})\cdot(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

よって，

$$m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + U) = 0$$

これより，

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = C \ (C \text{ 定数})$$

したがって，

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(B)$$

5. xy 平面上で原点 O を中心とし，半径 a の円を C とすると，$C : x = a\cos t, y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ とパラメター化できる．これより，

$$\nabla\phi = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}\boldsymbol{i} + \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}\boldsymbol{j} = \frac{-y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j} = \frac{-\sin t}{a}\boldsymbol{i} + \frac{\cos t}{a}\boldsymbol{j}$$

また，

$$d\boldsymbol{r} = (-a\sin t\boldsymbol{i} + a\cos t\boldsymbol{j})dt$$

したがって，

$$\int_C (\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi}(-\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j})\cdot(-\sin t + \cos t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

演習問題詳解 3.4

1.

(1) 曲面 S を xy 平面に正射影すると，S は $\Omega = \{(x,y) : 2x+2y \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}$ に移る．また，曲面 $S : 2x+2y+z = 2$ より，対応する $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとすると，

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (2-2x-2y)\boldsymbol{k}$$

これより，曲面 S の法線ベクトル $\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y$ を求めると，

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

ここで，$dS = |\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y|dxdy = \sqrt{4+4+1}dxdy = 3dxdy$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
\int_S f dS &= 3\int_\Omega (x^2+2y+z-1)dxdy = 3\int_0^1\int_{y=0}^{1-x}(x^2+2y+(2-2x-2y)-1)dydx \\
&= 3\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2-2x+1)dydx = 3\int_0^1\int_0^{1-x}(x-1)^2\,dydx \\
&= 3\int_0^1 \left[(x-1)^2 y\right]_0^{1-x} dx = 3\int_0^1 (1-x)^3\,dx = -3\left[\frac{1}{4}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (2-2x-2y)\boldsymbol{k}$ とすると，$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y|} = \frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{3}$．よって，

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{n} = (x^2\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k})\cdot\frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{3} = \frac{2x^2+z}{3}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{n}dS &= \int_\Omega \frac{2x^2+z}{3}3dxdy = \int_\Omega (2x^2+(2-2x-2y))dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}(2x^2-2x-2y+2)dydx = \int_0^1 \left[2x^2y-2xy-y^2+2y\right]_0^{1-x}dx \\
&= \int_0^1 (2x^2(1-x)-2x(1-x)-(1-x)^2+2(1-x))dx \\
&= \int_0^1 (1-x)(2x^2-2x-(1-x)+2)dx = \int_0^1 (1-x)(2x^2-x+1)dx \\
&= \int_0^1 (-2x^3+3x^2-2x+1)dx = \left[-\frac{x^4}{2}+x^3-x^2+x\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}+1-1+1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. 曲面 S は xy 平面上領域より，法線単位ベクトルは $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ となる．

$$\mathbf{A}\times\boldsymbol{n} = (x\boldsymbol{i}+(x-y)\boldsymbol{j}+(\log xy)\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & x-y & \log xy \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$$

また，S は xy 平面上にあるので，$S=\Omega$，$dS=dxdy$．ここで，Ω は円板より，極座標を用いると，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le a$ となり，

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{A}\times\boldsymbol{n}dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^a ((r\cos\theta-r\sin\theta)\boldsymbol{i}-r\cos\theta\boldsymbol{j})rdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a ((\cos\theta-\sin\theta)\boldsymbol{i}-\cos\theta\boldsymbol{j})\,d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\left[(\sin\theta+\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{3}((1-1)\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}) = -\frac{a^3}{3}\boldsymbol{j}F3-4
\end{aligned}$$

3. 曲面 S を xy 平面に正射影すると S は $\Omega=\{(x,y):y^2=4, 0\le x\le 3, y\ge 0\}$．次に，$\mathbf{r}$ を位置ベクトルとすると $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\sqrt{4-y^2}\mathbf{k}$．これより，曲面 S の法線ベクトル $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y = \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\mathbf{j}+\mathbf{k}$．これより，

$$\iint_S (3x\mathbf{i}+4z\mathbf{j}+2y\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}dS = \iint_S (3x\mathbf{i}+4z\mathbf{j}+2y\mathbf{k})\cdot(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y)dxdy = \iint_S (6y)dxdy$$

ここで，Ω を縦線重合で表すと，

$$\iint_S (6y)dxdy = \int_0^3\int_0^2 6ydydx = \int_0^3 3y^2\,|_0^2 = \int_0^3 12dx = 36$$

4. 曲面 S を yz 平面に正射影すると S は $\Omega=\{(y,z):y^2=a^2, 0\le z\le 1\}$．次に，$\mathbf{r}$ を位置ベクトルとすると

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \sqrt{a^2 - x^2}\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. これより，曲面 S の法線ベクトル $\mathbf{r}_z \times \mathbf{r}_x = \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\mathbf{i} + \mathbf{k}$. よって，

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_z \times \mathbf{r}_x}{|\mathbf{r}_z \times \mathbf{r}_x|} = \frac{\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{\frac{y^2}{4-y^2} + 1}} \\ &= \frac{\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{\frac{4}{4-y^2}}}\end{aligned}$$

これより，

$$\iint_S (3x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y dxdy = \iint_S (6y) dxdy$$

ここで，Ω を縦線重合で表すと，

$$\iint_S (6y) dxdy = \int_0^3 \int_0^2 6y dy dx = \int_0^3 3y^2 \,|_0^2 = \int_0^3 12 dx = 36$$

演習問題詳解 3.5 基本公式 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とすると，(1) $\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ (2) $\nabla r^n = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$ (3) $\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A} = (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{A} + \phi \nabla \cdot \boldsymbol{A}$

1.

(1)

$$\nabla \cdot (2x^2 z\boldsymbol{i} - xy^2 z\boldsymbol{j} + 3yz^2\boldsymbol{k}) = \frac{\partial(2x^2 z)}{\partial x} + \frac{\partial(-xy^2)}{\partial y} + \frac{\partial(3yz^2)}{\partial z} = 4xz - 2xy + 6yz$$

(2)

$$\begin{aligned}\nabla^2(3x^2 z - y^2 z^3 + 4x^2 y) &= \frac{\partial^2(3x^2 z - y^2 z^3 + 4x^2 y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(3x^2 z - y^2 z^3 + 4x^2 y)}{\partial y^2} + \frac{\partial(3x^2 z - y^2 z^3 + 4x^2 y)}{\partial z^2} \\ &= 6z + 8y - 2z^3 - 6y^2 z\end{aligned}$$

(3)

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) = \nabla(6xy + 4y^3 - 4x^2 z) = (6y - 8xz)\boldsymbol{i} + (6x + 12y^2)\boldsymbol{j} - 4x^2\boldsymbol{k}$$

2.

(1) $\nabla r^{-3} = \frac{dr^{-3}}{dr}\nabla r = -3r^{-4}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -3r^{-5}\boldsymbol{r}$ より，$r\nabla r^{-3} = -3r^{-4}\boldsymbol{r}$. したがって，

$\nabla \cdot (r\nabla r^{-3}) = \nabla \cdot (-3r^{-4}\boldsymbol{r}) = \nabla(-3r^{-4}) \cdot \boldsymbol{r} + (-3r^{-4}\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 12r^{-5}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{r} - 3r^{-4}(3) = 12r^{-4} - 9r^{-4} = 3r^{-4}$

(2) $\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right) = \nabla \cdot r^{-2}\boldsymbol{r} = (\nabla r^{-2}) \cdot \boldsymbol{r} + r^{-2}\nabla \cdot \boldsymbol{r} = -2r^{-3}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{r} + r^{-2}(3) = -2r^{-2} + 3r^{-2} = r^{-2}$. したがって，

$$\begin{aligned}\nabla^2\left\{\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right)\right\} &= \nabla \cdot (\nabla(r^{-2})) = \nabla \cdot (-2r^{-3}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \nabla \cdot (-2r^{-4}\boldsymbol{r} \\ &= \nabla(-2r^{-4}) \cdot \boldsymbol{r} + -2r^{-4}\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 8r^{-5}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{r} - 2r^{-4}(3) = 8r^{-4} - 6r^{-4} = 2r^{-4}\end{aligned}$$

3. $\mathbf{w} = w_1\boldsymbol{i} + w_2\boldsymbol{j} + w_3\boldsymbol{k}$ とすると，

$$\mathbf{w} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_2 z - w3y)\boldsymbol{i} + (w_3 x - w_1 z)\boldsymbol{j} + (w_1 y - w_2 x)\boldsymbol{k}$$

したがって，

$$\nabla \cdot (\mathbf{w} \times \boldsymbol{r}) = 0$$

4.

(1) 基本公式より，

$$\begin{aligned}\nabla^2(\phi\psi) &= \nabla \cdot \nabla(\phi\psi) = \nabla \cdot ((\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi)) = \nabla \cdot (\nabla\phi)\psi + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla \cdot (\nabla\psi) \\ &= \psi + (\nabla^2\phi) + 2(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla^2\psi\end{aligned}$$

(1) 基本公式より，

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla \cdot (\nabla\psi) = (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla^2\psi$$

(3) (2) より，$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla^2\psi$. 対称性より，$\nabla \cdot (\psi\nabla\phi) = (\nabla\psi) \cdot (\nabla\phi) + \psi\nabla^2\phi$.
したがって，

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi$$

5. $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} = 2xyz^3\boldsymbol{i} + x^2z^3\boldsymbol{j} + 3x^2yz^2\boldsymbol{k}$ より

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xyz^3,\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2z^3,\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3x^2yz^2$$

これより，$\phi(x,y,z) = x^2yz^3 + c(y,z)$. ここで，$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2z^3$ を用いると，$\frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = 0$ より，$c(y,z) = c(z)$. 最後に，$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3x^2yz^2$ より，$\frac{\partial c(z)}{\partial z} = 0$ となり，$c(z) = c$. よって，$\phi(x,y,z) = x^2yz^3 + c$. ここで，初期値 $\phi(1,-2,2) = 4$ より，$-16 + c = 4$ となり，$c = 20$.

6.

$$(\nabla U) \times (\nabla V) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (U_yV_z - U_zV_y)\boldsymbol{i} + (U_zV_x - U_xV_z)\boldsymbol{j} + (U_zV_y - U_yV_z)\boldsymbol{k}$$

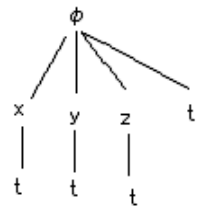
したがって，

$$\begin{aligned}\nabla \cdot ((\nabla U) \times (\nabla V)) &= \frac{\partial(U_yV_z - U_zV_y)}{\partial x} + \frac{\partial(U_zV_x - U_xV_z)}{\partial y} + \frac{\partial(U_xV_y - U_yV_x)}{\partial z} \\ &= U_{yx}V_z + U_yV_{zx} - U_{zx}V_y - U_zV_{yx} + U_{zy}V_x + U_zV_{xy} - U_{xy}V_z - U_xV_{zy} \\ &+ U_{xz}V_y + U_xV_{yz} - U_{yz}V_x - U_yV_{xz} = 0\end{aligned}$$

7.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \nabla\phi = (\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{d}{dt}\phi(x,y,z)$$

8.



合成関数の微分法より，

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla\phi\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

演習問題詳解 3.6

1.

(1)

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & -yz & 3xz^3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(y) + \boldsymbol{j}(4xz - 3z^3) + \boldsymbol{k}(0) = y\boldsymbol{i} + (4xz - 3z^3)\boldsymbol{j}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) &= (\nabla\phi)\times\boldsymbol{A} + \phi\nabla\times\boldsymbol{A} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \\ 2xz^2 & -yz & 3xz^3 \end{vmatrix} + x^2yz \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & -yz & 3xz^3 \end{vmatrix} \\
&= (3x^3z^4 + x^2y^2z)\boldsymbol{i} + (2x^3yz^2 - 6x^2yz^4)\boldsymbol{j} + (-2xy^2z^2 - 2x^3z^3)\boldsymbol{k} + x^2yz(y\boldsymbol{i} + (4xz - 3z^3)\boldsymbol{j}) \\
&= (3x^3z^4 + 2x^2y^2)\boldsymbol{i} + (6x^3yz^2 - 9x^2yz^4)\boldsymbol{i} - (2xy^2z^2 + 2x^3z^3)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

(3) (1) より，$\nabla\times\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{i} + (4xz - 3z^3)\boldsymbol{j}$.

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 4xz - 3z^3 & 0 \end{vmatrix} = (-4x + 9z^2)\boldsymbol{i} + (4z - 1)\boldsymbol{k}$$

2.

$$\nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + az & bx - 3y - z & 4x + cy + 2z \end{vmatrix} = (c+1)\boldsymbol{i} + (a-4)\boldsymbol{j} + (b-2)\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

より，$a = 4, b = 2, c = -1$

3.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= (\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \\
&= \boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \\
&= \boldsymbol{i}\cdot(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x}) + \boldsymbol{j}\cdot(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial y}) + \boldsymbol{k}\cdot(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z}) \\
&= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}) + \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{j}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}) + \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}) \qquad ([A\ B\ C] = [C\ A\ B]) \\
&- \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x}) - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{j}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial y}) - \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z}) \\
&= \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) = 0
\end{aligned}$$

(1)

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

を用いると，

$$\nabla(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{C} + (\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

ここで，$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{C} = 0, \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{0}$ より，

$$\nabla(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

(2)

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) &= (\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{i}\cdot(\frac{\partial C}{\partial x}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}) + \boldsymbol{j}(\cdot\frac{\partial C}{\partial y}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}) + \boldsymbol{k}(\cdot\frac{\partial C}{\partial z}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}) \\
&= -\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}) - \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{j}\times\frac{\partial\boldsymbol{C}}{\partial y}) - \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}) \\
&= -\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) &= (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{i}\times\frac{\partial(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})}{\partial x} + \boldsymbol{j}\times\frac{\partial(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})}{\partial y} + \boldsymbol{k}\times\frac{\partial(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})}{\partial z} \qquad (\boldsymbol{C}\text{ は定数ベクトル}) \\
&= \boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{C}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}) + \boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{C}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}) + \boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{C}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}) \quad (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}) \\
&= (\boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x})\boldsymbol{C} - (\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{C})\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x} + (\boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y})\boldsymbol{C} - (\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{C})\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y} + (\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z})\boldsymbol{C} - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{C})\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z} \\
&= \boldsymbol{C}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

5. 公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}) &= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \\
&= 2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

よって，

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{A}|^2 - \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

6. $\nabla\times(\rho\boldsymbol{F}) = (\nabla\rho)\times\boldsymbol{F} + \rho(\nabla\times\boldsymbol{F})$ また，$\nabla\times(\rho\boldsymbol{F}) = \nabla\times(\nabla p) = 0$ より，$\nabla\times\boldsymbol{F} = -\frac{\nabla\rho}{\rho}\times\boldsymbol{F}$.
したがって，

$$\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}\cdot(-\frac{\nabla\rho}{\rho}\times\boldsymbol{F}) = \frac{\nabla\rho}{\rho}\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{F}) = 0$$

7.

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy + z^3 & 3x^2 - z & 3xz^2 - y \end{vmatrix} = (-1+1)\boldsymbol{i} - (3z^2 - 3z^2)\boldsymbol{j} + (6x - 6x)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

ここで，$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{A} = -\nabla\phi$ となる ϕ が存在することに注意する．

$$\boldsymbol{A} = (6xy + z^3)\boldsymbol{i} + (3x^2 - z)\boldsymbol{j} + (3xz^2 - y)\boldsymbol{k} = -\nabla\phi = -(\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k})$$

より，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = 6xy + z^3,\ -\frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2 - z,\ -\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2 - y$$

まず，-$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 6xy + z^3$ より，$-\phi(x,y,z) = 3x^2y + xz^3 + f(y,z)$．ここで，$\phi$ を y について偏微分すると，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2 + f_y(y,z)$$

一方，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2 - z$$

より，

$$f_y(y,z) = -z$$

これより，$f(y,z) = -yz + g(z)$ となる．よって，$-\phi(x,y,z) = 3x^2y + xz^3 - yz + g(z)$．ここで，$\phi(x,y,z)$ を z について偏微分すると，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2 - y + g'(z)$$

一方，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3x^2 - y$$

より，

$$g'(z) = 0$$

よって，$g(z) = c$ となり，$\phi(x,y,z) = -(3x^2y + xz^3 - yz + c)$

8.

演習問題詳解 4.1

1.

(1) Gauss の発散定理より，

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\, dV$$

ここで，

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = \nabla\cdot(r^{-2}\boldsymbol{r}) = \nabla r^{-2}\cdot\boldsymbol{r} + r^{-2}\nabla\cdot\boldsymbol{r} = -2r^{-3}\nabla r\cdot\boldsymbol{r} + r^{-2}(3) = -2r^{-3}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r} + 3r^{-2} = -2r^{-2} + 3r^{-2} = r^{-2}$$

したがって，

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \frac{1}{r^2}\,dV$$

(2) $\int_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\,dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ とスカラー 3 重積の性質を用いると

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS &= \int_S \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r})\\ &= \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r})\,dV = -\int_V \boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{C}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{C}$ は任意の定ベクトルより，

$$\int_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\,dS = 0$$

(3) Gauss の発散定理より，

$$\begin{aligned}\int_S r^n\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,dS &= \int_V \nabla\cdot r^n\boldsymbol{r}\,dV = \int_V \left((\nabla r^n)\cdot\boldsymbol{r} + r^n\nabla\cdot\boldsymbol{r}\right)\,dV\\ &= \int_V (nr^{n-1}\nabla r\cdot\boldsymbol{r} + 3r^n)\,dV = \int_V (nr^n + 3r^n)\,dV\\ &= (3+n)\int_V r^n\,dV\end{aligned}$$

(4) $\int_S r^n\boldsymbol{n}\,dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ を用いると

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C}\cdot(r^n\boldsymbol{n})\,dS &= \int_S r^n\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot(r^n\boldsymbol{C})\,dV = \int_V (\nabla r^n\cdot\boldsymbol{C} + r^n\nabla\cdot\boldsymbol{C})\,dV\\ &= \int_V nr^{n-1}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{C}\,dV = \int_V \boldsymbol{C}\cdot nr^{n-2}\boldsymbol{r}\,dV\end{aligned}$$

これより，

$$\int_S r^n\boldsymbol{n} = \int_V nr^{n-2}\boldsymbol{r}\,dV$$

(5) $\int_S r^n\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\,dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ とスカラー 3 重積を用いると

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C}\cdot(r^n\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,dS &= \int_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{C}\times(r^n\boldsymbol{r})\,dS = \int_S \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{C}\times r^n\boldsymbol{r})\,dS = \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times r^n\boldsymbol{r})\,dV\\ &= \int_V (-\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times r^n\boldsymbol{r})\,dV = -\int_V \boldsymbol{C}\cdot(\nabla r^n\times\boldsymbol{r} + r^n\nabla\times\boldsymbol{r})\,dV\\ &= -\int_V \boldsymbol{C}\cdot(nr^{n-1}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r} + 0)\,dV = 0\end{aligned}$$

(6) $\int_S r^2\boldsymbol{n}\,dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ を用いると，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C}\cdot(r^2\boldsymbol{n})\,dS &= \int_S r^2\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot(r^2\boldsymbol{C})\,dV\\ &= \int_V (\nabla r^2\cdot\boldsymbol{C} + r^2\nabla\cdot\boldsymbol{C})\,dV = \int_V (2r\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{C})\,dV\\ &= \boldsymbol{C}\cdot\int_V 2\boldsymbol{r}\,dV\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_S r^2 \boldsymbol{n}\, dS = 2\int_V \boldsymbol{r}\, dV$$

(7) $\int_S F(r)\boldsymbol{n}\, dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ を用いると，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C}\cdot(F(r)\boldsymbol{n})\, dS &= \int_S F(r)\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \int_V \nabla\cdot(F(r)\boldsymbol{C})\, dV = \int_V (\nabla F(r)\cdot\boldsymbol{C} + F(r)\nabla\cdot\boldsymbol{C})\, dV \\ &= \int_V \frac{dF}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{C})\, dV = \boldsymbol{C}\cdot\int_V \frac{dF}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\, dV\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_S F(r)\boldsymbol{n}\, dS = \int_V \frac{dF}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\, dV$$

2. 任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ を用いて，面積分の形に直すと，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{n}\times(\nabla\phi))\, dS &= \int_S \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\phi\times\boldsymbol{C})\, dS = \int_V \nabla\cdot(\nabla\phi\times\boldsymbol{C})\, dV \\ &= \int_V (\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\nabla\phi) + \nabla\phi\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C}))\, dV\end{aligned}$$

ここで，$(\nabla\times\nabla\phi = 0, \nabla\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0})$ に注意すると，

$$\int_S \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{n}\times(\nabla\phi))\, dS = 0$$

3. 曲面 S の境界線を C とするので，境界線で分けられた曲面を S_1, S_2 とする．また，曲面 S_1 の法単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_1$，S_2 の法単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_2$ とする．このとき，曲面 S の法単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}$ または，$\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}$．ここで，

$$\int_{S_1} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_1\, dS + \int_{S_2} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_2\, dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, dV = 0$$

より，

$$\int_{S_1} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_1\, dS = -\int_{S_2} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_2\, dS$$

4.

(1) Gauss の発散定理より，

$$\int_S \phi\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}\, dV$$

ここで，$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ であることに注意すると，

$$\int_S \phi\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A}\, dV + \int_V \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}\, dV$$

(2) Gauss の発散定理より，

$$\int_S (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\, dV$$

ここで，演習問題 3. り，$\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$．よって，

$$\int_S (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\, dV - \int_V \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\, dV$$

(3) Gauss の発散定理より，

$$\int_S ((\nabla\phi)\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot((\nabla\phi)\times\boldsymbol{A})\,dV$$

ここで，

$$\nabla\cdot((\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times(\nabla\phi)) - (\nabla\phi)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = -(\nabla\phi)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

したがって，

$$\int_S ((\nabla\phi)\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}dS = -\int_V (\nabla\phi)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}\,dV$$

(4) Gauss の発散定理より，

$$\int_S \phi\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})\,dV$$

ここで，$\boldsymbol{A} = \nabla\phi, \nabla^2\phi = 0$ より，

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot(\nabla\phi) = |\boldsymbol{A}|^2 + \phi\nabla^2\phi = |\boldsymbol{A}|^2$$

したがって，

$$\int_S \phi\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V |\boldsymbol{A}|^2\,dV$$

5.

(1)

labelenshu:4-1-5-1 例題 4.3 のように，面積分の形に書き直す．$\frac{\partial\phi}{\partial n}$ は法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ 方向での方向微分係数より，$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}$．よって，

$$\int_S \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \int_S \psi\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}dS$$

ここで，Gauss の発散定理を用いると，

$$\int_S \psi\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\psi\nabla\phi)\,dV$$

なお，$\nabla\cdot(\psi\nabla\phi) = (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi) + \psi\nabla\cdot(\nabla\phi) = (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi) + \psi\nabla^2\phi$ より，

$$\int_S \psi\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \{\psi\nabla^2\phi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)\}\,dV$$

(2) 例題 4.3 のように，面積分の形に書き直す．$\frac{\partial\phi}{\partial n}$ は法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ 方向での方向微分係数より，$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}$．よって，

$$\int_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \int_S \phi\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}dS$$

ここで，Gauss の発散定理を用いると，

$$\int_S \phi\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\phi\nabla\phi)\,dV$$

なお，$\nabla\cdot(\phi\nabla\phi) = (\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) + \phi\nabla\cdot(\nabla\phi) = |\nabla\phi|^2 + \phi\nabla^2\phi$ より，

$$\int_S \phi\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \{\phi\nabla^2\phi + |\nabla\psi|^2\}\,dV$$

(3) (1) の結果から (2) の結果を引くと，

$$\int_S (\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS = \int_V \{\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi\}\, dV$$

(4) ϕ が調和関数とは，$\nabla^2 \phi = 0$ となることである．したがって，(2) を用いると，

$$\int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_V |\nabla \phi|^2\, dV$$

(5) ϕ, ψ が調和関数とは，$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0$ となることである．したがって，(3) を用いると，

$$\int_S (\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS = \int_V \{\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi\}\, dV = 0$$

(6) ϕ が調和関数とすると，(4) より，

$$\int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_V |\nabla \phi|^2\, dV$$

S 上で $\phi = 0$ とすると，$\int_V |\nabla \phi|^2\, dV = 0$ となり，$|\nabla \phi|^2 = 0$．よって，$|\nabla \phi| = 0$. すなわち $\nabla \phi = 0$. したがって，ϕ は定数.

6. $\int_S \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$ ならば，Gauss の発散定理より，

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0$$

したがって，$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. 定理 3.4 より，$\mathbf{A}$ はベクトル・ポテンシャルを持つ.

7. $\int_S \mathbf{A} \times \boldsymbol{n} dS = \mathbf{0}$. ここで，任意の定ベクトル $\mathbf{C}$ を用いて，面積分の形に直すと，

$$\int_S \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \boldsymbol{n})\, dS = \int_S \boldsymbol{n} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})\, dS$$

Gauss の発散定理より，

$$\int_S \boldsymbol{n} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})\, dS = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) dV = 0$$

ここで,,

$$0 = \nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

したがって，$\nabla \times \mathbf{A} = 0$ となり，$\mathbf{A}$ はスカラー・ポテンシャルをもつ.

演習問題詳解 4.2

1.

1. Stokes の定理より，

$$\int_C (\nabla \phi \psi) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla \times (\nabla \phi \psi)) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$$

ここで，

$$\nabla \phi \psi = \psi (\nabla \phi) + \phi (\nabla \psi)$$

より，

$$\int_C \phi (\nabla \psi) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \psi (\nabla \phi) \cdot d\boldsymbol{r}$$

2.

(1) 線積分を $\int_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ の形に直す．そこで，任意の定ベクトル $\mathbf{C}$ とスカラー 3 重積を用いると，

$$\int_C \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = \int_C d\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{C}\times\boldsymbol{r}$$

と表せる．ここで，Stokes の定理を用いると，

$$\int_C d\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{C}\times\boldsymbol{r} \quad = \quad \int_S (\nabla\times(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{n}dS$$

さて，

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r}) &= (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z})\times(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r}) \\
&= \boldsymbol{i}\times\frac{\partial(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r})}{\partial x}+\boldsymbol{j}\times\frac{\partial(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r})}{\partial y}+\boldsymbol{k}\times\frac{\partial(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r})}{\partial z} \\
&= \boldsymbol{i}\times(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r}_x)+\boldsymbol{j}\times(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r}_y)+\boldsymbol{k}\times(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r}_z) \\
&= (\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{r}_x)\mathbf{C}-(\boldsymbol{i}\cdot\mathbf{C})\boldsymbol{r}_x+(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{r}_y)\mathbf{C}-(\boldsymbol{j}\cdot\mathbf{C})\boldsymbol{r}_y+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_z)\mathbf{C}-(\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{C})\boldsymbol{r}_z \\
&= (\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{r}_x+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{r}_y+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_z)\mathbf{C}-((\boldsymbol{i}\cdot\mathbf{C})\boldsymbol{r}_x+(\boldsymbol{j}\cdot\mathbf{C})\boldsymbol{r}_y+(\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{C})\boldsymbol{r}_z) \\
&= (\nabla\cdot\boldsymbol{r})\mathbf{C}-(\mathbf{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}+
\end{aligned}$$

ここで，

$$\{(\mathbf{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}\}\cdot\boldsymbol{n} = \mathbf{C}\cdot\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\mathbf{C}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} &= (\nabla\cdot\boldsymbol{r})\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{n}-(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{n} \\
&= \mathbf{C}\cdot\{(\nabla\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}-\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\}
\end{aligned}$$

これより，

$$\int_C \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = \int_S \mathbf{C}\cdot\{(\nabla\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}-\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\}dS$$

ここで，C は任意の定ベクトルであるから，

$$\int_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = \int_S \{(\nabla\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}-\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\}dS$$

最後に，

$$\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{r})+\boldsymbol{r}\times(\nabla\times\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}$$

したがって，

$$\int_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = \int_S (3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n})dS = 2\int_S \boldsymbol{n}dS$$

(2) Stokes の定理を用いると，

$$\int_C r^k\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} \quad = \quad \int_S (\nabla\times(r^k\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{n}dS$$

ここで，

$$(\nabla r^k) \times \boldsymbol{r} + r^k \nabla \times \boldsymbol{r}) = kr^{k-2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} + r^k(0) = kr^{k-2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \times \boldsymbol{r} = 0$$

に注意すると，

$$\int_C r^k \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

(3) C を任意の定数ベルトルとし，Stokes の定理を用いると，

$$\int_C \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r}(\nabla\phi) \cdot d\boldsymbol{r} \quad = \quad \int_S (\nabla \times (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r}(\nabla\phi))) \cdot \boldsymbol{n} dS$$

ここで，

$$\nabla \times (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r}(\nabla\phi)) \quad = \quad \nabla(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r}) \times (\nabla\phi) + (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r})\nabla \times \nabla\phi = \nabla(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r}) \times (\nabla\phi)$$

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r}) &= (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z})(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}\frac{\partial(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r})}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r})}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r})}{\partial z} \\
&= \boldsymbol{i}(\mathbf{C} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}) + \boldsymbol{j}(\mathbf{C} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}) + \boldsymbol{k}(\mathbf{C} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}) \\
&= \boldsymbol{i}(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{j}(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{k}(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{k}) = \mathbf{C}
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{C} \cdot (\nabla(\nabla\phi)) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_S \mathbf{C} \times (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{r}(\nabla\phi)) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_S (|bfC \times \nabla\phi) \cdot \boldsymbol{n} dS \\
&= \int_S \mathbf{C} \cdot (\nabla\phi \times \boldsymbol{n}) dS
\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_C \boldsymbol{r}(\nabla\phi) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\phi \times \boldsymbol{n}) dS$$

3. Stokes の定理より，

$$\int_C \phi\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla \times \phi\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS$$

ここで，

$$\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi\nabla \times \mathbf{A}$$

であることに注意すると，

$$\int_C \phi\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla \times \phi\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_S \{(\nabla\phi) \times \mathbf{A}\} \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_S \{\phi\nabla \times \mathbf{A}\} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

4. 線積分を $\int_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ の形に直す．そこで，任意の定ベクトル $\mathbf{C}$ とスカラー 3 重積，Stokes の定理を用いると，

$$\int_C \mathbf{C} \cdot \frac{\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}}{r^3} = \int_C d\boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathbf{C} \times \boldsymbol{r}}{r^3} = \int_S (\nabla \times \frac{\mathbf{C} \times \boldsymbol{r}}{r^3}) \cdot \boldsymbol{n} dS$$

と表せる．

ここで，ベクトル 3 重積を用いると

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \frac{\mathbf{C} \times \boldsymbol{r}}{r^3} &= (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}) \times \mathbf{C} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\
&= \boldsymbol{i} \times \mathbf{C} \times \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) + \boldsymbol{j} \times \mathbf{C} \times \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) + \boldsymbol{k} \times \mathbf{C} \times \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) \\
&= \left(\boldsymbol{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})\right)\mathbf{C} - (\boldsymbol{i} \cdot \mathbf{C})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) + \left(\boldsymbol{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})\right)\mathbf{C} - (\boldsymbol{j} \cdot \mathbf{C})\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) \\
&+ \left(\boldsymbol{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})\right)\mathbf{C} - (\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{C})\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) \\
&= \mathbf{C}(\nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})) - \mathbf{C} \cdot \nabla(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})
\end{aligned}
$$

さらに，

$$
\nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) = \nabla \cdot (r^{-3}\boldsymbol{r}) = -3r^{-4}\nabla r \cdot \boldsymbol{r} + r^{-3}\nabla \cdot \boldsymbol{r} = -3r^{-4}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{r} + 3r^{-3} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0
$$

より，

$$
\int_C \mathbf{C} \cdot \frac{\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}}{r^3} = -\int_S \{\mathbf{C} \cdot \nabla(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})\} \cdot \boldsymbol{n} dS
$$

ここで，$\mathbf{C}$ は任意の定ベクトルであるから，

$$
\int_C \frac{\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}}{r^3} = -\int_S \nabla(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) \cdot \boldsymbol{n} dS
$$

最後に，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \cdot \nabla(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) &= (n_1\frac{\partial}{\partial x} + n_2\frac{\partial}{\partial y} + n_3\frac{\partial}{\partial z})(r^{-3}\boldsymbol{r}) \\
&= n_1(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}) + n_2(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}) + n_3(\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}) \\
&= \boldsymbol{n} \cdot \nabla(\frac{1}{r^3})\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{n}}{r^3} = -3r^{-4}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{n}\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{n}}{r^3} \\
&= -3\frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}}{t^5}\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{n}}{r^3}
\end{aligned}
$$

5. Stokes の定理より，

$$
0 = \int_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS
$$

よって，$\nabla \times \mathbf{A} = 0$．したがって，$\mathbf{A}$ はスカラー・ポテンシャルをもつ．