応用数学入門

横田 壽

目次

第 1 章　1 階微分方程式 1
1.1 微分方程式 1
1.2 変数分離形微分方程式 3
1.3 同次形微分方程式 6
1.4 完全微分形微分方程式 8
1.5 積分因子 11
1.6 線形微分方程式 14
1.7 Bernoulii, Riccati の方程式 16
1.8 非正規形方程式 19
1.9 Clairaut の微分方程式 21
1.10 数値計算法 24

第 2 章　線形微分方程式 27
2.1 線形微分方程式の解 27
2.2 階数低減法 32
2.3 高階同次線形微分方程式の解 34
2.4 未定係数法 38
2.5 定数変化法 40
2.6 変数係数線形微分方程式 43
2.7 演算子法 45

第 3 章　連立線形微分方程式 49
3.1 連立同次線形微分方程式 49
3.2 重根と複素数根 52
3.3 非同次方程式 57

第 4 章　級数による解法 63
4.1 解析関数 63
4.2 整級数解 (通常点の場合) 66
4.3 Frobenius 法 (確定特異点の場合) 67

第 5 章　ラプラス変換 73
5.1 ラプラス変換の定義 73
5.2 ラプラス変換の存在 77

5.3 基本法則 78
5.4 ラプラス逆変換 86
5.5 微分方程式への応用 88
5.6 合成法則と積分方程式 91

第 6 章 フーリエ級数 95
6.1 内積空間 95
6.2 フーリエ級数 97
6.3 正弦級数，余弦級数, 複素形フーリエ級数 101
6.4 Sturm-Liouville 問題 104

第 7 章 偏微分方程式 107
7.1 偏微分方程式の解 107
7.2 偏微分方程式の 3 つの解法 109
7.3 3 つの境界値問題 114

第 8 章 フーリエ変換 129
8.1 フーリエ変換 129
8.2 偏微分方程式への応用 133

付録 A 問題解答 137

第 1 章

1 階微分方程式

1.1 微分方程式

物理学，化学，そして工学における自然の法則の多くが微分方程式を用いて表わすことができます．それらの法則の中からこの本の中でとりあげるものだけでも Newton の第 2 法則，Newton の冷却の法則，Kirchhoff の第 2 法則，熱伝導の Fourier の法則，波動方程式，振動方程式，化学反応方程式などがあります．このように，現象を数学的に定式化すると，微分方程式の形になって表われるものが少なくありません．

微分方程式とは未知関数とその導関数からなる関係式のことをいいます．これから考える微分方程式の多くは，積分を有限回行なってこの未知関数を求める**求積法 (quadrature)** とよばれる方法で解けますが，多くの微分方程式は求積法では解が得られません．そこで求積法で解けない微分方程式では解を級数，数値計算，グラフを使って近似します．

独立変数 x とその関数 $y(x)$ および導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ の間の関係式

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

を y に関する**常微分方程式 (ordinary differential equation)** といいます．常微分方程式の例をいくつかあげてみます．($y' \equiv \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.)

$$\begin{array}{lll} (a)\ y' = x^2 & (b)\ y' = 2x + y & (c)\ xy'' + y = 0 \\ (d)\ (y')^2 = y & (e)\ y'' + xyy' = 0 & (f)\ xy'' = \sin y - x^3 \end{array}$$

微分方程式に含まれる導関数の最高階数を，その微分方程式の**階数 (order)** といいます．方程式 $(a), (b), (d)$ は 1 階で残りは 2 階の微分方程式となります．先に述べた自然の法則の多くは，1 階か 2 階の微分方程式で定式化できるので，この本ではこの 2 つの階数の微分方程式を主にとりあげます．

微分方程式が次の形で表わせるとき，つまり未知関数とその導関数についての一次式で表わせるとき，**線形 (linear)** であるといい，そうでないときを**非線形 (nonlinear)** であるといいます．よって，n 階の線形微分方程式は次の形で表わせます．

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x),$$

ただし $y^{(n)} \equiv \frac{d^n}{dx^n} y$．またこの定義より方程式 $(a) - (c)$ は線形，$(d) - (f)$ は非線形といえます．線形微分方程式には線形代数を基本にしたエレガントな理論があります．ただ 1

階の微分方程式に関していえば，線形であるということはそれほど重要ではありません．そこで第 1 章では線形，非線形を問わず 1 階の微分方程式の解法としてこれまでに開発されてきた求積法について学びます．

微分方程式に代入したとき，方程式をある区間上で恒等的に満たすような関数を**微分方程式の解 (solution)** といい，解を求めることを**微分方程式を解く (solve)** といいます．解はいつも $y = f(x)$ という式で与えられるわけではありません．ときには陰関数 $G(x, y) = 0$ の形で与えられることもあります．

例題 1.1 e^x, e^{x+c}, ce^x は $y' = y$ の解であることを示せ．また $e^{2x}, e^x + c$ $(c \neq 0)$ は $y' = y$ の解ではないことを示せ．

解 e^x, e^{x+c}, ce^x の導関数はそれ自身であるから $y' = y$ の解である．また $(e^{2x})' = 2e^{2x} \neq e^{2x}, (e^x + c)' = e^x \not\equiv e^x + c$ $(c \neq 0)$ より，$y' = y$ の解でない． ■

例題 1.2 $y_1 = x^5 + x^4$ と $y_2 = x^5$ は $y' = 4(y/x) + x^4$ の解であることを示せ．

解 $y_1' = 5x^4 + 4x^3$ と $4(y_1/x) + x^4 = (4x^5 + 4x^4)/x + x^4 = 5x^4 + 4x^3$ より，$y_1(x)$ は解である．また $y_2' = 5x^4$ と $4(y_2/x) + x^4 = 4x^5/x + x^4 = 5x^4$ より，$y_2(x)$ も解である． ■

これらの例からもわかるように，微分方程式の解はひとつとは限りません．一般に n 階の微分方程式では，任意にその値をとることができる n 個の定数を含む解が存在します．この解をその方程式の**一般解 (general solution)** といいます．また一般解の任意定数にある特定の値を入れてできた解を**特殊解 (particular solution)** といいます．たとえば $y' = y$ の一般解は $y = ce^x$ で与えられ，$x = 0, y = 1$ を代入して得られた $y = e^x$ は特殊解です．

2 つの変数 x, y からなる微分方程式の一般解は上の例でもわかるように xy 平面で曲線群を描きます．そのとき表われる各曲線を**解曲線 (solution curve)** または**積分曲線 (integral curve)** といいます．

微分方程式 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ について，x のある値 x_0 における y の $n-1$ 階までの導関数の値をあらかじめ指定する条件

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

を**初期条件 (initial condition)** といいます．またこの条件を満たす解を求める問題を**初期値問題 (initial value problem)** といいます．いい換えると初期条件を満たす解曲線を求める問題のことです．

微分方程式 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ を区間 $[a, b]$ で考えたとき，区間の両端 $x = a, x = b$ において，解または解の導関数が満たすべき条件を**境界条件 (boundary condition)** といいます．またこの条件を満たす解を求める問題を，**境界値問題 (boundary value problem)** といいます．いい換えると境界条件を満たす解曲線を求める問題のことです．

これから私たちは常微分方程式の初期値問題について学んでいきます．

1.1.1 演習問題

1. $e^x, xe^x, c_1e^x + c_2xe^x$ は $y'' - 2y' + y = 0$ の解であることを示せ．また $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ のとき，c_1, c_2 を求めよ．

2. $\sin x, \cos x$ とその一次結合は $y'' + y = 0$ の解であることを示せ．また $\sin x, \cos x$ により張られるベクトル空間についてどんなことがいえるか．

1.2 変数分離形微分方程式

1 階の微分方程式は一般に

$$y' = f(x, y)$$

または微分を用いて

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

の形で表わされます．後の形の方程式を**全微分方程式 (total differential equation)** といいます．ここで

$$y' = -\frac{y}{x},\ xdx + ydy = 0$$

を考えてみましょう．この 2 つの式は $x = 0$ の場合を除けば同じものとして扱えます．一般に上の 2 つの形の微分方程式は，形式的に同じものとして扱うことができます．

たぶん 1 階の微分方程式の中でもっとも簡単なのは $f(x, y)$ が x だけの関数のときでしょう．この場合，微分方程式は

$$y' = f(x)$$

の形をとり，両辺を x について積分すると一般解

$$y = \int f(x)dx + c$$

を得ます．ただし c は任意の定数です．

例題 1.3 $x^2dx - dy = 0$ の一般解を求めよ．

解 与えられた微分方程式は $y' = x^2$ と書き直せる．よって両辺を x について積分して一般解

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

を得る． ■

例題 1.4 初期値問題 $y' = e^{x^2}, y(0) = 3$ を解け．

解 この場合，微分方程式 $y' = e^{x^2}$ を x について積分したのでは初期値問題は解けない．なぜならば e^{x^2} の原始関数は初等関数ではない．そこで不定積分の代わりに定積分を用いる．

$$\int_0^x y'(t)dt = \int_0^x e^{t^2}dt$$

より

$$y(x) - y(0) = \int_0^x e^{t^2} dt.$$

よって

$$y(x) = 3 + \int_0^x e^{t^2} dt$$

を得る．■

こういう解の表わし方に慣れてないかも知れませんが，これは立派な解です．なぜならばどんな特定な値 x に対しても $\int_0^x e^{t^2} dt$ は数値的に何桁までも正確に近似できるからです．

次に $f(x, y)$ が x の関数と y の関数の積で表わされる場合を考えます．

$y' = f(x, y)$ が

$$y' = F(x)G(y)$$

の形で表わされるとき，微分方程式は**変数分離形 (separable)** であるといいます．このとき

$$y'(x) = F(x)G(y(x))$$

を満たす解 $y(x)$ を求めます．左辺に y の関数，右辺に x の関数となるように書き直すと

$$\frac{y'(x)}{G(y(x))} = F(x)$$

となります．この両辺を x について積分すると

$$\int \frac{y'(x)}{G(y(x))} dx = \int F(x) dx$$

となるので

$$\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x) dx$$

を得ます．

例題 1.5 $y' = \frac{xy}{y+1}$ を解け．

解 この微分方程式は形式的に

$$\frac{y+1}{y} dy = x dx$$

と表わせる．そこで両辺を積分すると

$$y + \log |y| = \frac{x^2}{2} + c$$

となる．これは与えられた微分方程式の陰関数を用いた解である．そこで $c = -\log c_1$ を用いて書き直すと，

$$2y + \log (c_1 y)^2 = x^2$$

となる．■

上の例題で $y(x) \equiv 0$ は元の式の解ですが，求めた一般解の中には c_1 をどのような値にとっても $y(x) \equiv 0$ は含まれていません．このように微分方程式の解なのに，一般解の任意定数にどのような値を与えても得られない解を，その微分方程式の**特異解 (singular**

solution) といいます．他にも消えてしまった解があるかもしれませんが，これは変数分離形ではよくおきることです．そこで私たちは 1.7 節までの間，形式的に求めたものを解として扱います．

次の例題は **Newton の冷却の法則 (Newton's law of cooling)** を用います．実験より温度が T_1 と T_2 の 2 物体が向かい合っているとき，高温の物体から低温の物体へ dt 時間に移る熱量 dQ は，T_1 と T_2 の温度差が小さいとき近似的に比例して次の式で与えらることがわかっています．

$$dQ = \kappa(T_1 - T_2)dt.$$

例題 1.6 $100°c$ に熱せられた鉄球を $10°c$ に保たれた水の中に入れる．4 分後鉄球の温度は $60°c$ でした．鉄球の温度が $20°c$ になるのは何分後か求めよ．

解 Newton の冷却の法則を使ってこの問題を定式化すると

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T - 10),\ T(0) = 100,\ T(4) = 60$$

ただし，$T(t)$ は時間 t 分後の鉄球の温度を表わしている．変数を分離し積分すると

$$T(t) = ce^{-kt} + 10$$

となる．ここで境界条件 $T(0) = 100$ と $T(4) = 60$ より

$$c = 90 \text{ と } k = \frac{1}{4}\log\frac{9}{5} \doteq \frac{1}{4}(2.1972 - 1.6094) \doteq 0.147$$

を得る．よって

$$T(t) \doteq 90e^{-0.147t} + 10.$$

ここで $T(t) = 20$ となる t_0 を求めると，

$$20 \doteq 90e^{-0.147t_0} + 10$$

より

$$t_0 \doteq \frac{\log 9}{0.147} \doteq 14.9 \text{ min}$$

となる． ■

1.2.1 演習問題

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $(\sin x)y' + (\cos x)y = 0$ (b) $y' = e^{x+y}$

(c) $y' = \frac{1-y^2}{1-x^2}$ (d) $y' = (1 + 2x)(1 + y^2)$

2. 次の初期値問題を解け．

(a) $(1 + e^x)y' = y,\ y(0) = 1$ (b) $y' + y\sin x = 0,\ y(\pi) = 3$

(c) $xyy' - y^2 = 1,\ y(2) = 1$ (d) $y' = \frac{x(y^2-1)}{(x-1)y^3},\ y(2) = 2$

3. 温度 $70°c$ の物体を気温 $20°c$ の屋外に出した．15 分後の温度が $50°c$ になっていたとき，次の問に答えよ．

(a) 30 分後の物体の温度を求めよ．

(b) 物体の温度が $32°c$ になるまでにかかる時間を求めよ．

1.3　同次形微分方程式

しばしば適当な変換をとることによって，微分方程式は簡単な形に置き換えることができます．ここでは変換によって，変数分離形に置き換えれる微分方程式について考えます．形を覚えるのではなく変換の仕方について学ぶのがよいでしょう．

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

で表わされる微分方程式を**同次形 (homogeneous)** といいます．ここで

$$v = \frac{y}{x}$$

とおくとこの微分方程式は変数分離形になります．つまり，$y = vx$ より $y' = v'x + v$ となり，これを元の微分方程式に代入すると

$$v'x + v = f(v)$$

を得ます．ここで変数を分離すると

$$\frac{v'}{f(v) - v} = \frac{1}{x}$$

となり，確かに変数分離形です．この両辺を積分すると

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \log x + c$$

となります．これに $v = \frac{y}{x}$ を代入すると一般解を得ます．

与えられた微分方程式が同次形か見分けるには次のようにすると簡単です．
$M(tx, ty) = t^n M(x, y)$ を満たす関数 $M(x, y)$ を n 次の**同次関数 (homogeneous function)** といいます．この定義を用いると微分方程式

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,\ y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

において，$M(x, y)$ と $N(x, y)$ が同じ次数の同次関数ならば，与えられた微分方程式は同次形です．

例題 1.7 $y' = \frac{x-y}{x+y}$ を解け．

解 $M(x, y), N(x, y)$ ともに一次の同次関数．　右辺の分子と分母を x で割ると

$$y' = \frac{1 - (y/x)}{1 + (y/x)} = f(\frac{y}{x})$$

であるから，同次形である．そこで上で説明したように $y = vx$ とおくと，

$$v'x + v = \frac{1 - v}{1 + v}$$

となる．これより

$$v'x = \frac{1 - v}{1 + v} - v = \frac{1 - v - v - v^2}{1 + v}$$

または

$$\frac{1+v}{v^2+2v-1}v' = -\frac{1}{x}$$

を得る．両辺を積分して

$$\frac{1}{2}\log|v^2+2v-1| = -\log(cx),$$

ただし，c は任意定数．よって

$$(v^2+2v-1)x^2 = c_1.$$

ここで $c_1 = 1/c^2$ より任意定数．最後に $v = y/x$ に置き換えて整理すると，一般解は

$$y^2+2xy-x^2 = c_1. \blacksquare$$

例題 1.8 $y' = \frac{x-y+1}{x+y-1}$ を解け．

解 これは同次形ではないが，定数項が落ちれば同次形である．そこで次のようにして同次形に変形できる．2 直線

$$x-y+1=0, x+y-1=0$$

の交点を求めると $(0,1)$ である．この点を原点とするように座標軸の平行移動

$$x = X+0, y = Y+1$$

を行なうと，

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dx}\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dx} = \frac{X-Y}{X+Y}$$

となる．この微分方程式の一般解は例題 1.7 より

$$Y^2+2XY-X^2 = c.$$

よって与えられた微分方程式の一般解は

$$(y-1)^2+2(y-1)x-x^2 = c$$

となる． $\blacksquare$

変換によって微分方程式を同次形に直すとき，与えられた微分方程式の形から何をどうおくか明らかなものもあります．

例題 1.9 $y' = \frac{x+y-1}{x+y+1}$ を解け．

解 分母と分子に表われている $x+y$ より，$u = x+y$ と置く．すると $y = u-x$ より $y' = u'-1$． これを元の微分方程式に代入すると，

$$u'-1 = \frac{u-1}{u+1},$$

$$u' = \frac{u-1}{u+1}+1 = \frac{u-1+u+1}{u+1} = \frac{2u}{u+1},$$

$$\frac{u+1}{u}du = 2dx.$$

両辺を積分して

$$u + \log|u| = 2x + c.$$

よって一般解は

$$y - x + \log|x + y| = c$$

となる．■

1.3.1　演習問題

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$　　(b) $y' = \frac{xy}{(x+2y)^2}$

(c) $y' = \frac{x^2+2xy-4y^2}{x^2-8xy-4y^2}$　　(d) $(x^2 - y^2 e^{\frac{x}{y}})y' = xy$

(e) $y' = \frac{x+2y-1}{x+2y+7}$　　(f) $y' = \frac{x-y+8}{y-3x+2}$

2. 次の初期値問題を解け．

(a) $(y - \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0,\ y(\sqrt{3}) = 1$

(b) $(y^3 - x^3)dx - xy^2 dy = 0,\ y(1) = 2$

3. 例題 1.9 はなぜ例題 1.8 の方法では解けないのか考えなさい．

1.4　完全微分形微分方程式

この節では変数分離形ではないが，積分を 2 回行なうことによって解が得られる微分方程式について考えます．まず 2 変数関数の全微分を思い出してもらいます．2 変数関数 $u(x, y)$ の全微分は

$$du = u_x dx + u_y dy$$

で与えられます．よってもし 2 つの偏微分 u_x, u_y がわかれば，全微分 du が求まります．逆に，関数の全微分がわかると次の例題が示すように，その関数を任意の定数の範囲できめることができます．

例題 1.10 ある関数 $u(x, y)$ の全微分は

$$du = 3x(xy - 2)dx + (x^3 + 2y)dy$$

で与えられている．このとき，$u(x, y)$ を求めよ．

解 dx と dy の係数は u_x と u_y である．したがって

$$u_x = 3x^2 y - 6x,\ u_y = x^3 + 2y.$$

最初の式を x について積分すると

$$u(x, y) = \int (3x^2 y - 6x)dx = x^3 y - 3x^2 + c(y)$$

ここで $c(y)$ は y についての任意関数 (なぜ?)．この式を y について偏微分すると

$$u_y = x^3 + c'(y)$$

となる．この u_y と最初に与えられた u_y は等しいはずであるから，

$$u_y = x^3 + c'(y) = x^3 + 2y.$$

これより $c'(y) = 2y$ となり，$c(y) = y^2 + C$ を得る．ただし C は任意定数．よって

$$u(x, y) = x^3y - 3x^2 + y^2 + C$$

である． ■

次の定義は全微分と完全微分形微分方程式を結びつけてくれます．

定義 1.1 1 階の全微分方程式

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

の左辺がある関数 $u(x, y)$ の全微分 du に等しいならば，この方程式の一般解は

$$u(x, y) = c$$

で与えられ，このような方程式を**完全微分形 (exact)** という．

例題 1.11 $3x(xy - 2)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$ を解け．

解 例題 1.10 で上の微分方程式の左辺が du と等しい関数 $u(x, y)$ を求めた．よって一般解は

$$x^3y - 3x^3 + y^2 = c. \blacksquare$$

次の定理は与えられた微分方程式が完全微分形か，でないか簡単にテストする方法を示唆しています．

定理 1.1 $M(x, y)$ と $N(x, y)$ の 1 階の偏導関数が，ある領域 $\{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ 上で連続であるとする．そのとき，次の条件は同値である．
(1) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ は完全微分形である
(2) $M_y = N_x$

証明 (1) ⇒ (2)
微分方程式が完全微分形ならば，$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ となる関数 $u(x, y)$ が存在する．よって

$$M = u_x, N = u_y$$

を得る．次に M を y で偏微分，N を x で偏微分すると

$$M_y = u_{xy}, N_x = u_{yx}$$

となる．ここで M_y, N_x は仮定より連続なので u_{xy}, u_{yx} も連続である．よって微積分学で学んだ **Schwartz の定理 (Schwarz lemma)** より $u_{xy} = u_{yx}$ となり，$M_y = N_x$ を得る．
(2) ⇒ (1)
(x_0, y_0) を M, N の定義域に属する点とする．まず，$\frac{\partial u}{\partial x} = M$ より

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)d\xi$$

を得る．これが $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ を満たすように，つまり

$$N(x,y) = \frac{\partial u(x_0,y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi$$

が成り立つように $u(x_0,y)$ を定めればよい．M は連続な偏導関数をもつから，微分と積分の順序の交換ができて

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(\xi,y)d\xi$$

が成り立つ．ここで $M_y = N_x$ より

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \frac{\partial u(x_0,y)}{\partial y} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(\xi,y)d\xi = \frac{\partial u(x_0,y)}{\partial y} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}(\xi,y)d\xi \\ &= \frac{\partial u(x_0,y)}{\partial y} + N(x,y) - N(x_0,y) \end{aligned}$$

を得る．したがって，$u(x_0,y)$ は

$$\frac{\partial u(x_0,y)}{\partial y} = N(x_0,y)$$

を満たさなければならない．そこで $u(x_0,y)$ を

$$u(x_0,y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta$$

と定めると

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta.$$

これより

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

となり，$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ は完全微分形である．■

この定理の証明の中に完全微分形のときの解 $u(x,y)$ が与えられています．つまり $M_y = N_x$ のとき，一般解は

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta = c$$

で与えられます．

例題 1.12 $(y\cos x - \sin y)dx + (\sin x - x\cos y)dy = 0$ を解け．

解

$$M_y = \frac{\partial}{\partial y}(y\cos x - \sin y) = \cos x - \cos y,$$

$$N_x = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x - x\cos y) = \cos x - \cos y$$

より方程式は完全微分形である．そこで $(x_0,y_0) = (0,0)$ として一般解を求めると

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x M(\xi,y)d\xi + \int_0^y N(0,\eta)d\eta \\ &= \int_0^x (y\cos\xi - \sin y)d\xi + \int_0^y 0 d\eta \\ &= y\sin x - x\sin y \end{aligned}$$

となり，一般解は

$$y\sin x - x\sin y = c. \blacksquare$$

例題 1.13 初期値問題 $(2xy+3y)dx+(4y^3+x^2+3x+4)dy=0,\ y(0)=1$ を解け.

解 $M_y = 2x+3 = N_x$ より，方程式は完全微分形である．よって

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x M(\xi,y)d\xi + \int_0^y N(0,\eta)d\eta \\ &= \int_0^x (2\xi y+3y)d\xi + \int_0^y (4\eta^3+4)d\eta \\ &= x^2y+3xy+y^4+4y. \end{aligned}$$

これより，一般解

$$x^2y+3xy+y^4+4y = c$$

を得る．最後に初期条件 $y(0)=1$ より $c=5$ が定まる． $\blacksquare$

公式 $u(x,y) = \int_{x_0}^x M(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^y N(x_0,\eta)d\eta$ を用いて，一般解を求める方法の他に，もっとよく用いられている方法に**くくり直し法 (grouping method)** とよばれているものがあります．この方法を次の例題を用いて説明します.

例題 1.14 $(2x+3y)dx+(3x+y^2+3)dy=0$ を解け.

解 $M_y = 3 = N_x$ より，方程式は完全微分形である．そこで $M(x,y), N(x,y)$ を

$$\underbrace{2xdx}_{x\text{ の関数}} + \underbrace{(3ydx+3xdy)}_{x,y\text{ の関数}} + \underbrace{(y^2+3)dy}_{y\text{ の関数}} = 0$$

となるようにくくり直す．次に全微分を用いて書き直すと

$$d(x^2)+d(3xy)+d(\frac{y^3}{3}+3y) = d(c).$$

これより，

$$x^2+3xy+\frac{y^3}{3}+3y = c. \blacksquare$$

1.4.1 演習問題

1. 次の微分方程式が完全微分形か調べ，完全微分形の方程式を解け.

(a) $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$ (b) $(ye^{xy}+2xy)dx+(xe^{xy}+x^2)dy=0$

(c) $(1+xy^2)dx+(x^2y+y)dy=0$ (d) $(y^2-x^2)dx+2xydy=0$

2. 次の初期値問題を解け.

(a) $x^2dx+ye^ydy=0,\ y(0)=1$

(b) $(e^xy+\sin y)dx+(e^x+x\cos y)dy=0,\ y(0)=1$

(c) $(\cos x\sin x-xy^2)dx-y(x^2-1)dy=0,\ y(0)=2$

1.5 積分因子

完全微分形ではない全微分方程式

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

に，適当な関数 $\mu(x,y) \neq 0$ をかけて得られる方程式

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

が完全微分形になるとき，$\mu(x,y)$ をこの微分方程式の**積分因子 (integrating factor)** といいます.

一般に，積分因子はひとつとは限りません．たとえば，関数 x^{-2} と y は次の微分方程式の積分因子です (本当か確認して).

$$2xdx + \frac{x^2}{y}dy = 0.$$

ではどうやって積分因子を見つけることができるか考えてみましょう.

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

が完全微分形だとすると

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

を満たすはずです．これを書き直すと

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$$

となります．残念ながら一般にこの方程式を解くのは困難です．そこでここでは特殊な場合に限って話を進めます.

I. $\mu(x,y) = \mu(x)$ のとき

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$$

より

$$\frac{1}{\mu}d\mu = \frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})dx.$$

ここで

$$\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$$

が x だけの関数なら積分因子は

$$\mu(x) = \exp\{\int \frac{1}{N}[M_y - N_x]dx\}$$

II. $\mu(x,y) = \mu(y)$ のとき

$$-M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$$

より

$$\frac{1}{\mu}d\mu = -\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})dy.$$

ここで

$$\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$$

が y だけの関数なら積分因子は

$$\mu(y) = \exp\{-\int \frac{1}{M}[M_y - N_x]dy\}$$

となります．積分因子をひとつだけ捜していたので積分定数は無視しました.

例題 1.15 $(2x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$ を解け.

解 $M_y = 1, N_x = 2xy-1$ よりこの全微分方程式は完全微分形ではない．そこで $(1/N)[M_y-N_x]$ を計算すると

$$\frac{1}{N}[M_y-N_x]=\frac{1}{x^2y-x}[1-(2xy-1)]=-\frac{2}{x}.$$

これは x だけの関数なので I. より積分因子は

$$\mu=\exp(-\int\frac{2}{x}dx)=\exp(-2\log|x|)=\frac{1}{x^2}$$

である．これを元の式にかけると

$$(2+\frac{y}{x^2})dx+(y-\frac{1}{x})dy=0.$$

この式は完全微分形なので一般解をくくり直し法で求めると

$$2dx+(\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy)+ydy=0$$

より一般解は

$$2x+\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}=c$$

で与えられる． ■

例題 1.16 $(4xy^2+6y)dx+(5x^2y+8x)dy=0$ を解け.

解 $M_y=8xy+6, N_x=10xy+8$ より完全微分形ではない．また $M_y-N_x=-2(xy+1)$ より $(1/N)[M_y-N_x], (1/M)[M_y-N_x]$ ともに x だけ y だけの関数ではない．そこで別な方法で積分因子を見つけてみる．M_y と N_x をよく見ると似た形をしている．そこで積分因子 μ は x^my^n の形をしていると考えてみる．x^my^n が積分因子なら

$$(4x^{m+1}y^{n+2}+6x^my^{n+1})dx+(5x^{m+2}y^{n+1}+8x^{m+1}y^n)dy=0$$

は完全微分形のはずなので

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&=4(n+2)x^{m+1}y^{n+1}+6(n+1)x^my^n\\&=5(m+2)x^{m+1}y^{n+1}+8(m+1)x^my^n=\frac{\partial N}{\partial x}\end{aligned}$$

を得る．この 2 つの式を比較して,

$$4(n+2)=5(m+2),\ 6(n+1)=8(m+1)$$

を得る．この連立方程式を解くと，$n=3, m=2$ となるので,

$$(4x^3y^5+6x^2y^4)dx+(5x^4y^4+8x^3y^3)dy=0$$

は完全微分形となり，一般解は

$$x^4y^5+2x^3y^4=c$$

である． ■

1.5.1　演習問題

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $(x-y^2)dx+2xydy=0$　　(b) $(5xy+4y^2+1)dx+(x^2+2xy)dy=0$

(c) $(2xy^2+y)dx+(2y^3-x)dy=0$　(d) $(2x+\tan y)dx+(x-x^2\tan y)dy=0$

2. 次の微分方程式を解け.

(a) $(2y^2-xy)dx+(2x^2-3xy)dy=0$　(b) $(y^4+2x^3y)dx-(x^4+2xy^3)dy=0$

1.6　線形微分方程式

1 階線形微分方程式は

$$a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$$

または標準形

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

または全微分形

$$(P(x)y-Q(x))dx+dy=0$$

で表わすことができます．ここで $M(x,y)=P(x)y-Q(x), N(x,y)=1$ より M_y, N_x を求めると

$$M_y=P(x),\ N_x=0$$

よって $(1/N)[M_y-N_x]=P(x)$ は x だけの関数です．そこで前節で学んだように積分因子を求めると

$$\mu=e^{\int P(x)dx}$$

となります．この積分因子 $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$ を標準形 $y'+P(x)y=Q(x)$ にかけると

$$y'e^{\int P(x)dx}+P(x)ye^{\int P(x)dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

となり，左辺は $ye^{\int P(x)dx}$ の導関数より

$$ye^{\int P(x)dx}=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c.$$

よって一般解は

$$y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c)$$

で与えられます.

1 階線形微分方程式の解は上に示した公式で求められますが，この公式から解を求めるのはあまり推薦できません．それよりも，次の例題で示すように積分因子が $e^{\int P(x)dx}$ であることを使って解を求めるほうがよいでしょう.

例題 1.17 $xy'+2y=x^2$ を解け.

解 この方程式は 1 階の線形です．標準形に直すと

$$y'+\frac{2}{x}y=x$$

積分因子 μ は

$$\mu = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\log x} = x^2.$$

これを標準形にかけると

$$x^2 y' + 2xy = x^3.$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 y の導関数なので

$$\frac{d(x^2 y)}{dx} = x^3.$$

この両辺を x で積分すると

$$x^2 y = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c.$$

よって一般解は

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}$$

となる． ■

次の例題は **Kirchhoff の第 2 法則 (Kirchhoff's 2nd law)** を用いて RL 回路とよばれている電気回路を流れる電流を求めます．そこで復習．

電気抵抗 R オーム，インダクタンス L ヘンリー，容量 C ファラデー，起電力 E ボルトの電気回路に i アンペアの電流を流したとき，抵抗素子，コイル，コンデンサーを通るときの電圧降下は

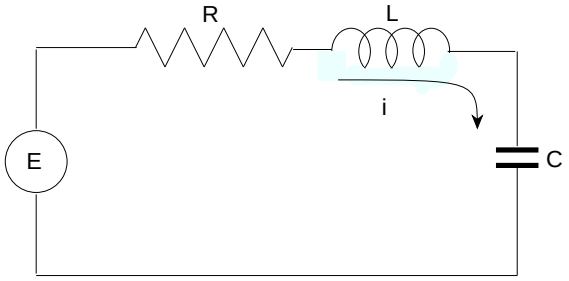

図 1.1 RLC 直列回路

1. $v_R = Ri$
2. $v_L = L\frac{di}{dt}$
3. $v_C = \frac{1}{C}\int idt$

で与えられます．また Kirchhoff の第 2 法則とはひとつの網目に沿った電圧の降下の総和と，電圧の上昇の総和は等しいことです．よって

$$v_R + v_L + v_C = E.$$

または

$$L\frac{di}{dt} + R_i + \frac{1}{C}\int idt = E.$$

または

$$L\frac{di}{dt} + R_i + \frac{1}{C}\int idt = E.$$

例題 1.18 R, L, E が定数, $i(0) = I_0$ の LR 回路に流れる電流を求めよ.

解 Kirchhoff の第 2 法則より

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

標準形に直すと

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}.$$

これより積分因子 μ は $e^{Rt/L}$ となる．積分因子を標準形にかけて整理すると

$$d(e^{Rt/L}i) = \frac{E}{L}e^{Rt/L}dt.$$

よって一般解は

$$i = \frac{E}{R} + ce^{-Rt/L}$$

となる．ここで初期条件を用いると，$i(0) = I_0$ より $c = I_0 - (E/R)$. よって

$$i = \frac{E}{R} + (I_0 - \frac{E}{R})e^{-Rt/L}. \blacksquare$$

1.6.1 演習問題

1. 次の微分方程式を解け.

(a) $y'\cos x - y\sin x + e^x = 0$　(b) $y' + 2xy = 2x$

(c) $xy' + y = x\sin x$　(d) $xy' + (1+x)y = e^{-x}\sin 2x$

2. 次の初期値問題を解け.

(a) $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x},\ y(0) = 2$

(b) $(x\log x)y' - y = \log x,\ y(e) = -1$

(c) $y' + y = f(x),\ y(0) = 0,\ f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$

(d) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x,\ y(0) = -1$

3. $R = 10\Omega, E = 20V, L = \begin{cases} 5 - t, & 0 \le t \le 5 \\ 0, & 5 \le t \end{cases}$ の RL 回路で $i(0) = 0$ のとき，$i(t)$ を求めよ.

1.7 Bernoulii, Riccati の方程式

ここでは適当な変換により線形微分方程式に帰着できる微分方程式について考えます.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha \ (\alpha \neq 0, 1)$$

で表わされる微分方程式を **Bernoulli の方程式 (Bernoulli's equation)** といいます. この方程式の両辺に $y^{-\alpha}$ をかけると

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{(1-\alpha)} = Q(x)$$

ここで

$$u = y^{(1-\alpha)}$$

を用いて変換を行なうと，$u = y^{(1-\alpha)}$,$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ より

$$\frac{1}{(1-\alpha)}u' + P(x)u = Q(x)$$

を得る．これは u について線形なので前節で学んだ方法で解くことができます．

例題 1.19 $y' + \frac{1}{x}y = -x^3y^2$ を解け．

解 この方程式は Bernoulli の方程式である．そこで y^{-2} を両辺にかけて整理すると

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = -x^3$$

となる．ここで $u = y^{-1}$ とおくと $u' = -y^{-2}y'$ より

$$-u' + \frac{1}{x}u = -x^3$$

を得ます．これは u について線形なので標準形に直し，積分因子 μ を求めると $\mu = e^{-\int 1/x dx} = e^{-\log x} = 1/x$ となる．これを標準形にかけると

$$d(\frac{u}{x}) = x^2 dt$$

より一般解

$$u = y^{-1} = \frac{x^4}{3} + cx$$

を得る． ■

Bernoulli の方程式を解くときにあらわれた $y^{-\alpha}y' + P(x)y^{(1-\alpha)} = Q(x)$ の形からもっと一般的な場合を考えることができます．

$$\frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx} + P(x)f(y) = Q(x)$$

において $u = f(y)$ とおくと，$\frac{du}{dx} = \frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx}$ より

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x)$$

を得ます．

例題 1.20 $\cos y\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\sin y = 1$ を解け．

解 $u = \sin y$ とおくと $\frac{du}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$．よって与えられた微分方程式は

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = 1$$

と表わせる．これは u について線形なので積分因子 μ を求めると $\mu = x$．したがって一般解は

$$u = 1 + cx^{-1}.$$

ここで $u = \sin y$ を代入すると

$$\sin y = 1 + cx^{-1}$$

を得る． ■

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

の形をした微分方程式を **Riccati の方程式 (Riccati's equation)** といいます．この微分方程式のひとつの解 $f(x)$ がわかった場合

$$y = f(x) + \frac{1}{u}$$

とおくと，u に関する線形微分方程式を得ます．

例題 1.21 $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x$ の解 $f(x) = 1$ が与えられているとき，方程式を解け．

解 この微分方程式は Riccati の方程式である．$f(x) = 1$ はこの方程式のひとつの解であるから

$$y = 1 + \frac{1}{u}$$

とおくと $y' = -u'/u^2$．これらを微分方程式に代入すると，

$$-\frac{u'}{u^2} = (1-x)(1+\frac{1}{u})^2 + (2x-1)(1+\frac{1}{u}) - x.$$

整理すると u に関する線形微分方程式

$$u' + u = 1 - x$$

を得る．これより積分因子 $\mu = e^{\int dx} = e^x$ を得，これを両辺にかけると

$$d(e^x u) = e^x(1-x)dx.$$

よって

$$u = 2 - x + ce^{-x}.$$

ここで $y = 1 + 1/u$ より

$$y = 1 + \frac{1}{2 - x + ce^{-x}}$$

となる．■

1.7.1 演習問題

1. 次の微分方程式を解け．

(a) $xy' - y = -y^2$　　(b) $xy' + y = y^2 \log x$

(c) $y' - y\cos x + y^2 \cos x = 0$

2. 次の微分方程式を解け．

(a) $yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0$　(b) $(y+1)y' + x(y^2+2y) = x$

3. 次の微分方程式を解け．

(a) $x^2y' = -x^2y^2 - 4xy - 2$, ただし $f(x) = -2/x$ は解

(b) $xy' = y - xy^2 + x^3$

1.8 非正規形方程式

1階微分方程式 $F(x,y,y')=0$ が $y'=f(x,y)$ で書き表されるとき，この微分方程式を正規形方程式とよびます．これまで学んできた微分方程式はすべて正規形でした．ここでは，正規形ではない微分方程式について学びます．簡略化のために，以下では記号

$$p=y'=\frac{dy}{dx}$$

を用います．

例題 1.22 $p^2+(2x-y^2)p-2xy^2=0$ を解け．

解 p について求める．因数分解すると $(p+2x)(p-y^2)=0$ となる．この式を満たすには $p+2x=0$ または $p-y^2=0$ を満たすことである．$p+2x=0$ の一般解は $y+x^2+C=0$. また，$p-y^2=0$ は変数分離より一般解は $xy+Cy+1=0$ となる．これより，求める一般解は

$$(y+x^2+C)(xy+Cy+1)=0$$

となる．

例題 1.23 $xp^2-2yp=x$ を解け．

解 p について求めると，解の公式より，

$$p=\frac{y\pm\sqrt{y^2+x^2}}{x}$$

ここで，$p=\frac{dy}{dx}$ より，この式は同次形となる．したがって $y=vx$ とおくと，$v+x\frac{dv}{dx}=v\pm\sqrt{1+v^2}$. これより，

$$\int\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=\pm\int\frac{dx}{x}$$

$$\log|v+\sqrt{1+v^2}|=\pm\log|x|+C$$

$$\log|\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}|\mp\log|x|=C$$

よって，

$$y\mp\sqrt{x^2+y^2}=C$$

こうして一般解は

$$(y-\sqrt{x^2+y^2}-C)(y+\sqrt{x^2+y^2}-C)=0$$

これを変形すると，$y=\frac{C^2-x^2}{2C}=\frac{C}{2}-\frac{x^2}{2C}$

例題 1.24 $y=p+p^2$ を解け．

解 p について解くと，

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{-1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$$

となり，これまで学んだどのテクニックでも解けない．そこで，別の方法を考える．

まず，両辺を x で微分すると，

$$p = \frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx} = (1+2p)\frac{dp}{dx}$$

したがって，$\frac{(1+2p)dp}{p} = dx$ より，$\log|p| + 2p = x + C$．よって，一般解は p をパラメターとする表示

$$x = \log|p| + 2p + Cy = p + p^2$$

と表す．

例題 1.25 $yp^2 + 2xp = y$ を解け．

解 p について解くと，$p = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$．これは同次形であるが，$y = vx$ とおいたのでは解けない．そこで，別の方法を考える．この式は x について解くことができ，$x = y(\frac{1}{2p} - \frac{p}{2})$ となる．この両辺を y で微分すると，

$$\frac{1}{p} = p(\frac{1}{2p} - \frac{p}{2}) - y(\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2})\frac{dp}{dy}$$

これより，

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{\frac{1+p^2}{2p}}{y(\frac{1+p^2}{2p^2})} = -\frac{p}{y}$$

整理すると，$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$ より $\log|p| = -\log|y| + C$, $py = C$ となる．これを用いて $yp^2 + 2xp = y$ から p を消去すると，一般解

$$C^2 + 2xC = y^2$$

を得る．

例題 1.26 $x = 2p + \log|p|$ を解け．

解 p について解くことができないので，両辺を y で微分すると，

$$\frac{1}{p} = 2\frac{dp}{dy} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dy} = (2 + \frac{1}{p})\frac{dp}{dy}$$

これより，$(2p+1)dp = dy$，$p^2 + p + C = y$ となり，一般解は p をパラメターとして，

$$x = 2p + \log|p|,\ y = p^2 + p + C$$

1.8.1 演習問題

1. 次の多項式形の微分方程式を解け．ただし，$p = \frac{dy}{dx}$．

(a) $p^2 - y^2 = 0$　　(b) $p^2 - 5p + 6 = 0$

(c) $y^2 + xyp - x^2p^2 = 0$　　(d) $xy(1-p^2) = (x^2 - y^2)p$

(e) $(x+2y)p^3 + 3(x+y)p^2 + (2x+y)p = 0$

(f) $p^3 - 2p^2 + (2y - x^2 - \frac{y^2}{x^2})p - 2(2y - x^2 - \frac{y^2}{x^2}) = 0$

2. 次の微分方程式を解け．ただし，$p = \frac{dy}{dx}$．

(a) $2x^3 = x^4p + p^3$　　(b) $y + p^2 - 5xp + 5x^2 = 0$

(c) $x^4p^2 - xp - y = 0$　　(d) $x = 2p + \log p^2$

(e) $x^2 = 1 + p^2$

1.9 Clairaut の微分方程式

$p = \frac{dy}{dx}$ とするとき，

$$y = xp + f(p) \tag{1.1}$$

の形の微分方程式を**クレーロ (Clairaut) の微分方程式**といいます．この式の両辺を x について微分すると

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

よって，

$$\frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0$$

となります．これより，

$$\frac{dp}{dx} = 0 \text{ または } (x + f'(p) = 0$$

まず，$\frac{dp}{dx} = 0$ より，$p = C$ を得るので，式 (1.1) に代入すると，一般解

$$y = Cx + f(C) \tag{1.2}$$

を得ます．

次に，$x + f'(p) = 0$ の場合は，式 (1.1) と連立させたパラメター表示

$$x = -f'(p),\ y = -pf'(p) + f(p) \tag{1.3}$$

として，式 (1.1) の 1 つの解が得られますが，これは式 (1.2) の特殊解としては得られないので，式 (1.1) の**特異解**です．つまり，式 (1.1) は一般解 (1.2) と特異解 (1.3) を持ちます．

ここで，特異解についてもう少し詳しく学ぶために包絡線について考えます．式 (1.2) は任意の定数 C により，直線群 $\{\gamma_C : y = Cx + f(C), C \text{ 任意 }\}$ を与えます．この直線群の**包絡線 (envelope)**E とは，式 (1.2) の各直線 $\gamma_C : y = Cx + f(C)$ がすべて E に接し，また E のどの点も 1 つの γ_C の接点となっているような曲線 E のことです．

直線群と包絡線は，例えば，壁に立てかけられた長さ 1m の棒を壁についた状態で床まで動かしたとき棒が作る直線が直線群で，これらの直線すべてに接するような曲線が包絡線です．，E の任意の点 (x_0, y_0) における E の接線の勾配を p_0 とします．(x_0, y_0) で E に接する直線 γ_{C_0} をとると，γ_{C_0} は (x_0, y_0) を通り，傾き $C_0 = p_0$ となり，(1.2) が (1.1) を満たすので，

$$y_0 = x_0p_0 + f(p_0)$$

となります．つまり，E の任意の点とその点の接線の勾配は (1.1) を満たすので，E は (1.1) の 1 つの解曲線です．したがって，解直線群 (1.2) の**包絡線の方程式は (1.1) の解**となります．

包絡線の方程式の求め方

$y = Cx + f(C)$ より，直線群を $\{\gamma_C : g(x, y, C) = Cx + f(C) - y = 0, C \text{ 任意 }\}$ とします．ここで，包絡線 E が存在したとして，E と $g(x, y, C) = 0$ との接点の座標を $(x(C), y(C))$ とすると，

$$g(x(C), y(C), C) = 0$$

を得ます．これを C で微分すると

$$\frac{dg}{dC} = g_x\frac{dx}{dC} + g_y\frac{dy}{dC} + g_C = 0$$

g の全微分を求めると

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_C dC = 0$$

ここで，C を固定し，点 $(x(C), y(C))$ での接線の傾き $\frac{dy}{dx}$ を求めると，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x}{g_y}$$

よって，$g_C = 0$．これより，包絡線は

$$\begin{cases} g(x, y, C) = 0 \\ g_C = 0 \end{cases}$$

から，x と y を C の関数として解けばよいことが分かります．

実際，$Cx + f(C) - y = 0$ と $x + f'(C) = 0$ より，$x = -f'(C), y = -Cf'(C) + f(C)$ となり，パラメター表示としては，式 (1.3) になります．したがって，式 (1.1) は解直線群の包絡線です．

例題 1.27 $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$ を解け．

解 $f(p) = \sqrt{1 + p^2}$ とすると，一般解は $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$ である．次に包絡線を求めると，

$$\begin{cases} y = Cx + \sqrt{1 + C^2} \\ x + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} = 0 \end{cases}$$

より，$y = C(-\frac{C}{\sqrt{1+C^2}}) + \sqrt{1 + C^2} = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}}$．これより C を消去すると，

$$x^2 + y^2 = 1 \ (y > 0)$$

となる．したがって，特異解は $y = \sqrt{1 - x^2}$

$p = \frac{dy}{dx}$ とするとき，

$$y = xg(p) + f(p) \tag{1.4}$$

の形の微分方程式を**ダランベール (d'Alembert) の微分方程式**といいます．この式の両辺を x について微分すると

$$p = g(p) + xg'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

よって，

$$-(xg'(p) + f'(p))\frac{dp}{dx} = g(p) - p$$

となります．ここで，$g(p) - p \neq 0$ の場合には，

$$(g(p) - p)\frac{dx}{dp} = -(xg'(p) + f'(p)$$

となり，p を独立変数，x を従属変数とする 1 階線形微分方程式

$$\frac{dx}{dp} + \frac{g'(p)}{g(p) - p}x = -\frac{f'(p)}{g(p) - p}$$

を得ます．積分因子 $\mu = e^{\int \frac{g'(p)}{g(p)-p}dp}$ より，

$$e^{\int \frac{g'(p)}{g(p)-p}dp}x = \int \left(e^{\int \frac{g'(p)}{g(p)-p}dp}(-\frac{f'(p)}{g(p)-p}) \right) dp$$

より，

$$x = \phi(p) + C\phi(p) \ (C \text{ は任意の定数})$$

の形で与えられます．これと，式 (1.4) より，p を消去したものが一般解です．

$g(p) - p = 0$ の場合は，クレーローの微分方程式なので，すでに解き方は知っている．

例題 1.28 $y = 2xp + p^2$ を解け．

解 両辺を x で微分すると，

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

これより，

$$-p = (2x + 2p)\frac{dp}{dx}$$

ここで，$g(p) - p = p \neq 0$ ならば，

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2$$

の 1 階線形微分方程式を得る．積分因子 $\mu = e^{\int \frac{2}{p}dp} = p^2$ より，

$$p^2x = \int -2p^2 dp = -\frac{2}{3}p^3 + C$$

これより，

$$3xp^2 + 2p^3 = C$$

が得られる．これと与式から p を消去する．まず，$y = 2xp + p^2$ より，$2py = 4xp^2 + 2p^3$ となり，これを $3xp^2 + 2p^3 = C$ に代入すると，$3xp^2 + 2py - 4xp^2 = C$. これより，$2py - xp^2 - C = 0$. ここで，$y = 2xp + p^2$ より，$2py - x(y - 2xp) - C = 2py + 2x^2p - xy - C = 0$. よって，$p = (xy + C)/(2(y + x^2)$. これを $y = 2xp + p^2$ に代入すると

$$y = 2x\frac{xy + C}{2(x^2 + y)} + \frac{(xy + C)^2}{4(x^2 + y^2}$$

これを変形して，一般解

$$4(x^2 + y)^2 y = (xy + C)(4x^3 + 5xy + C)$$

を得る．

$p = 0$ の場合，$y = 0$ となり，$y = 0$ も解である．これは一般解で $C = 0$ として得られるので，特殊解である．

例題 1.29 $y = xp^2 + p^2$ を解け．

解

1.9.1　演習問題

1. 次の微分方程式を解け．ただし，$p = \frac{dy}{dx}$.
 $(a)\ y = xp - p^2$　　$(b)\ y = xp + \frac{1}{p}$
 $(c)\ y = xp + e^p$　　$(d)\ y = (x-1)p + \frac{1}{p}$
 $(e)\ (y - xp)(p+1) = 1$
2. 次の微分方程式のすべての解を求めよ．ただし，$p = \frac{dy}{dx}$.
 $(a)\ y = 2xp - p^2$　$(b)\ y = xp^2 + p$
 $(c)\ y = xp^2 + p^2$

1.10　数値計算法

ここでは 1 階の微分方程式 $y' = f(x, y)$ について考えます．この微分方程式は平面上の点 (x, y) における関数 y の傾きを表わしていると考えることができます．よって各点 (x_0, y_0) に傾き $f(x_0, y_0)$ を合わせたものを考えます．これをグラフであらわすためにまず $f(x, y) = c$ を満たす曲線を描きます．この曲線は**等傾曲線 (isocline)** とよばれています．そしてこの曲線上にいくつもの点をとり，それぞれの点で傾き $f(x, y)$ をもった短い線分を描きます．この線分の集まりを微分方程式 $y' = f(x, y)$ の**方向場 (direction field)** といいます．とくに初期値問題の解曲線は初期値 (x_0, y_0) から方向場に沿って描かれた曲線で表わすことができます．

私たちはここまで微分方程式の解を形式的に求めてきました．そのため特異解については考えないことにしてきました．ここでは方向場を用いて特異解を含めた**完全解 (complete solution)** について学びます．

例題 1.30 $y' = \sqrt{1 - y^2}$ の完全解を求めよ．

解 形式的に解くと変数分離形より

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx$$

$$\sin^{-1} y = x + c$$

$$y = \sin(x + c)$$

となる．ところがこの解はどこか変である．元の微分方程式をみると y' は負にならない．しかし求めた解の導関数は負になる．そこで等傾曲線を用いて方向場を描く．

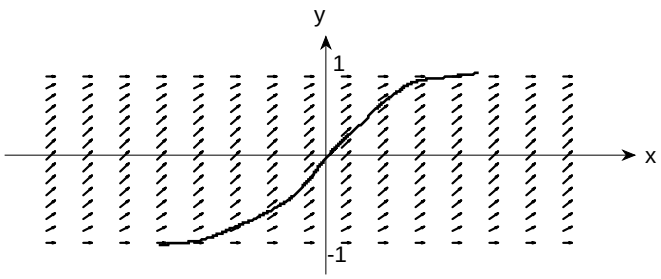

図 1.2 解曲線

これから $y \equiv 1,\ y \equiv -1$ も解であることがわかる．また正弦曲線が $y = 1$ と $y = -1$ に滑らかにつながっている．これより完全解は $y = 1$ または $y = -1$ または

$$y = \begin{cases} -1, & x + c \leq -\frac{\pi}{2} \\ \sin(x + c), & -\frac{\pi}{2} \leq x + c \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1, & x + c \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

となる． ■

次にグラフによる解法から数値解を得ることを考えます．グラフによる解法では方向場を用いて解曲線を得ます．残念ながら他の情報が与えられない限り直接グラフから解曲線の方程式を求めることはできません．しかし解曲線の傾きの変化を短い区間ごとに描くと，近似曲線は多角直線になり，それぞれの区間における直線の式を求めることができます．

点 (x_0, y_0) を通る近似直線の傾きは $f(x_0, y_0)$ より，その方程式は

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0.$$

これより $x_1 = x_0 + h$ のとき， $y_1 = f(x_0, y_0)h + y_0$ を得ます．次に点 (x_1, y_1) と傾き $f(x_1, y_1)$ より

$$y = f(x_1, y_1)(x - x_1) + y_1.$$

これを目的の x の値にとどくまで繰り返します．

例題 1.31 $y' = y + x^2, y(0) = 1$ のとき $y(3)$ の値を求めよ．ただし $h = 1$ とする．

解 $(x_0, y_0) = (0, 1)$ より $y = 1+x$ を得る．つぎに $(x_1, y_1) = (1, 2)$ より $y = 3x-1$．最後に $(x_2, y_2) = (2, 5)$ より $y = 9x - 13$．よって $y(3) = 14$ となる．この問題は線形なので求積法で求めることができ $y = 3e^x - x^2 - 2x - 2$ となる，よって $y(3) = 3e^3 - 17 \doteqdot 43.3$ となる． ■

気づいたと思いますがこの場合，近似直線による方法には誤差がかなりあります．誤差を少なくするためには h をもっと小さくすればよいのですが h を小さくすると計算が面倒になります．そこでコンピュータを使って計算します．あまり実用的ではありませんが，もっと実用的なものの基礎となっている **Euler 法 (Euler's method)** とよばれている簡単なアルゴリズムを記しておきます．

初期値問題

$$y' = f(x, y),\ y(a) = b$$

の近似解は次の方法で求まる.

$$\begin{array}{ll} x_0 = a & y_0 = b \\ x_1 = a + h & y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h \\ x_2 = a + 2h & y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h \\ \vdots & \vdots \\ x_n = a + nh & y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h \end{array}$$

1.10.1　演習問題

1. 次の微分方程式の方向場と $(1,0), (0,1), (1,1)$ を通る解曲線を描きなさい.

(a) $y' = y$

(b) $y' - xy + 1 = 0$

2. Euler 法を用いて次の初期値問題の近似解を求めよ.

(a) $y' = x + y,\ y(0) = 0$ のとき $y(3)$ を求めよ. ただし $h = 1$

(b) $y' = x^2,\ y(1) = 2$ のとき $y(4)$ を求めよ. ただし $h = \frac{1}{2}$

第 2 章

線形微分方程式

2.1 線形微分方程式の解

前の章で 1 階の微分方程式について学びました．1 階の微分方程式を解くうえで，線形か非線形かはそれほど重要なことではありませんでした．しかし高階の微分方程式では話が違います．高階の微分方程式の中で求積法で解くことができるのは，一般に線形の微分方程式だけです．そこでこの章では高階線形微分方程式について学びます．

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

で表わされる微分方程式を **n 階線形微分方程式 (nth-order linear differential equation)** といいます．また $a_i(x)$ を**係数関数 (coefficient function)**，$f(x)$ を**入力関数 (input function)** といいます．

$f(x) \equiv 0$ のときこの方程式を**同次方程式 (homogeneous equation)** といいます．この微分方程式の左辺を $L(y)$ と省略した形で表わすことがよくあります．こうすると高階線形微分方程式は

$$L(y) = f(x)$$

で表わせます．L は**微分作用素 (differential operator)** とよばれ線形性をもっています．つまり任意の関数 y_1, y_2 と任意の定数 c_1, c_2 に対して

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2)$$

が成り立ちます (確かめて下さい)．さて L の線形性から次の定理が得られます．

定理 2.1 同次方程式の解の集合はベクトル空間をなす．

証明を行なう前にベクトル空間の復習をしておきます．

ベクトル空間

2 つの**幾何ベクトルの和 (vector addition)** は，一方の幾何ベクトルの尻尾 (始点) をもう一方の幾何ベクトルの頭 (終点) につけることにより定義されます．よって 2 つの幾何ベクトルの和は最初の幾何ベクトルの尻尾から次の幾何ベクトルの頭を結んだ有向線分で表わせます．ほかの見方をすると，2 つの幾何ベクトル $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ の和 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ によって作られる平行四辺形の対角線として表わせます．

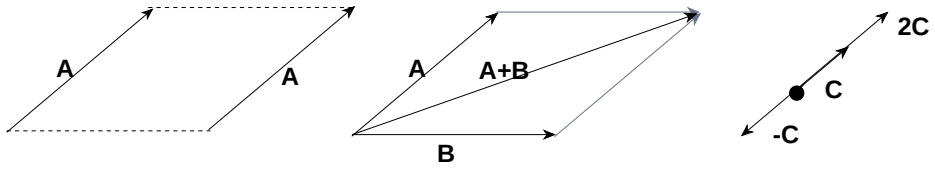

図 2.1　ベクトルの和とスカラー倍

幾何ベクトルの和は次のような性質をもっています．各自確かめておいて下さい．

1．2 つの幾何ベクトルの和はまた幾何ベクトルである．(このことを和は閉じているといいます)
2．任意の幾何ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ において，$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ が成り立つ．(交換法則)
3．任意の幾何ベクトル $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ において，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ が成り立つ．(結合法則)
4．任意の幾何ベクトル $\mathbf{A}$ に対して，$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$ となる幾何ベクトル $\mathbf{0}$ が存在する．(零元の存在)
5．任意の幾何ベクトル $\mathbf{A}$ に対して，$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{0}$ となる幾何ベクトル $\mathbf{B}$ が存在する．(逆元の存在)

幾何ベクトルの**スカラー倍 (scalar multiplication)** $\alpha\mathbf{A}$ は幾何ベクトル $\mathbf{A}$ を実数 α の大きさ $|\alpha|$ 倍することで定義されます．ただし，α が負のときは方向が反対になります．幾何ベクトルのスカラー倍は次のような性質をもっています．各自確かめておいて下さい．

6．幾何ベクトルのスカラー倍はまた幾何ベクトルである．
7．任意の実数 α と β に対して，$\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$ が成り立つ．(結合法則)
8．任意の実数 α と β に対して，$(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$ が成り立ち，任意の幾何ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に対して，$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ が成り立つ．(分配法則)
9．$1\mathbf{A}=\mathbf{A}$;　$0\mathbf{A}=\mathbf{0}$;　$\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$ が成り立つ．

平面や空間の幾何ベクトルにおいて上の 1 から 9 までの性質が成り立ちます. このとき，平面や空間の幾何ベクトルの集まりを**幾何ベクトル空間 (geometric vector space)** といいます．幾何ベクトル空間はしばしばユークリッド空間ともよばれ，これから学ぶもっと抽象的なベクトル空間の特殊な場合です．一般に和およびスカラー倍が上の性質 1 から 9 を満たす物の集まりを**ベクトル空間 (vector space)** とよび，そこに含まれる物を**ベクトル (vector)** といいます．よってこれから登場してくるベクトルには，幾何ベクトルに似ても似つかない物が沢山あります．

ここでは幾何ベクトル空間には似ても似つかないベクトル空間を紹介します．まず区間 (a,b) で連続な関数の集まりを $C(a,b)$ で表わし，区間 (a,b) で**区分的に連続な関**

数 (piecewise continuous function) の集まりを $PC(a,b)$ で表わします[*1]．つまり $C(a,b) = \{f(x) : f(x)$ は (a,b) で連続 $\}$，$PC(a,b) = \{f(x) : f(x)$ は区間 (a,b) で区分的に連続 $\}$.

$C(a,b)$ と $PC(a,b)$ の $f(x)$ と $g(x)$ に対して，和およびスカラー倍を次のように定義します.

1. $f+g$ は点 x で $f(x)+g(x)$ の値をとる関数.
2. αf は点 x で $\alpha f(x)$ の値をとる関数.

例題 2.1 $f(x) = x, g(x) = x^2$ のとき，$f+g, \frac{1}{2}f, 2g$ を求めよ.

解 $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x+x^2$
$(\frac{1}{2}f)(x) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{x}{2}$
$(2g)(x) = 2g(x) = 2x^2$ ■

この和とスカラー倍によって，ベクトル空間になるための 9 個の性質が $C(a,b)$ において成り立つことを示すのは，それほど難しくはないでしょう．よって $C(a,b)$ もベクトル空間となり，ベクトル空間に含まれる $f(x)$ や $g(x)$ をベクトルとよぶことができます．幾何ベクトルと姿や形が違いますが立派なベクトルです.

証明 同次方程式の解は明らかに微分可能．よって解の集合は連続な関数の集合の部分集合になる．したがって解の集合がベクトル空間となるためには，解の一次結合がまた解であることを示せばよい．そこで $L(y_1) \equiv 0,\ L(y_2) \equiv 0, y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ とおくと

$$\begin{aligned} L(y_3) &= L(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= L(c_1y_1) + L(c_2y_2) \\ &= c_1L(y_1) + c_2L(y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より解の一次結合はまた解である． ■

同次方程式の解の集合はベクトル空間になるのでこれを解空間とよびます．次に一次独立という概念を取り入れるため，これから扱う同次方程式は区間 I で連続な関数 $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を係数とするものとします.

定理 2.2 同次方程式の解空間の基底は同次方程式を満たす n 個の一次独立な関数である.

解空間のすべてのベクトルを一次独立なベクトルの一次結合で表わせるとき，この一次独立なベクトルの集まりを解空間の基底といいます．また解空間の基底のことを**基本解 (fundamental solution)** といいます．基底がわかれば解空間がわかるので，私たちは n 個の一次独立な解を見つければ，この定理よりすべての解を見つけたことになります．そこで n 個の解が一次独立かどうかということは非常に大事になってきます．Wronski はこの問題を解決するために次のような行列式を考えました．この行列式を **Wronski の**

[*1] 区間 I で定義された関数 f(t) が次の条件 (i),(ii) を満たすとき，f(t) は区間 I で区分的に連続であるという.
(i) f(t) は区間 I で有限個の点を除いて連続である.
(ii) f(t) の不連続点 tt_0 では，左側および右側極限値が存在する.

行列式 (Wronskian determinant) といいます.

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \cdots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \cdots, & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \cdots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

定理 2.3 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が区間 I における同次方程式の解ならば $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ は I において恒等的に 0 か，けっして 0 にならないかのどちらかである.

証明 ($n = 2$ の場合) y_1, y_2 は $L(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ の解であるから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1 y_1' - a_0 y_1 & -a_1 y_2' - a_0 y_2 \end{vmatrix} \\ &= -a_1 W(y_1, y_2). \end{aligned}$$

よって

$$\frac{d}{dx} W(y_1, y_2) + a_1(x) W(y_1, y_2) = 0$$

が得られる．これは線形微分方程式なので，積分因子 $\mu(x) = \exp(\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt)$ をかけると

$$\frac{d}{dx}(\mu(x) W(y_1, y_2)) = 0$$

が導かれる．これを積分して

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt) \ (c : \text{定数}).$$

ここで $x = x_0$ とおくと，$c = W(y_1, y_2)(x_0)$ となり,

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(x_0) \exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt)$$

を得る．これが恒等的に 0 か，けっして 0 にならないかは明らかである． ■

定理 2.4 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が区間 I における同次方程式の解ならば，次の条件は同値である.

(1) $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ は区間 I 上で一次独立である.

(2) $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0, \ (x \in I)$

証明 ($n = 2$ の場合) y_1, y_2 の一次結合を 0 とおくと

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0.$$

この式を x について微分すると

$$c_1 y_1' + c_2 y_2' = 0$$

を得る．ここで Cramer の公式を使って，この連立方程式を解くと,

$$c_1 = \frac{0}{W(y_1, y_2)}, \ c_2 = \frac{0}{W(y_1, y_2)}.$$

よって $\{y_1, y_2\}$ が一次独立ならば，$c_1 = c_2 = 0$. つまり $W(y_1, y_2) \neq 0$. また逆に，$W(y_1, y_2) \neq 0$ ならば，$c_1 = c_2 = 0$ となり，$\{y_1, y_2\}$ は一次独立. ■

この 2 つの定理よりある x で $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ ならば，区間 I 内のすべての x で $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ がいえます.

例題 2.2 $y''' = 0$ を解け.

解 解空間は三次元で，$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ は明らかにこの微分方程式の解です．そこで一次独立か調べると

$$W(1, x, x^2) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

よって Wronski の行列式が 0 でないので一次独立．また一般解は

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

となる. ■

例題 2.3 $y = e^{mx}$ が $L(y) = y'' + 3y' + 2y = 0$ の解のとき，解空間の基底 (基本解) を求めよ.

解

$$\begin{aligned} L(e^{mx}) &= m^2 e^{mx} + 3me^{mx} + 2e^{mx} \\ &= e^{mx}(m^2 + 3m + 2) \\ &= e^{mx}(m + 1)(m + 2) \end{aligned}$$

より $m = -1, -2$ のとき，$L(e^{mx}) \equiv 0$ となる．また

$$W(e^{-x}, e^{-2x}) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-2x} \neq 0$$

より $\{e^{-x}, e^{-2x}\}$ は解空間の基底 (基本解) となる. ■

次に n 階の線形微分方程式の解について学びます.

定理 2.5 y_p を n 階線形微分方程式 $L(y) = f(x)$ の特殊解，y_c を同次方程式 $L(y) = 0$ の一般解とすると，$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ は $L(y) = f(x)$ の一般解である.

証明 仮定より $L(y_p) = f(x), L(y_c) = 0$ であるから，L の線形性より

$$L(y_c + y_p) = L(y_c) + L(y_p) = f(x).$$

よって，$y_c + y_p$ は $L(y) = f(x)$ の解である．また $y_c(x)$ は n 個の任意の定数を含んでいるので，$y_c(x) + y_p(x)$ は一般解である. ■

$y_c(x)$ のことを**余関数 (complementary function)** といいます．この定理より $L(y) = f(x)$ のひとつの特殊解がわかっているなら，一般解をみつけるには $L(y) = 0$ の余関数を見つければよいことがわかります.

例題 2.4 $x - 1$ は $y'' + 3y' + 2y = 2x + 1$ の解であることを示し，一般解を求めよ.

解 $y = x - 1, y' = 1, y'' = 0$ より $y'' + 3y' + 2y = 2x + 1$．また $L(y) = 0$ の解は例題 2.2 より

$$y_c(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}.$$

よって，一般解は

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}}_{y_c} + \underbrace{x - 1}_{y_p}$$

である．■

あるときは入力関数 $f(x)$ が 2 つの関数 $f_1(x), f_2(x)$ の和で与えられることもあります．こんなときは 2 つの方程式 $L(y) = f_1(x),\ L(y) = f_2(x)$ を考えると便利です．

定理 2.6 $L(y) = f_1(x)$ の解を y_{p_1},$L(y) = f_2(x)$ の解を y_{p_2} とすると，$L(y) = f_1(x) + f_2(x)$ の解は $y_{p_1} + y_{p_2}$ である．

この定理は**重ね合わせの原理 (principle of superposition)** といいます．この原理を使うと，たとえば

$$y'' - 5y' + 2y = \sin x + x^2$$

の一般解は
(1) $y'' - 5y' + 2y = 0$ の解 y_c
(2) $y'' - 5y' + 2y = \sin x$ の解 y_{p_1}
(3) $y'' - 5y' + 2y = x^2$ の解 y_{p_2}
の一次結合．つまり

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2}$$

で与えられます．

2.1.1 演習問題

1. 次の微分方程式は e^{mx} の形をした解をもっている．n 個の一次独立な解を求め，一般解を表わせ．またこれらの解が一次独立であることを Wronski の行列式を用いて示せ．
(a) $y''' + y'' - 10y' + 8y = 0$　(b) $y'' + 4y' + 3y = 0$
(c) $y'' - y' = 0$　(d) $y''' - 8y'' + 7y' = 0$
2. 次の微分方程式は $\cos mx, \sin mx$ の形をした解をもっている．一般解を求めよ．
(a) $y'' + 4y = 0$　(b) $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$
3. 次の微分方程式は x^m の形をした解をもっている．一般解を求めよ．
(a) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$　(b) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

2.2 階数低減法

高階線形微分方程式 $L(y) = f(x)$ の係数が定数でないとき，一般解を求めるのは非常に難しかったり，不可能だったりします．ただ $L(y) = 0$ の解がひとつでもわかれば高階線形微分方程式 $L(y) = f(x)$ を少し簡単な形に直すことができます．わかりやすいように 2 階の線形微分方程式を用いて示しましょう．

$$L(y) = y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

に対する同次方程式 $L(y) = 0$ の 0 でない解 $y_1(x)$ がわかっているとします．ここで $y = u(x)y_1(x)$ とおいて $L(y) = f(x)$ に代入すると

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a_1(x)(u'y_1 + uy_1') + a_0(x)(uy_1) = f(x).$$

または

$$y_1u'' + (2y_1' + a_1y_1)u' + (y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1)u = f(x)$$

となります．ここで u の係数は $L(y_1) = 0$ より 0 になることに注意して，$u' = w$ とおくと w についての 1 階の線形微分方程式

$$y_1w' + (2y_1' + a_1y_1)w = f(x)$$

を得ます．ここで行なった操作を**階数低減法 (reduction of order)** といいます．

例題 2.5 $y_1 = e^x$ が $y'' - y = 0$ の解であることを利用して次の微分方程式を解け．

$$y'' - y = xe^x.$$

解 $y = uy_1 = ue^x$ とおくと $y' = u'e^x + ue^x, y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$．これらを $y'' - y = xe^x$ に代入すると

$$u''e^x + 2u'e^x = xe^x.$$

または

$$u'' + 2u' = x.$$

ここで $u' = w$ とおくと w についての 1 階の線形微分方程式

$$w' + 2w = x$$

を得る．これを解くと

$$w = c_1e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

となるので両辺を積分して

$$u = \int wdx = -\frac{c_1}{2}e^{-2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + c_2$$

を得る．最後に $y = ue^x$ より一般解

$$y = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2e^x + (\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4})e^x$$

を得る． ■

例題 2.6 $L(x^2) \equiv 0$ を用いて

$$L(y) = y''' + 2x^2y'' - 3xy' + 2y = 0$$

の階数を減らせ．

解 $y = ux^2$ とおくと $y' = u'x^2 + 2ux$, $y'' = u''x^2 + 4u'x + 2u$, $y''' = u'''x^2 + 6u''x + 6u'$ より

$$L(y) = L(ux^2) = x^2u''' + (2x^4 + 6x)u'' + (5x^3 + 6)u' = 0$$

を得る．ここで $u' = w$ とおくと

$$x^2w'' + (2x^4 + 6x)w' + (5x^3 + 6)w = 0$$

となり，階数がひとつ落ちた． ■

2.2.1 演習問題

1. 階数低減法を用いて次の微分方程式を解け.

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y_1 = e^{2x}$　(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,\ y_1 = x^2$

(c) $y'' - y = e^{-x},\ y_1 = e^{-x}$　(d) $y'' + y = \sec x,\ y_1 = \cos x$

2. $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ のひとつの解が $y_1(x)$ のとき，階数低減法をもちいて，もうひとつの解 $y_2(x)$ を求めると

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

で与えられることを示せ．また $\{y_1, y_2\}$ は一次独立であることを示せ.

2.3 高階同次線形微分方程式の解

微分して自分自身の定数倍になるのは指数関数 e^{mx} 以外にありません．もう少し正確にいうと $y' = my$ の完全解は $y = ce^{mx}$ だということです．そこで

$$L(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

の解を捜すとき，その候補として $y = e^{mx}$ をあげます．そのとき

$$L(e^{mx}) = a_n m^n e^{mx} + a_{n-1} m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$$

より e^{mx} が微分方程式 $L(y) = 0$ の解になるための必要十分条件は

$$P(m) = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$$

となります．この多項式 $P(m)$ を**特性多項式 (characteristic polynomial)** といい，$P(m) = 0$ を**特性方程式 (characteristic equation)** といいます．$y = e^{mx}$ の変換により $L(y) = 0$ を解くという問題が，多項式 $P(m) = 0$ を解くという問題に簡素化されました.

例題 2.7 $y'' + 3y' + 2y = 0$ を解け.

解 特性方程式 $m^2 + 3m + 2 = 0$ の根は $m = -1, m = -2$．よって e^{-x}, e^{-2x} は解である．またこの 2 つの関数は例題 2.2 より一次独立．したがって一般解は

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

である．■

例題 2.8 $y'' - 2y' + y = 0$ を解け.

解 特性方程式 $m^2 - 2m + 1 = 0$ の根は $m = 1$．よって $y_1 = e^x$ は解である．この微分方程式は 2 階なので一般解を得るには一次独立な解がもうひとつ必要である．演習問題 2.2.1 よりもうひとつの解 y_2 を求めると

$$\begin{aligned} y_2 &= e^x \int \frac{e^{-\int -2dx}}{e^{2x}} dx \\ &= e^x \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}} dx = xe^x \end{aligned}$$

となる．よって一般解は

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

である． ■

この例題を一般化すると次の定理を得ます.

定理 2.7 特性方程式 $P(m) = 0$ の根 $m = r$ が k 重根ならば $x^n e^{rx}$, $(n = 0, 1, \ldots, k-1)$ は微分方程式 $L(y) = 0$ の解である．また $P(m) = 0$ の根に対応している解の集合は解空間の基底をなす.

証明 $D = \frac{d}{dx}$ とおく．すると

$$L(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

は

$$L(D)y = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y$$

と表わせる．また $L(e^{mx}) = e^{mx} P(m)$ より，$L(D)e^{mx} = e^{mx} P(m)$ と表わせる．ここで $D^i(x^n e^{mx})$ を計算すると,

$$D^i(x^n e^{mx}) = e^{mx}(D + m)^i x^n$$

となるので

$$L(D)x^n e^{mx} = e^{mx} P(D + m)x^n.$$

したがって $m = r$ が k 重根のとき $L(D) = (D - r)^k$ で

$$L(D)x^n e^{rx} = e^{rx} D^k x^n = 0 \ (n = 1, 2, \ldots, k-1).$$

次に $x^n e^{rx}$ $(n = 0, 1, \ldots, k-1)$ が一次独立であることを示す.

$$c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} e^{rx} = 0$$

とおくと

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} = 0.$$

よって $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_{k-1} = 0$. ■

例題 2.9 4 階の線形微分方程式 $L(y) = 0$ の特性方程式 $P(m) = 0$ の根が $m = -3, -3, -3, -3$ とする．このとき一般解を求めよ.

解 定理 2.7 より $e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2 e^{-3x}, x^3 e^{-3x}$ は $L(y) = 0$ の一次独立な解である．よって一般解は

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + c_3 x^2 e^{-3x} + c_4 x^3 e^{-3x}$$

となる． ■

ここまでの例題の方程式の根はすべて実数でしたが，定理 2.7 は複素数の場合にも成り立ちます．ただ対応する解を複素指数関数を用いず，三角関数を用いて表わすことがよくあります.

$L(y)$ の係数を実数とします．$a+bi$ が対応する特性方程式 $P(m)=0$ の特性根ならばその共役 $a-bi$ も特性根です．したがって

$$y_1 = e^{(a+bi)x}, y_2 = e^{(a-bi)x}$$

はともに $L(y)=0$ の解です．ここで **Euler の公式 (Euler's formula)** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と解の線形性により

$$y_3 = \frac{y_1+y_2}{2} = e^{ax}\cos bx,$$
$$y_4 = \frac{y_1-y_2}{2i} = e^{ax}\sin bx$$

も $L(y)=0$ の解です．また $\{y_3, y_4\}$ が一次独立であることは簡単に示せるでしょう．よって，特性方程式の複素数根の k 重根に対する基本解は，次のように表わせます．

$$\{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\cos bx, x^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx, x^{k-1}e^{ax}\sin bx\}.$$

例題 2.10 $y''+2y'+4y=0$ を解け．

解 特性方程式 $m^2+2m+4=0$ の根は $m=-1\pm i\sqrt{3}$．よって

$$\{e^{-x}\cos\sqrt{3}x, e^{-x}\sin\sqrt{3}x\}$$

は基本解である．これより一般解は

$$y = c_1e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_2e^{-x}\sin\sqrt{3}x$$

で与えられる．ちなみに

$$\{e^{(-1+i\sqrt{3})x}, e^{(-1-i\sqrt{3})x}\}$$

も基本解である． ■

ここまでをまとめると，同次定数係数線形微分方程式の解はいつも

$$\{x^ke^{ax}, x^ke^{ax}\cos bx, x^ke^{ax}\sin bx\}$$

の一次結合で表わされるということです．

次の例題は **Newton の第 2 法則 (Newton's second law)** と **Hooke の法則 (Hooke's Law)** を用いて，一端を固定したバネにつり下げられた物体の運動の状態を調べるものです．そこで復習．

物体の質量を m，バネの弾力定数を k，ダッシュポットの摩擦による減衰力は物体の速度 dy/dt に比例するとき，この物体に働いている力は

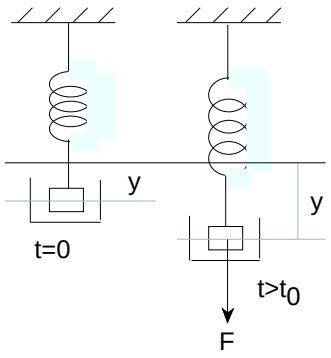

図 2.2　バネの振動

1. $F_1 \quad = mg$　重力が物体に働く力
2. $F_2 \quad = -ky - mg$　バネが元に戻ろうろとする力
3. $F_3 \quad = -a\frac{dy}{dt}\ (a > 0)$　ダッシュポットの摩擦による減衰力
4. $F_4 \quad = F(t)$　外部から物体に働いている力

で与えられます．また垂直方向の力の差は Newton の第 2 法則より，質量 m と加速度 $\frac{d^2y}{dt^2}$ の積で表わされます．よって運動方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - ky - mg - a\frac{dy}{dt} + F(t).$$

または

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + ky = F(t)$$

が導けます．

例題 2.11 上端を固定したばねの下端に質量 $30g$ のおもりをつるすと，ばねは $2cm$ 伸びて静止の状態になった．この状態からおもりを $5cm$ 引き下げて手放すとき，そのおもりの運動の状態を調べよ．ただし重力は $g = 980cm/sec^2$ とし，空気抵抗はないものとする．

解 運動方程式は質量 $m = 30$，バネ定数 $k = 30/2 = 15$ より

$$30\frac{d^2y}{dt^2} + 15y = 0$$

となる．これは 2 階の線形なので，特性方程式を求めると

$$m^2 + \frac{1}{2} = 0.$$

よって，$m = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$．これより

$$y = c_1 \cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

初期条件 $y(0) = 5,\ y'(0) = 0$ より

$$y = 5\cos\frac{t}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$

2.3.1 演習問題

1. 次の微分方程式の基本解を求めよ.

(a) $y'' + 9y = 0$　　(b) $y''' + y = 0$

(c) $y''' - 3y' - 2y = 0$　(d) $y^{(5)} + 18y''' + 81y' = 0$

2. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) 4 階の同次線形微分方程式で特性方程式の根が $m = -2, 1, 1, 1$

(b) 6 階の同次線形微分方程式で特性方程式の根が $m = 0, 0, -1 \pm 2i, -1 \pm 2i$

3. 次の初期値問題を解け.

(a) $y'' - y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1$

(b) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$

(c) $y''' + 7y'' + 19y' + 13y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -12$

(d) $y^{(4)} + 2y''' + 10y'' = 0,\ y(0) = 5, y'(0) = -3, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$

2.4 未定係数法

前節で定数係数の同次線形微分方程式 $L(y) = 0$ について学びました．ここでは定数係数の非同次線形微分方程式 $L(y) = f(x)$ の特殊解の求め方について学びます．ただしここで扱う解法は $f(x)$ がある特殊な形，つまり同次線形微分方程式の解の形をしたものに限ります.

$D = \frac{d}{dx}$ とおきます．すると

$$L(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

は

$$L(D)y = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = f(x)$$

と表わせます．ここで $f(x)$ が同次線形微分方程式の解の形をしているとすると，$H(D)f(x) = 0$ を満たす D の多項式 $H(D)$ が存在します．そこでこの方程式の特殊解を y_p とすると

$$H(D)L(D)y_p = H(D)f(x) = 0$$

より特殊解 y_p を見つけるには同次方程式

$$H(D)L(D)y = 0$$

の解の中から

$$L(D)y = f(x)$$

を満たすものを見つければよいことがわかります．この解法のことを**未定係数法 (method of undetermind coefficient)** といいます．次の例題を解く前によく用いられる $H(D)$ をあげておきます.

$$f(x) = x^m \Longrightarrow H(D)f(x) = D^{m+1}x^m = 0$$
$$f(x) = e^{ax} \Longrightarrow H(D)f(x) = (D - a)e^{ax} = 0$$
$$f(x) = e^{ax}\cos bx \Longrightarrow H(D)f(x) = (D^2 - 2aD + a^2 + b^2)e^{ax}\cos bx = 0$$
$$f(x) = e^{ax}\sin bx \Longrightarrow H(D)f(x) = (D^2 - 2aD + a^2 + b^2)e^{ax}\sin bx = 0$$

例題 2.12 $L(y) = y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$ を解け.

解 補助方程式 $L(y) = 0$ の特性方程式は $m^2 - m - 2 = 0$ より特性根 $m = -1, 2$ を得る. よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

となる. 次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求める. $D = \frac{d}{dx}, H(D) = D - 3$ とおくと, $H(D)2e^{3x} = 2(D-3)e^{3x} = 0$ より求める特殊解 y_p は

$$(H(D)L(D))y = 2(D-3)(D^2 - D - 2)y = 0$$

の解である. この方程式の特性方程式は $2(m-3)(m^2 - m - 2) = 0$ より基本解は e^{3x}, e^{-x}, e^{2x} である. よって

$$y_p = Ae^{3x} + Be^{-x} + Ce^{2x}$$

と表わせる. しかし, y_p は $L(D)y_p = f(x)$ を満たさなければならないので $L(D)y = 0$ を満たす $Be^{-x} + Ce^{2x}$ は省いてもよい. したがって特殊解 y_p の形を

$$y_p = Ae^{3x}$$

とおく. これを $L(D)y = 2e^{3x}$ に代入すると

$$L(D)Ae^{3x} = (Ae^{3x})'' - (Ae^{3x})' - 2(Ae^{3x}) = 4Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

となる. よって $A = \frac{1}{2}$. これより特殊解 $y_p = \frac{1}{2}e^{3x}$ を得る. したがって一般解は

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$

で与えられる. ■

例題 2.13 $L(y) = y'' - y' - 2y = e^{-x}$ を解け.

解 補助方程式 $L(y) = 0$ の特性方程式は $m^2 - m - 2 = 0$ より特性根 $m = -1, 2$ を得る. よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

となる. 次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求める. $H(D)e^{-x} = (D+1)e^{-x} = 0$ より, 求める特殊解 y_p は

$$H(D)L(D)y = (D+1)(D^2 - D - 2)y = (D+1)^2(D-2)y = 0$$

の解である. この方程式の基本解は e^{-x}, xe^{-x}, e^{2x} であるが, e^{-x}, e^{2x} は余関数の解なので省くと

$$y_p = Axe^{-x}$$

と表わせる. これを $L(D)y = e^{-x}$ に代入すると

$$L(D)Axe^{-x} = -3Ae^{-x} = e^{-x}$$

となる. よって特殊解は

$$y_p = -\frac{1}{3}xe^{-x},$$

一般解は

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3} x e^{-x}$$

である．■

例題 2.14 $L(y) = y'' + 2y' = e^x - x^2$ を解け．

解 補助方程式 $L(y) = 0$ の特性方程式は $m^2 + 2m = 0$ より特性根 $m = 0, -2$ を得る．よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

を得る．次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求めるには，重ね合わせの原理より $L(D)y = e^x$ の特殊解 y_{p_1} と $L(D)y = x^2$ の特殊解 y_{p_2} を求めれば y_P は $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ で与えられる．

$L(D)y = e^x$ の特殊解 y_{p_1} は $y_{p_1} = Ae^x$．また $L(D)y = x^2$ の特殊解 y_{p_2} は

$$H(D)L(D)y = (D^3 D(D+2))y = 0$$

の解である．よって基本解は $1, x, x^2, x^3, e^{-2x}$ となるが，1 と e^{-2x} は余関数数の解なので省くと

$$y_{p_2} = Bx + Cx^2 + Dx^3$$

と表わせる．$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ とおき，これを $L(D)y = e^x - x^2$ に代入すると $L(D)(Ae^x + Bx + Cx^2 + Dx^3) = 3Ae^x + 2C + 2B + (6D + 4C)x = e^x - x^2$．したがって $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{6}$．よって一般解は

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{6} x^3$$

となる．■

2.4.1 演習問題

1. 未定係数法を用いて次の微分方程式を解け．

(a) $y'' - 4y' + 4y = e^x$　　(b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

(c) $y'' + 4y = \sin 2x$　　(d) $y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{2x} + e^{-x}$

(e) $y''' - 3y' - 2y = e^{2x} \sin 2x$　　(f) $y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 e^x$

2.5 定数変化法

前節で定数係数 n 階線形微分方程式 $L(y) = f(x)$ の特殊解を未定係数法により求めました．ただ残念なことにこの解法は $f(x)$ が定数係数同次線形微分方程式の解の形をとっているときにしか使えませんでした．

ここでは階数低減法と同じように，どの線形微分方程式 $L(y) = f(x)$ にも用いることができる**定数変化法 (variation of parameter)** とよばれている解法を学びます．

階数低減法では対応する同次線形微分方程式 $L(y) = 0$ のひとつの解から $L(y) = f(x)$ の一般解を求めました．もし同次線形微分方程式の基本解がわかっていたらどうでしょう．多分もっと簡単に一般解が求められてもよいでしょう．このことを 2 階の線形微分方程式を例にとって考えてみましょう．

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

とします．このとき y_1 と y_2 は $L(y) = 0$ の基本解だとします．ここで $L(y) = f(x)$ の特殊解を

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

とおきます．ただし $u_1(x), u_2(x)$ は後で定める未定関数です．2 つの関数を決めなければならないので，2 つの条件が必要となります．最初の条件は $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ が $L(y) = f(x)$ の解であることです．2 つめの条件は計算を簡単にするために設けた条件

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

です．

最初の条件を用いるため，y', y'' を求め $L(y) = f(x)$ に代入すると

$$y' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$

となります．ここで 2 つめの条件 $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$ を用いると

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

を得，これから y'' を求めると

$$y'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

となります．これらを $L(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ に代入すると

$$(u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'') + a_1(u_1 y_1' + u_2 y_2') + a_0(u_1 y_1 + u_2 y_2) = f(x)$$

となるので整理すると

$$(u_1' y_1' + u_2' y_2') + u_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + u_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) = f(x).$$

ここで，y_1 と y_2 は $L(y) = 0$ の解より u_1 と u_2 の係数は 0 です．したがって u_1' と u_1' は連立方程式

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

を満たします．そこで Cramer の公式を用いると

$$u_1' = \frac{-y_2 f(x)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}},\ u_2' = \frac{y_1 f(x)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

となります．ここで分母をよく見ると y_1 と y_2 の Wronski の行列式です．また y_1, y_2 は一次独立なので定理 2.4 より Wronski の行列式は 0 になりません．よって u_1', u_2' を求めることができ，これより u_1, u_2 ひいては $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ を求めることができます．

例題 2.15 $L(y) = y'' + y = \sec x$ を求めよ．

解 補助方程式 $L(y)=0$ の特性方程式は $m^2+1=0$ より特性根 $m=\pm i$ を得る．よって余関数は

$$y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$$

で与えられる．次に特殊解 y_p を求める．定数変化法より

$$y_p = u_1\cos x + u_2\sin x$$

とおくと，

$$u_1' = \frac{-\sin x\sec x}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}},\ u_2' = \frac{\cos x\sec x}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}.$$

よって

$$u_1' = -\sin x\frac{1}{\cos x} = -\tan x,\ u_2' = \cos x\frac{1}{\cos x} = 1$$

となる．積分すると

$$u_1 = \log|\cos x|,\ u_2 = x\ (\text{定数無視})$$

となるので，これより一般解

$$y = y_c + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x + (\log|\cos x|)\cos x + x\sin x$$

を得る． ■

$f(x)=\sec x$ なのでこの例題には未定係数法は使えませんでした．次に n 階線形微分方程式への定数変化法の用い方を考えてみます．

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

の余関数が

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

のとき，定数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を変数 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ で置き換えると特殊解

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_ny_n$$

を得ます．ただし $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ は連立方程式

$$\begin{cases} u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n & = 0\\ u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' & = 0\\ \vdots & \vdots\\ u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)} & = f(x)\end{cases}$$

を満たします．

例題 2.16 $y''' - y' = \frac{1}{1+e^x}$ を解け．

解 補助方程式 $y''' - y' = 0$ の特性方程式は $m^3 - m = 0$ より特性根 $m = 0, \pm 1$ を得る．よって余関数は

$$y_c = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$$

となる．$f(x) = 1/(1+e^x)$ なので定数変化法を用いて特殊解を求める．

$$y_p = u_1 + u_2e^x + u_3e^{-x}$$

ただし

$$\begin{cases} u_1' + u_2'e^x + u_3'e^{-x} &= 0 \\ u_2'e^x - u_3'e^{-x} &= 0 \\ u_2'e^x + u_3'e^{-x} &= \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

を満たす y_p を見つける．Cramer の公式より

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ \frac{1}{1+e^x} & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}\frac{-2}{1+e^x} = \frac{-1}{1+e^x},$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & \frac{1}{1+e^x} & e^{-x} \end{vmatrix}}{2} = \frac{\frac{1}{2}e^{-x}}{1+e^x},$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & \frac{1}{1+e^x} \end{vmatrix}}{2} = \frac{\frac{1}{2}e^x}{1+e^x}.$$

これより

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{-dx}{1+e^x} = -\int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1} = \log(e^{-x}+1), \\ u_2 &= \int \frac{\frac{1}{2}e^{-x}}{1+e^x}dx = \frac{1}{2}\int (e^{-x} - \frac{1}{1+e^x})dx = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\log(e^{-x}+1), \\ u_3 &= \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2}\log(1+e^x) \end{aligned}$$

となる．これらを y_p に戻すと一般解

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} - \frac{1}{2} + (1+\frac{1}{2}e^x)\log(e^{-x}+1) + \frac{1}{2}e^{-x}\log(1+e^x)$$

を得る． ■

2.5.1 演習問題

1. 定数変化法を用いて次の微分方程式を解け．

(a) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$ (b) $y'' + 4y = \tan 2x$

(c) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ (d) $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

(e) $y''' + y' = \tan x$

2. 定数変化法を用いて $y'' + y = f(x)$ の一般解は

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \int_a^x f(t)\sin(x-t)dt$$

で与えられることを示せ．

2.6 変数係数線形微分方程式

前節で定数係数の線形微分方程式について学びましたが，変数係数になると余関数を求めるのが非常に難しかったり，不可能だったりします．そんななかで次の形をした変数係

数の線形微分方程式は比較的簡単に解くことができます．この形をした方程式を **Euler の方程式 (Euler equation)** といいます．

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x).$$

話をわかりやすくするため 2 階の場合を考えます．

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \ (x > 0)$$

において $x = e^t$ とおいて独立変数を x から t に変換します．$x > 0$ より $t = \log x$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(\frac{1}{x})\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}) \\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}).\end{aligned}$$

を得ます．これより

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

が導かれ，これらを元の式に代入すると次の定数係数の線形微分方程式に変換されます．

$$a_2(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = f(e^t).$$

この微分方程式の特性方程式

$$a_2 m^2 + (a_1 - a_2)m + a_0 = 0$$

を**決定方程式 (indicial equation)** といいます．

じつは決定方程式は簡単に求めることができます．微分方程式

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0 (x > 0)$$

に $y = x^m$ を代入するだけでよいのです．

例題 2.17 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \ (x > 0)$ を解け．

解 $x = e^t, y = x^m$ とおくと，決定方程式は $m(m-1) - 2m + 2 = 0$ となり，根は $m = 1, 2$ である．決定方程式は微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

の特性方程式なので，一般解は

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} = c_1 x + c_2 x^2$$

となる． ■

例題 2.18 $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ (x > 0)$ を解け．

解 変数変換 $x = e^t$ より，与えられた方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$

となる．この方程式の余関数は $y_c = c_1e^t + c_2e^{2t}$ である．次に $f(t) = e^{3t}$ より，特殊解を未定係数法で求める．$y_p = Ae^{3t}$ を

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$

に代入すると

$$2Ae^{3t} = e^{3t}$$

を得る．よって $A = \frac{1}{2}$ となり一般解

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

を得る．ここで $x = e^t$ を元に戻すと与えられた方程式の一般解

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{x^3}{2}$$

を得る． ■

2.6.1 演習問題

1. 次の Euler 方程式を解け．ただし，$x > 0$ とする．

(a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$　　(b) $x^2y'' + xy' + 9y = 0$

(c) $x^2y'' - xy' - 3y = x^2\log x$　(d) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$

(e) $x^2y''' + 5xy'' + 4y' = 0$

2.7 演算子法

$D = \frac{d}{dx}$ とおくと

$$L(y) = a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

は

$$L(D)y = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)y = f(x)$$

と表せます．このとき，方程式 $L(D)y = f(x)$ をみたすように関数 y を対応させる演算素を，$L(D)$ の**逆演算子**とよび，

$$y = \frac{1}{L(D)}f(x) = (L(D))^{-1}f(x)$$

と書き表します．つまり，$(L(D))^{-1}f(x)$ は，すべての関数 $f(x)$ に対して，関係式

$$L(D)(L(D)^{-1}f(x)) = f(x)$$

をみたすものとして定義します．

演算子法による計算法則

$L(D)y = f(x)$ の特殊解を $L(D)^{-1}f(x)$ で計算しようというものであるから，$L(D)^{-1}$ の性質を調べておく必要があります．

定理 2.8 (線形性)　α, β を定数，$f(x), g(x)$ を関数とするとき，

$$L(D)(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha L(D) f(c) + \beta L(D) g(x)$$
$$L(D)^{-1}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha L(D)^{-1} f(x) + \beta L(D)^{-1} g(x)$$

証明 最初の式は $L(D)$ の定義から直ちにわかる．第 2 の等式は

$$L(D)(\alpha L(D)^{-1} f(x) + \beta L(D)^{-1} g(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

より明らかである．

定理 2.9 (基本公式)　a を定数，m を自然数とするとき，

$$\frac{1}{D-a} f(x) = e^{ax} \int e^{-ax} f(x)\, dx$$
$$\frac{1}{(D-a)^m} f(x) = e^{ax} \iint \cdots \int e^{-ax} f(x)\, dx \cdots dxdx \ (m \text{ 反復積分})$$

証明 $(D-a)^{-1} f(x) = y$ とすると，$(D-a)y = f(x)$．すなわち

$$\frac{dy}{dx} - ay = f(x).$$

これは 1 階線形微分方程式なので，積分因子 $\mu = e^{\int (-a) dx}$．これを両辺にかけると，

$$(e^{\int (-a) dx} y)' = e^{\int (-a) dx} \quad f(x).$$

これより，

$$y = e^{-\int (-a) dx} \int e^{\int (-a) dx} \quad f(x)\, dx = e^{ax} \int e^{-ax} f(x)\, dx$$

これを繰り返すと

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D-a)^2} &= \frac{1}{D-a}\Big(\frac{1}{D-a} f(x)\Big) = e^{ax} \int e^{-ax} \Big(\frac{1}{D-a} f(x)\Big)\, dx \\ &= e^{ax} \int e^{-ax} (e^{ax} \int e^{-ax} f(x))\, dx \\ &= e^{ax} \iint e^{-ax} f(x)\, dx \end{aligned}$$

定理 2.10 (演算子公式)

(1) $f(x) = e^{ax} \Longrightarrow \dfrac{1}{L(D)} e^{ax} = \dfrac{1}{L(a)} e^{ax}$

(2) $f(x) = x^m \Longrightarrow \dfrac{1}{1-aD} x^m = \big(1 + (aD) + (aD)^2 + \cdots (aD)^m\big) x^m$

(3) $f(x) = \cos ax \Longrightarrow \dfrac{1}{L(D^2)} \cos ax = \dfrac{1}{L(-a^2)} \cos ax$

(4) $f(x) = \sin ax \Longrightarrow \dfrac{1}{L(D^2)} \sin ax = \dfrac{1}{L(-a^2)} \sin ax$

(5) $f(x) = e^{ax} u(x) \Longrightarrow \dfrac{1}{L(D)} e^{ax} u(x) = e^{ax} \dfrac{1}{L(D+a)} u(x)$

(6) $f(x) = x^m u(x) \Longrightarrow \dfrac{1}{L(D)} x^m u(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} \Big(\frac{1}{L(D)}\Big)^{(k)} u(x)$

例題 2.19 $L(y) = y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$ を解け.

解 補助方程式 $L(y) = 0$ の特性方程式は $m^2 - m - 2 = 0$ より特性根 $m = -1, 2$ を得る. よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

$(D^2 - D - 2)y = 2e^{3x}$ より,

$$y = \frac{2e^{3x}}{D^2 - D - 1}.$$

よって $y = \frac{2e^{3x}}{3^2-3-1} = \frac{2e^{3x}}{4} = \frac{e^{3x}}{2}$. これより特殊解 $y_p = \frac{1}{2}e^{3x}$ を得る. したがって一般解は

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$

で与えられる. ■

問 2.1 $L(y) = y'' + 4y = \sin x$ を解け.

解答 $L(y) = 0$ の特性方程式は $m^2 + 4 = 0$ より, 特性根 $m = \pm 2i$ を得る. よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$(D^2 + 4)y = \sin x$ より,

$$y = \frac{\sin x}{D^2 + 4} = \frac{\sin x}{-1^2 + 4} = \frac{1}{3}\sin x.$$

問 2.2 $L(y) = y'' - 3y' + 2y = xe^x$ の特殊解を求めよ..

解答 特殊解を y とすると,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D^2 - 3D + 2}(xe^x) = e^x \frac{1}{(D+1)^2 - 3(D+1) + 2}x = e^x \frac{1}{D^2 - D}x \\ &= e^x \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D-1}x = -e^x \frac{1}{D}\frac{1}{1-D}x \\ &= -e^x \frac{1}{D}(1 + D + D^2 + \cdots)x = -e^x \frac{1}{D}(x+1) = -e^x\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \end{aligned}$$

第 3 章

連立線形微分方程式

3.1 連立同次線形微分方程式

今まで扱ってきた微分方程式はすべて未知関数 (従属変数) がひとつでした．ここでは n 個の未知関数をもつ微分方程式の系．つまり**連立線形微分方程式 (system of linear differential equation)**

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1' & = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' & = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{array}\right.$$

を考えます．行列を用いるとこの系は

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}$$

と表わせます．ただし

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

です．この微分方程式を満たす n 個の微分可能な関数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をこの方程式の**解 (solution)** といいます．また，$\mathbf{F} = \mathbf{0}$ のとき，この微分方程式を**同次方程式 (homogeneous equation)** といいます．

$X \equiv 0$ は明らかに，同次方程式 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の解です．そこでそれ以外の解を捜すため，1 階の線形微分方程式 $y' = my$ の解が $y = ce^{mt}$ で与えられたことを思い出します．このことから多分 $\mathbf{X} = \mathbf{C}e^{\lambda t}$ は $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の解になるのではと見当をつけます．ただし $\mathbf{C}$ は任意の定数ベクトルとします．これを $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ に代入すると，

$$\mathbf{C}e^{\lambda t} = A\mathbf{C}e^{\lambda t}$$

を得ます．ここで指数関数 $e^{\lambda t}$ はどんな t に対しても 0 にならないことに注意すると，

$$A\mathbf{C} - \mathbf{C}\lambda = \mathbf{0}$$

または

$$(A - \lambda I)\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

となります．ここで I は n 次の単位行列を表わします．

このことから，$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の自明でない解を見つけるには

$$(A - \lambda I)\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{C}$ を見つければよいことがわかります．この連立方程式を満たす λ を行列 A の**固有値 (eigenvalue)**．そして 0 でないベクトル $\mathbf{C}$ を λ に対する**固有ベクトル (eigenvector)** といいます．ところで連立方程式

$$(A - \lambda I)\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

が $\mathbf{0}$ でない解をもつための必要十分条件は $\det(A - \lambda I) = 0$ であることを線形代数学で学びました．また $\det(A - \lambda I)$ は n 次の多項式になり $\det(A - \lambda I) = 0$ を行列 A の**特性方程式 (characteristic equation)** ということも学びました．そこで私たちは，特性方程式を解いて固有値 λ を求め，連立方程式 $(A - \lambda I)\mathbf{C} = \mathbf{0}$ を解いて，固有ベクトルを求めることができます．つまり非常に難しい微分方程式の問題が簡単な線形代数の問題に還元されました．

例題 3.1 $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ を解け．

解

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

より固有値は $\lambda = 2, 1, -1$ である．次に固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は

$$(A - 2I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を満たす $\mathbf{0}$ でない解より **Gauss の消去法 (Gaussian elimination)** を用いて解く．

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_2 + R_1 \to R_1 \\ -2R_2 + R_3 \to R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ 2R_3 + R_2 \to R_2 \\ R_3 + R_1 \to R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より c_3 は任意の定数，$c_2 = 0$, $c_1 = c_3$ となる．したがって，固有ベクトル $\mathbf{C}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表わされ，$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ はこの微分方程式のひとつの解である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ -2R_2 + R_3 \to R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{-1 \times R_2 \to R_2 \\ -R_2 + R_3 \to R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表わされ，$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ もこの微分方程式のひとつの解である．同様に固有値 $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{-2R_2 + R_1 \to R_1 \\ -2R_2 + R_3 \to R_2 \\ R_1 \leftrightarrow R_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{-\frac{1}{5} \times R_2 \to R_2 \\ -R_2 + R_3 \to R_3 \\ \frac{2R_2}{5} + R_1 \to R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ で表わされ，$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-t}$ もこの微分方程式のひとつの解である．

ここで $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ は一次独立なので $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$ は一般解になると思われる．次の定理で述べるが，確かにこれは一般解である．よって一般解は

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-t}$$

で与えられる． ■

行列 A の係数が定数で，n 個の異なる固有値をもつとき，次の定理が成り立ちます．

定理 3.1 同次連立微分方程式 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の A が n 次の定数行列で n 個の異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とそれに対する固有ベクトル $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$ をもつならば，この微分方程式の一般解は

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{X}_i(t)$$

で与えられる．ただし，$\mathbf{X}_i = \mathbf{C}_i e^{\lambda_i t}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ はそれぞれ $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の解であり，また一次独立である．

証明 $(n = 3)$ の場合

$$W(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_3 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 t} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) - \lambda_1\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) + \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)$$

ここで $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は異なる固有値なので

$$W(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}) \neq 0$$

である．■

ここにでてきた n 個の一次独立な解を微分方程式 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の**基本解 (fundamental solution)** といいます．連立同次線形微分方程式はいつも $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の形で与えられるわけではありません．こんなときはまず $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の形に変換する必要があります．

例題 3.2 次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1' + x_1 + 3x_2' &= 0 \\ 3x_1 + x_2' + 2x_2 &= 0 \end{cases}.$$

解 x_1' と x_2' について解くと，

$$\begin{aligned} x_1' &= 8x_1 + 6x_1 \\ x_2' &= -3x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

または

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

となる．これより固有値と固有ベクトルを求めると，$\lambda = 3 + \sqrt{7}, \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 - \sqrt{7} \end{pmatrix}$，$\lambda_2 = 3 - \sqrt{7}, \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 + \sqrt{7} \end{pmatrix}$ となる．よって定理 3.1 より一般解は

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 - \sqrt{7} \end{pmatrix} e^{(3+\sqrt{7})t} + c_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 + \sqrt{7} \end{pmatrix} e^{(3-\sqrt{7})t}$$

である．■

3.1.1 演習問題

1. 次の連立微分方程式を解け．

(a) $\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} x_1' = 6x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_2 \\ x_3' = x_2 - x_3 \end{cases}$　(d) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$

(e) $\begin{cases} x_1' + x_2' + 2x_2 = 0 \\ x_1' - 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$　(f) $\begin{cases} x_1' + 6x_1 + x_2' + 3x_2 = 0 \\ x_1' - x_2' + x_2 = 0 \end{cases}$

3.2 重根と複素数根

前節では特性方程式が異なる実数根をもつ場合を考えました．ここでは重根と複素数根をもつ場合を考えます．もし複素数 $a + bi$ が微分方程式 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の特性方程式の根ならば，$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ は $c\mathbf{Q}e^{(a+bi)t}$ の形をした解をもっているはずです．ただし，$\mathbf{Q}$ は複素固有ベクトル，c は任意の複素定数です．

$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の A が実行列のとき，複素指数や複素ベクトルの存在は扱いにくいものです．とくに初期値 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ が実数のときはなおさらです．そこで解を実数と実関数だけで表わす必要があります．

A を実行列，$\lambda = a + bi$ が複素固有値で $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + i\mathbf{C}_2$ ($\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$実数ベクトル) が λ に対する固有ベクトルだとすると**固有方程式 (eigenequation)**

$$(A - \lambda I)\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

よりその共役も

$$\overline{(A - \lambda I)\mathbf{C}} = (\bar{A} - \bar{\lambda}\bar{I})\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$$

を満たします．よって $\bar{\lambda} = a - bi$ も固有値となり，対応する固有ベクトル $\bar{\mathbf{C}}$ をもちます．したがって，$\mathbf{X}_1 = \mathbf{C}e^{\lambda t}$ と $\mathbf{X}_2 = \bar{\mathbf{C}}e^{\bar{\lambda} t}$ はともに $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の解になります．もちろん $\mathbf{X}_1$ と $\mathbf{X}_2$ の一次結合も解です．とくにその中でも

$$\Re\mathbf{C}e^{\lambda t} = \Re\mathbf{X}_1 = \frac{\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2}{2} = \mathbf{C}_1 e^{at}\cos bt - \mathbf{C}_2 e^{at}\sin bt$$

と

$$\Im\mathbf{C}e^{\lambda t} = \Im\mathbf{X}_1 = \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{2i} = \mathbf{C}_1 e^{at}\sin bt - \mathbf{C}_2 e^{at}\cos bt$$

は一次独立な実数値解です．ここにでてきた $\Re\mathbf{C}e^{\lambda t}$ と $\Im\mathbf{C}e^{\lambda t}$ のことを，複素数 $\mathbf{C}e^{\lambda t}$ の**実部 (real part)** と**虚部 (imaginary part)** といいます．

例題 3.3 $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ を解け．

解

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

より固有値 $\lambda = 2, 1 \pm i$ を得る．

まず，固有値 2 に対応する固有ベクトルを求めると

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{2}\times R_2 \to R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\frac{R_2}{2} + R_1 \to R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より固有ベクトルは $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

次に固有値 $1+i$ に対応する固有ベクトルを求める．

$$
\begin{aligned}
A-(1+i)I &= \begin{pmatrix} 1-i & -1 & -1 \\ 2 & -i & -1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[-(1+i)R_1+R_2\to R_2]{\frac{1}{1-i}\times R_1\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/1-i & -1/1-i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{\frac{R_2}{1-i}+R_1\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より固有ベクトルは $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ である．これより $\mathbf{C}e^{\lambda t}$ の実部と虚部を求めると，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}e^{\lambda t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^t(\cos t + i\sin t) \\
&= \begin{pmatrix} e^t\cos t + ie^t\sin t \\ e^t\sin t - ie^t\cos t \\ e^t\cos t + ie^t\sin t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^t\cos t \\ e^t\sin t \\ e^t\cos t \end{pmatrix}}_{\text{real part}} + i\underbrace{\begin{pmatrix} e^t\sin t \\ -e^t\cos t \\ e^t\sin t \end{pmatrix}}_{\text{imaginary part}}
\end{aligned}
$$

となる．よって一般解は次のように表わすことができる．

$$
\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^t\cos t \\ e^t\sin t \\ e^t\cos t \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} e^t\sin t \\ -e^t\cos t \\ e^t\sin t \end{pmatrix}. \blacksquare
$$

さて，行列 A の特性方程式が重根をもつ場合はどうでしょう．この場合も，A が対角化可能 (つまり，重複度と同数の一次独立な固有ベクトルをもつ) ならば，単根のときと同じように一般解を求めることができます．では A が対角化不可能の場合はどうでしょう．こんな場合に便利な方法として行列の指数関数を用いる方法があります．

$\mathbf{X}'=A\mathbf{X}$ の解として，$y=ce^{at}$ が $y'=ay$ の解であったように，$\mathbf{X}=\mathbf{C}e^{At}$ を考えます．ただし A は n 次の正方行列，$\mathbf{C}$ は定数ベクトルです．これが可能なためには e^{At} に意味づけを行なう必要があります．そこで e^{at} の Maclaurin 級数

$$
e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots
$$

より

$$
e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots
$$

で定義します．この展開はすべての t で収束することが知られています．これを行列 A の**指数行列 (exponential matrix)** といいます．また

$$
\frac{d}{dt}e^{At} = A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots = Ae^{At}
$$

より，$\mathbf{X}=\mathbf{C}e^{At}$ は $\mathbf{X}'=A\mathbf{X}$ の解といえます．

ここでひとつ問題があります．それは，どうやって $\mathbf{C}e^{At}$ を計算するかということです．定義を使うと無限級数の計算をすることになりますが，じつは無限級数の計算をせずに，解を求める方法があるのです．まず $\mathbf{C}e^{(A-\lambda I)t}$ の展開を考えて下さい．つまり，

$$\begin{aligned}\mathbf{C}e^{(A-\lambda I)t} = \mathbf{C} + t(A-\lambda I)\mathbf{C} + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda I)^2\mathbf{C} \\ + \frac{t^3}{3!}(A-\lambda I)^3\mathbf{C} + \cdots + \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{C} + \cdots\end{aligned}$$

ここである k で $(A-\lambda I)^k\mathbf{C} = 0$ が成り立てば，上の展開で k の後はすべて 0 になります．よってこのときは，有限級数の計算をすればよいことになります．

例題 3.4 $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 4x_3 \end{cases}$ を解け．

解

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^3$$

より，固有値 $\lambda = 4$ である．次に固有値 4 に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を求める．

$$A-4I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{-1\times R_1\to R_1 \\ \frac{1}{2}\times R_2\to R_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2R_2+R_3\to R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり，ひとつの解

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t}$$

を得る．

A は三次の正方行列なので一般解を表わすには，3 つの一次独立な解が必要である．そこで

$$(A-4I)^2\mathbf{C} = \mathbf{0},\ (A-4I)\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$$

を満たす $\mathbf{C}$ を見つける．

$$(A-4I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より c_1, c_2 は任意の値を取ることができるので，$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$(A-4I)^2\mathbf{C} = \mathbf{0}$ を満たす．次にもうひとつの条件 $(A-4I)\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ を満たすように α, β を選ぶと，

$$(A-4I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $\beta = 1$. よって $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり，2 つめの解

$$\begin{aligned} e^{At}\mathbf{C} &= e^{4t}e^{(A-4I)t}\mathbf{C} = e^{4t}[\mathbf{C} + t(A-4I)\mathbf{C}] \\ &= e^{4t}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= e^{4t}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = e^{4t}\begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．3 つめの解を求めるために，

$$(A-4I)^3\mathbf{C} = \mathbf{0},\ (A-4I)^2\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$$

を満たす $\mathbf{C}$ を見つける．$(A-4I)^3$ は零行列なので $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ は $(A-4I)^3\mathbf{C} = \mathbf{0}$ を満たす．ここでもうひとつの条件を用い，前に選んだ $\mathbf{C}$ と一次独立になるように，α, β, γ を選ぶと，$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる．これより 3 つめの解を計算すると

$$\begin{aligned} e^{At}\mathbf{C} &= e^{4t}e^{(A-4I)t}\mathbf{C} \\ &= e^{4t}[\mathbf{C} + t(A-4I)\mathbf{C} + \frac{t^2}{2!}(A-4I)^2\mathbf{C}] \\ &= e^{4t}[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \\ &= e^{4t}\begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．ここで $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立なので，一般解は

$$\mathbf{X} = e^{4t}[c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}]$$

で与えられる． ■

3.2.1 演習問題

1. 次の連立微分方程式を解け.

(a) $\begin{cases} x_1' = & 6x_1 + 8x_2 \\ x_2' = & -x_1 + 2x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = & 2x_1 - x_2 \\ x_2' = & 4x_1 + 6x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = & 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = & 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ x_3' = & 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{cases}$ (d) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$

(e) $\begin{cases} 4x_1' + x_1 + 2x_2' + 7x_2 = & 0 \\ x_1' - x_1 + x_2' + x_2 = & 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1' + x_1 + 2x_2' + 3x_2 = & 0 \\ x_1' - 2x_1 + 5x_2' = & 0 \end{cases}$

3.3 非同次方程式

非同次方程式 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}$ の解法を考える前に，もう一度，同次方程式の解を整理してみます.

A を n 次の正方行列とします．$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ が $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の一次独立な解のとき,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n \end{pmatrix}$$

を**基本行列 (fundamental matrix)** といいます．これより，基本行列 Φ は次のような性質をもっていることが確かめられます.

1. $\det \Phi = W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) \neq 0$ (W = Wronski の行列式)

2. $\Phi' = A\Phi$

3. $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \cdots + c_n\mathbf{X}_n = \Phi \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi\mathbf{C}$

つまり，同次方程式 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の解は $\Phi\mathbf{C}$ で与えられるので，前の章で学んだ定数変化法を用いて，非同次方程式 $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}$ の解を $\Phi(t)\mathbf{U}(t)$ と置いてみます．行列の導関数はそれぞれの成分の導関数で与えられるので,

$$(\Phi\mathbf{U})' = \Phi'\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}'$$

が成り立ちます．そこで $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{U}$ を $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}$ に代入すると,

$$\Phi'\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}' = A\Phi\mathbf{U} + \mathbf{F}$$

となります．ここで基本行列の性質 2 を用いると,

$$\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{F}$$

を得ます．よって Cramer の公式より,

$$\mathbf{U}' = \frac{[\Phi : \mathbf{F}]}{|\Phi|}$$

となり，積分して，一般解

$$\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C} + \Phi\mathbf{U}$$

を得ます.

例題 3.5 $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$ を解け.

解 $\det(A-\lambda I) = (\lambda-4)(\lambda-1) = 0$ より，固有値 $\lambda = 4, 1$．固有値 4 に対する固有ベクトルは $(A-4I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$．したがって $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$ は解である．また固有値 1 に対する固有ベクトルは $(A-I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．したがって，$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}$ も解である．これより基本行列

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{4t} & e^{t} \\ e^{4t} & -e^{t} \end{pmatrix}$$

を得る．一般解を求めるには連立方程式

$$\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{F}$$

を解けばよい．つまり，

$$\begin{pmatrix} 2e^{4t} & e^{t} \\ e^{4t} & -e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

を解けばよいので，Cramer の公式を用いると，

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{t} \\ 2e^{2t} & -e^{t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e^{4t} & e^{t} \\ e^{4t} & -e^{t} \end{vmatrix}} = \frac{-3e^{3t}}{-3e^{5t}} = e^{-2t}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & 2e^{2t} \end{vmatrix}}{-3e^{5t}} = \frac{3e^{6t}}{-3e^{5t}} = -e^{t}$$

となるので，積分して，

$$u_1 = -\frac{1}{2}e^{-2t},\ u_2 = -e^{t}$$

を得る．したがって一般解は

$$\begin{aligned}\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C} + \Phi\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 2e^{4t} & e^{t} \\ e^{4t} & -e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{4t} & e^{t} \\ e^{4t} & -e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2c_1e^{4t} + c_2e^{t} - 2e^{2t} \\ c_1e^{4t} - c_2e^{t} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

で与えられる．■

例題 3.5 は演算子 $D = d/dt$ を用いることにより，求めることもできます．この方法は消去法または演算子法とよばれています．$D = d/dt$ より $x_1' = Dx_1$．よって

$$x_1' - 3x_1 - 2x_2 = Dx_1 - 3x_1 - 2x_2 = (D-3)x_1 - 2x_2$$

また

$$x_2' - x_1 - 2x_2 = Dx_2 - x_1 - 2x_2 = -x_1 + (D-2)x_2$$

と書き直せます．これより例題 3.5 で与えられた連立微分方程式

$$\begin{cases} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 + e^{2t} \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 + 2e^{2t} \end{cases}$$

は演算子 $D = d/dt$ を用いることにより次のように書き直せます．

例題 3.6 次の微分方程式を消去法を用いて解け．

$$\begin{cases} (D-3)x_1 - 2x_2 &= e^{2t} \\ -x_1 + (D-2)x_2 &= 2e^{2t} \end{cases} \tag{3.1}$$

解 ここで連立方程式を消去法で解くように，まず第 1 式に $D-2$ を掛け第 2 式に 2 を掛けて加えると

$$(D-3)(D-2)x_1 - 2x_1 = (D-2)e^{2t} + 2(2e^{2t}).$$

よって

$$(D^2 - 5D + 4)x_1 = 2e^{2t} - 2e^{2t} + 4e^{2t} = 4e^{2t}. \tag{3.2}$$

または Cramer の公式より

$$\begin{vmatrix} D-3 & -2 \\ -1 & D-2 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} e^{2t} & -2 \\ 2e^{2t} & D-2 \end{vmatrix}.$$

よって

$$(D^2 - 5D + 4)x_1 = (D-2)e^{2t} + 2(2e^{2t}).$$

この微分方程式の特性方程式は $m^2 - 5m + 4 = 0$．したがって $m = 1, 4$ となり，x の余関数 x_{1c} は

$$x_{1c} = c_1 e^t + c_2 e^{4t}$$

で与えられる．次に特殊解 x_{1p} を未定係数法を用いて求める．

$$H(D)4e^{2t} = (D-2)4e^{2t} = 0$$

より

$$(D-2)(D^2 - 5D + 4)x_1 = (D-2)4e^{2t} = 0.$$

これより $y_{1p} = Ae^{2t}$ となる．これを (3.2) に代入すると

$$4Ae^{2t} - 10Ae^{2t} + 4Ae^{2t} = 4e^{2t}$$

となり，$A = -2$ を得る．これより

$$x_1 = x_{1c} + x_{1p} = c_1 e^t + c_2 e^{4t} - 2e^{2t}.$$

これを (3.1) の最初の式に代入すると

$$c_1 e^t + 4c_2 e^{4t} - 4e^{2t} - 3c_1 e^t - 3c_2 e^{4t} + 6e^{2t} - 2x_2 = e^{2t}.$$

よって

$$x_2 = -c_1 e^t + \frac{1}{2}c_2 e^{4t} + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

確かに例題 3.5 と同じ結果を得ることができた． ■

例題 3.7 $\left\{\begin{array}{rl} x_1''-2x_1-3x_2= & 0 \\ x_1+x_2''+2x_2= & 0 \end{array}\right.$ を解け.

解 $u=x_1',\ v=x_2'$ とおくと，$u'=x_1'',\ v'=x_2''$．よって与えられた微分方程式は次のように書き直せる．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の特性方程式は $\lambda^4-1=0$ より，固有値 $\lambda=\pm1,\pm i$ が求まる．次に固有ベクトルを求めるのだが，行列の次数が大きいので，コンピュータの力を借りる．ここでは Mathematica を使用して，固有ベクトルを求めた．$\lambda=1,-1,i$ に対応する固有ベクトルは順に

$$(3,-1,-3,1)^t,(-3,1,-3,1)^t,(-i,i,-1,1)^t$$

である．これより，$\mathbf{C}e^{\lambda t}$ は

$$\begin{pmatrix} 3e^t \\ -e^t \\ -3e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3e^{-t} \\ e^{-t} \\ -3e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i(\cos t+i\sin t) \\ i(\cos t+i\sin t) \\ -(\cos t+i\sin t) \\ \cos t+i\sin t \end{pmatrix}$$

で与えられます．よって基本行列 $\Phi(t)$ は

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} 3e^t & -3e^{-t} & \sin t & -\cos t \\ -e^t & e^{-t} & -\sin t & \cos t \\ -3e^t & -3e^{-t} & -\cos t & \sin t \\ e^t & e^t & \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

を得る．これより一般解は

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 3e^t & -3e^{-t} & \sin t & -\cos t \\ -e^t & e^{-t} & -\sin t & \cos t \\ -3e^t & -3e^{-t} & -\cos t & \sin t \\ e^t & e^t & \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

で与えられる．これを x_1,x_2 について解くと，

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 3e^t - c_2 3e^t = c_3\sin t - c_4\cos t \\ x_2 &= -c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3\sin t + c_4\cos t \ \blacksquare \end{aligned}$$

3.3.1 演習問題

1. 次の微分方程式を解け.

(a) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - e^t \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 - 7e^t \end{cases}$ (b) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -3\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_2' = -x_2 \\ x_3' = -2x_1 - x_2 - 2x_3 + \frac{3}{e^t} \end{cases}$ (d) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. 次の微分方程式を連立微分方程式に直して解け.

$y'' + 4y' + 3y = t$

3. 次の微分方程式を消去法を用いて解け.

(a) $\begin{cases} x_1' + x_2' - 2x_1 - 4x_2 &= e^t \\ x_1' + x_2' - x_2 &= e^{4t} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1'' + x_2' - x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1' + x_2'' - x_1 + x_2 &= 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1' + x_2' + x_1 + 5x_2 &= 4t \\ x_1' + x_2' + 2x_1 + 2x_2 &= 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1'' - x_2' &= t + 1 \\ x_1' + x_2' - 3x_1 + x_2 &= 2t - 1 \end{cases}$

第 4 章

級数による解法

4.1 解析関数

私たちがここまで扱ってきた常微分方程式は，求積法により解が得られるものばかりでした．そこで，ここでは求積法で解を得るのが困難な場合や近似解を得たいとき用いられる**級数による解法 (infinite series method)** を学びます．この方法は無限級数を与えられた微分方程式の解と考え，無限級数の係数を決めていくという方法で，じつは微分方程式を解くうえでもっとも初歩的な方法かも知れません．ただ，しばしば起きることですが，無限級数の係数をすべて決めるのが困難なことがよくあります．そんなときは，最初の何項かが解の近似として用いられることがよくあります．

まずは整級数の性質に関する基本的な定理について考えてみましょう．各項が関数であるような級数を**関数項級数 (series of functions)** といいます．

$\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を区間 I で定義された関数の列とします．この関数列 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ より

$$S_1(x) = a_1(x), S_2(x) = a_1(x) + a_2(x), S_3(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x), \ldots$$

を考えます．区間 I のすべての点 x で数列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき，つまり

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

であるような関数 $S(x)$ が存在するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ は収束するといい，$S(x)$ を無限級数の和とよびます．とくに収束が区間 I において一様収束である場合，つまり，区間 I の任意の x に対して

$$n \geq N \text{ ならば } |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

となる N が区間 I の x に無関係に存在する場合，級数 $\sum a_n(x)$ は区間 I で**一様収束する (uniformly convergent)** といいます．

ここで $S(x) - S_n(x) = R(x)$ とおくと，無限級数の一様収束は次のように表わせます．つまり区間 I の任意の x に対して

$$n \geq N \text{ ならば } |R(x)| < \epsilon$$

となる N が存在します．

定理 4.1 (Weierstrass の判定法) ある区間 I の任意の x に対して
(1) $|a_n(x)| \le M_n,\ n = 1, 2, \ldots$
(2) $\sum M_n < \infty$
であるような実数列 $\{M_n\}$ が存在するとき，$\sum a_n(x)$ は区間 I で一様収束かつ絶対収束である．

証明

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \cdots| \le |a_{n+1}(x)| + |a_{n+2}(x)| + \cdots \\ &\le M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots \end{aligned}$$

ところで $\sum M_n < \infty$ より，どんな $\epsilon > 0$ に対しても N が存在し，$n \ge N$ ならば

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots < \epsilon.$$

ここで N は明らかに x とは無関係なので，$n > N$ のとき $|R_n(x)| < \epsilon$ が成り立つ．■

無限級数が一様収束するとき，級数は有限級数のもっている多くの性質を継承します．

定理 4.2 (無限級数の連続性) $a_n(x)$ が区間 I で連続で $\sum a_n(x)$ が区間 I で一様収束ならば，$S(x) = \sum a_n(x)$ も区間 I で連続である．

定理 4.3 (項別積分の定理) $a_n(x)$ が区間 I で連続で $\sum a_n(x)$ が I で一様収束ならば，

$$\int (\sum a_n(x))dx = \sum \int a_n(x)dx$$

定理 4.4 (項別微分の定理) $a_n(x)$ が区間 I で $C^{(1)}$-級で，$\sum a_n'(x)$ が一様収束するならば

$$(\sum a_n(x))' = \sum a_n'(x)$$

無限級数 $\sum a_n(x)$ において，とくに $a_n(x) = a_n x^n$ のときを**整級数 (power series)** といいます．たとえば $e^x, \sin x, \cos x, \log(1+x)$ の Taylor 級数

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

は整級数のひとつです．

さて $\sum a_n x^n$ は x のどんな値に対して収束するのでしょうか．$c_n = a_n x^n$ とおき，D'Alembert の判定法を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \\ &= |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \end{aligned}$$

ここで $|x| < \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ ならば $\sum |a_n x^n|$ は収束し，$|x| > \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ ならば $\sum a_n x^n$ は発散するのでこの極限値

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$

を**収束半径 (radius of convergence)** といいます.

例題 4.1 次の整級数の収束半径を求めよ.
(a) $\sum \frac{x^n}{n^2}$ (b) $\sum \frac{x^n}{n!}$

解

(a) $\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^2}{n^2}| = 1$

(b) $\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)!}{n!}| = \infty.$

次に整級数の基本性質をあげておきます.

定理 4.5 (整級数の基本性質) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を ρ とし，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおくと，次の (1) から (6) が成り立つ.
(1) 任意の r $(0 < r < \rho)$ に対し，$\sum a_n x^n$ は $(-r, r)$ で一様収束する.
(2) $f(x)$ は $(-\rho, \rho)$ で $C^{\infty}-$ 級である.
(3) $f(x)$ は $(-\rho, \rho)$ で連続である.
(4) $f(x)$ は $(-\rho, \rho)$ で項別微分可能であって，次の式が成り立つ.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(5)$f(x)$ は $(-\rho, \rho)$ で項別積分可能であって，次の式が成り立つ.

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

(6) $(-\rho, \rho)$ において $f(x)$ の Taylor 級数は整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ である．つまり

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

関数 $f(x)$ が正の収束半径をもつ整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ で表わされるとき，$f(x)$ は点 a で**解析的 (analytic)** であるといいます．また，開区間 I の各点で解析的な関数は区間 I で解析的であるといいます.

4.1.1 演習問題

1. 次の級数の収束半径を求めよ.
(a) $\sum \frac{nx^n}{3^n}$ (b) $\sum \frac{n^n x^n}{n!}$
2. 次のことを示せ.
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$
(b) $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, $|x| \leq 1$
3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ のとき，次のことを示せ.

(a) $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で一様収束する.
(b) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$
(c) $\int_0^{\pi} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}$

4.2 整級数解 (通常点の場合)

2 階線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

において，$P(x), Q(x)$ および $R(x)$ が点 a で解析的なとき，点 a を**通常点 (ordinary point)** といいます．通常点では次の定理が成り立ちます.

定理 4.6 2 階線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

において，a が通常点ならば，任意の定数 b_0, b_1 に対して，初期条件

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1$$

を満たす整級数解 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ がただひとつ存在する.

例題 4.2 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの整級数解を求めよ.

$$y'' + y = e^x.$$

解 $P(x) = 0, Q(x) = 1, R(x) = e^x$ より，$x = 0$ は通常点．よって，解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

とおくと,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}, \; y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

となるまた，$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ より，これらを与えられた方程式に代入すると

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を得る．これを整理すると

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - \frac{1}{n!})x^n = 0$$

となるので，ここで x のベキが n になるようにそろえると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n - \frac{1}{n!}]x^n = 0$$

右辺は恒等的に 0 なので，項別微分を行なうと，x^n の係数はすべて 0 になる．よって漸化式

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n - \frac{1}{n!} = 0, \; n \geq 0.$$

または

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+2)(n+1)} c_n$$

を得る．ここで，c_0 と c_1 は初期条件 $y(0)$ と $y'(0)$ で決まるので，この場合は任意の定数と考えられる．よって，$c_2, c_3, \ldots$ を順次求めると

$$c_2 = \frac{1}{2!} - \frac{c_0}{2},\ c_3 = \frac{1}{3!} - \frac{c_1}{6},\ c_4 = \frac{c_0}{4!},\ c_5 = \frac{c_1}{5!}, \cdots$$

これより $c_n = c_n^* + \frac{1}{2(n)!)}$ とおくと，漸化式は $c_n^* = -\frac{1}{n(n-1)} c_{n-2}^*$.

これを $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に代入すると

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}^* x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}^* x^{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

となる．ここで漸化式を繰り返し用いると，

$$c_{2n}^* = \frac{(-1)^n}{(2n)!} c_0^*,\ c_{2n+1}^* = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} c_1^*$$

となりこの方程式の解は次の初等関数で表わせる．

$$y = c_0^* \cos x + c_1^* \sin x + \frac{e^x}{2}. \blacksquare$$

4.2.1 演習問題

1. 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの整級数解を求めよ．

(a) $y' + y = e^x$　　(b) $y'' + xy = 0$

(c) $xy' - y = x^2 e^x$　(d) $y'' + xy' - 4y = 0$

2. 次の微分方程式の付記した点のまわりでの整級数解を求めよ．

(a) $y'' + (x-2)y = 0,\ a = 2$　(b) $y'' + (x-1)y' + 3y = x^2,\ a = 1$

4.3 Frobenius 法 (確定特異点の場合)

前節で 2 階線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

は，通常点のまわりで整級数を用いて解を表わすことができることを学びました．ここでは，通常点以外点を考えます．通常点でない点は**特異点 (singular point)** といいます．$x = a$ が特異点のとき，

$$(x-a)P(x),\ (x-a)^2 Q(x)$$

が $x = a$ でともに解析的であるとき，$x = a$ は**確定特異点 (regular singular point)** といい，それ以外は**不確定特異点 (irregular singular point)** といいます．

例題 4.3 次の微分方程式の特異点を見つけ，分類せよ．

$$(x-1)^2 x^2 (x-2)y'' + 5x^2 y' - (x-2)y = 0.$$

解

$$P(x) = \frac{5x^2}{(x-1)^2x^2(x-2)},\ Q(x) = \frac{-(x-2)}{(x-1)^2x^2(x-2)}$$

より $x = 1, 0, 2$ は特異点．次に

$$(x-1)P(x) = \frac{5x^2}{(x-1)x^2(x-2)}$$

より $x = 1$ は不確定特異点．他の 2 つの特異点は確定特異点． ■

通常点のときと同様，確定特異点のまわりにも級数解が存在します．

定理 4.7 2 階線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

において $x = a$ が確定特異点であるとき，$x = a$ のまわりで

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^{n+r},\ c_0 \neq 0$$

の形で表わされる解が存在する．

この級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^{n+r}$ は **Frobenius 級数 (Frobinius series)** とよばれ，この級数を解として c_n を求める方法を Frobenius 法といいます．次の例題で Frobenius 法の用い方を説明します．

例題 4.4 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの級数解を求めよ．

$$L(y) = 2xy'' + 3y' - y = 0$$

解

$$P(x) = \frac{3}{2x},\ Q(x) = -\frac{1}{2x}$$

より $x = 0$ は確定特異点．よって解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r},\ c_0 \neq 0$ とおく．これを微分することにより得られる

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

を元の式に代入すると

$$L(y) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

となる．ここで x のベキを必ず一番小さいものにそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^{n+r-1} = 0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものにそろえると

$$\underbrace{r(2r-1)c_0 x^{r-1}}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(2n+2r+1)c_n - c_{n-1}]x^{n+r-1} = 0$$

となる．ここで $n=0$ のときでてきた方程式 $r(2r+1)=0$ を**決定方程式 (indicial equation)** という．この方程式を解くと $r=0,\ \frac{1}{2}$．これより 2 つの一次独立な級数解

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ y_2(x)=|x|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

を得る．また x^{n+r-1} の係数を 0 とおくと漸化式

$$c_n=\frac{c_{n-1}}{(n+r)(2n+2r+1)},\ n\geq 1$$

を得る．ここで $r=0$ とおくと

$$c_n=\frac{c_{n-1}}{n(2n+1)}\ \text{より}\ c_n=\frac{2^nc_0}{(2n+1)!}$$

となるので,

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nc_0}{(2n+1)!}x^n.$$

また $r=\frac{1}{2}$ とおくと

$$c_n=\frac{c_{n-1}}{n(2n-1)}\ \text{より}\ c_n=\frac{2^nc_0}{(2n-1)!}$$

となるので,

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}|x|^{-\frac{1}{2}}\frac{2^nc_0}{(2n-1)!}x^n.\ \blacksquare$$

例題 4.5 次の微分方程式の $x=0$ のまわりでの級数解をひとつ求めよ.

$$L(y)=4x^2y''+(3x+1)y=0.$$

解 $Q(x)=\frac{3x+1}{4x^2}$ より $x=0$ は確定特異点．そこで $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ とおくと,

$$L(\sum c_nx^{n+r})=\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}3c_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

となる．ここでベキを一番小さな x^{n+r} でそろえると,

$$\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+r)(n+r-1)+1]c_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}3c_{n-1}x^{n+r}=0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものでそろえると

$$\underbrace{(4r(r-1)+1)c_0x^r}_{n=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\{[4(n+r)(n+r-1)+1]c_n+3c_{n-1}\}x^{n+r}=0$$

を得る．決定方程式は $4r^2-4r+1=0$ となるので，$r=\frac{1}{2}$．また漸化式

$$c_n=\frac{-3c_{n-1}}{4(n+r)(n+r-1)+1}\ \text{より}\ c_n=\frac{-3c_{n-1}}{4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})+1}=\frac{-3c_{n-1}}{4n^2}.$$

よって，ひとつの解は

$$y_1(x)=|x|^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ \text{ただし}\ c_n=\frac{-3c_{n-1}}{4n^2},\ n\geq 1.\ \blacksquare$$

上の例題の解答は完全でありません．一次独立な解が 2 つあるはずです．ではもうひとつの解はどうやったら求まるのでしょうか．すでに学びましたが，ひとつの解がわかっているときは，階数低減法を用いてもうひとつの解を求めることができます．ここでは証明しませんが，もうひとつの解は次のように表わされることがわかっています．

定理 4.8 2 階線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

において $x = 0$ が確定特異点で，決定方程式の解 r が重解のとき，1 次独立な 2 つの解 y_1, y_2 は次の形で与えられる．

$$y_1 = |x|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ (c_n \neq 0),$$

$$y_2 = y_1 \log|x| + |x|^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

例題 4.6 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの級数解を求めよ．

$$L(y) = 4x^2 y'' + (3x + 1)y = 0$$

解 上の例題で y_1 はすでに求めたので，y_2 を求める．定理より，$y_2 = y_1 \log|x| + |x|^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ の形をした解を探す．計算の都合上 $x > 0$, $c_0 = 1$ とおく．$L(y) = 0$ に y_2 を代入すると

$$\begin{aligned} L(y_2) &= 4x^2(y_1'' \log x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2}) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} 4(n + \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2}) C_n x^{n+3/2} + (3x + 1) y_1 \log x + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^{n+5/2} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+3/2} \\ &= \log x L(y_1) + 8xy_1' - 4y_1 + 3C_0 x^{3/2} + C_0 x^{3/2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [4(n + \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2}) C_n + C_n + 3C_{n-1}] x^{n+3/2} = 0 \end{aligned}$$

となる．y_1 の最初の何項かを表わすと

$$y_1 = x^{1/2} - \frac{3}{4} x^{3/2} + \frac{9}{64} x^{5/2} - \frac{27}{(36)(64)} x^{7/2} + \cdots.$$

ここで $L(y_1) \equiv 0$ を用いると

$$(4C_0 - 6)x^{3/2} + (16C_1 + 3C_0 + \frac{9}{4})x^{5/2} + (36C_2 + 3C_1 - \frac{9}{32})x^{7/2} + \cdots = 0$$

これより $C_0 = \frac{3}{2}, C_1 = -\frac{27}{64}, C_2 = \frac{11}{256}, \ldots$．　よって

$$y_2 = \log x(x^{1/2} - \frac{3}{4}x^{3/2} + \frac{9}{64}x^{5/2} - \frac{3}{256}x^{7/2} + \cdots) + \frac{3}{2}x^{3/2} - \frac{27}{64}x^{5/2} + \frac{11}{256}x^{7/2} + \cdots. \blacksquare$$

例題 4.7 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの級数解を求めよ．

$$L(y) = x^2 y'' + (x^2 - 3x)y' + 3y = 0.$$

解 $P(x)=\frac{x^2-3x}{x^2}$, $Q(x)=\frac{3}{x^2}$ より $x=0$ は確定特異点．そこで $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$ とおくと

$$L(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r})=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}3c_nx^{n+r}=0.$$

ここでベキを x^{n+r} でそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)-3(n+r)+3]c_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r}=0.$$

これより

$$\underbrace{(r(r-1)-3r+3)c_0x^r}_{n=0}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+r)(n+r-1)-3(n+r)+3]c_n+(n+r-1)c_{n-1}\}x^{n+r}=0$$

を得る．ここで決定方程式 $r^2-4r+3=0$ より $r=1,3$．よって 2 つの解

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1},\ y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+3}$$

を得る．また x^{n+r} の係数を 0 とおくことより，漸化式

$$c_n=\frac{-(n+r-1)c_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)-3(n+r)+3}$$

を得る．$r=1$ のとき c_n を求めると

$$c_n=\frac{-nc_{n-1}}{(n+1)n-3(n+1)+3}=\frac{-nc_{n-1}}{n^2-2n}$$

となる．また $r=3$ のとき C_n を求めると

$$C_n=\frac{-(n+2)C_{n-1}}{(n+3)(n+2)-3(n+3)+3}=\frac{-(n+2)C_{n-1}}{n^2+2n}.$$

ところが c_n と C_n はよく見ると $c_{n+2}=C_n$．つまり $y_1=y_2$．そこでもうひとつ一次独立な解を探さなければならない．そのために次のような定理がある．

定理 4.9 2 階線形微分方程式

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

において $x=0$ が確定特異点で，決定方程式の解 r_1, r_2 の差が正の整数のとき，1 次独立な 2 つの解 y_1,y_2 は次の形で与えられる．

$$y_1=|x|^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\ (c_n\neq 0),$$
$$y_2=cy_1\log|x|+|x|^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n\ (C_0\neq 0).$$

これより上の例題のもうひとつの解は $y_2=cy_1\log x+x\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ を $L(y)=4x^2y''+(3x+1)y=0$ に代入することにより求めることができる． ■

4.3.1　演習問題

1. 次の微分方程式の特異点をみつけ分類せよ.

(a) $x^2y'' + xy' + y = e^x$

(b) $x(x-1)^3y'' + xy' + (x-1)^2y = 0$

(c) $(2-x)y'' + xy' + \frac{y}{(x-2)^2} = 0$

2. 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの級数解をひとつ求めよ.

(a) $x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0$

(b) $xy'' + y' + xy = 0$

(c) $4x^2y'' - 2x(x-2)y' - (3x+1)y = 0$

3. 次の微分方程式の付記した点のまわりでの整級数解を求めよ.

(a) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,\ a = 0$

この方程式は n 次の **Legendre の方程式**といいます.

(b) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0,\ a = 1$

(c) $x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0,\ a = 0$

この方程式は ν 次の **Bessel の方程式**といいます.

第 5 章

ラプラス変換

5.1 ラプラス変換の定義

19 世紀後半，オリバー・ヘービサイド (Oliver Heaviside) はラプラス変換を用いて演算子法の基礎を確立しました．演算子法とは，簡単にいうと微分積分の演算を記号的または代数的に扱って，線形微分方程式を簡単に解く技法のことです．

変換の一般的な考え方は何らかな一意性をもつ 2 つの関数の組を作ることといえます．たとえば，関数とその導関数の組を考えます．このとき，導関数は演算子，または変換と言われ，$D(f)$ で表わします．この組は一意性をもっています．なぜなら同じ導関数をもつ 2 つの関数は定数を除いて等しいということができます．同様に，関数の積分，$I(f)$ も変換です．ここで，

$$I\{f\} = \int_0^x f(t)dt.$$

この積分変換は次の重要な変換に拡張されます．

$$T\{f\} = \int_0^\infty K(s,t)f(t)dt.$$

ラプラス変換はこの変換の中のひとつで $K(s,t) = e^{-st}$ とおいたものです．

定義 5.1 関数 $f(t)$ のラプラス変換は，次の積分が存在する場合，関数 $F(s)$ で与えられる．

$$F(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

記号 $\mathcal{L}\{f\}$ または $\mathcal{L}\{f(t)\}$ も $F(s)$ の代りに用いられます．
一般に変数 s は複素数ですが，この章では s は実数とします．

例題 5.1 関数 $f(t) = t$ のラプラス変換を求めよ．

解

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st}tdt \quad \left(\begin{array}{ll} u = tdt & dv = e^{-st}dt \\ du = dt & v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right) \\
&= -\frac{te^{-st}}{s} \mid_0^{\infty -} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt \\
&= -\frac{e^{-st}}{s^2} \mid_0^{\infty -} \\
&= -\frac{1}{s^2}(\lim_{t\to\infty} e^{-st} - 1) \\
&= \frac{1}{s^2}\ (s > 0)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

この例題は与えられた関数のラプラス変換が，s の値がある定数 a より大きいところでしか定義されない例として典型的です．ここで大事なことは定数 a が何であるかではなく広義積分が存在するような定義域 $s > a$ が存在するということです．後に逆変換を考えるとき，このような定義域についてもっと注意をはらいます．

例題 5.2 関数 $f(t) = c$ のラプラス変換を求めよ．

解

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c\} &= \int_0^\infty e^{-st}cdt \\
&= c\int_0^\infty e^{-st}dt \\
&= -\frac{c}{s}e^{-st} \mid_0^{\infty -} \\
&= \frac{c}{s}\ (s > 0)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

例題 5.3 関数 $f(t) = e^{at}$ のラプラス変換を求めよ．

解

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \\
&= -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t} \mid_0^{\infty -} \\
&= \frac{1}{s-a}\ (s > a)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

例題 5.4 関数 $f(t) = e^{iat}$ のラプラス変換を求めよ．

解

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{iat}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{iat}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-ia)t}dt \\ &= -\frac{1}{s-ia}e^{-(s-ia)t}\ |_0^{\infty-} \\ &= -\frac{1}{s-ia}e^{-st}(\cos at + i\sin at)\ |_0^{\infty-} \\ &= \frac{1}{s-ia}\ (s>0)\ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 5.5 関数 $f(t)=\sin at$ のラプラス変換を求めよ.

解 $\sin at = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$ より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin t\} &= \int_0^\infty e^{-st}\sin at dt = \int_0^\infty e^{-st}(\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i})dt \\ &= \frac{1}{2i}(\int_0^\infty e^{-(s-ia)t}dt - \int_0^\infty e^{-(s+ia)t}dt) \\ &= \frac{1}{2i}(\frac{1}{s-ia}-\frac{1}{s+ia}) = \frac{a}{s^2+a^2}\ (s>0)\ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 5.6 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<2\\ -2, & 2<t<5\\ 0, & t>5\end{cases}$

解

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^2 e^{-st}dt - 2\int_2^5 e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}e^{-st}\ |_0^2 + \frac{2}{s}e^{-st}\ |_2^5 \\ &= \frac{1}{s} - \frac{3}{s}e^{-2s} + \frac{2}{s}e^{-5s}\ \blacksquare\end{aligned}$$

このような区分的に連続な関数を扱うのに便利なものとして単位ステップ関数とよばれるものがあります. **単位ステップ関数 (unit step function)** $u_a(t)$ は次のように定義されます.

$$u_a(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases}$$

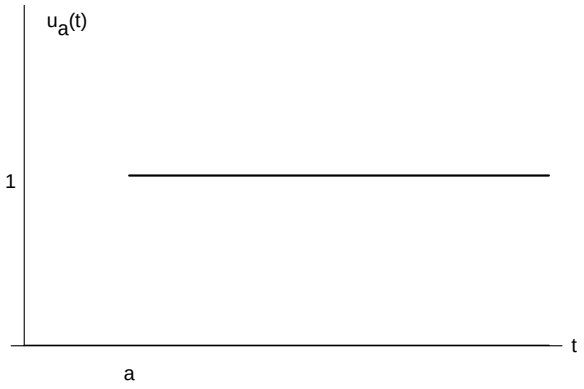

図 5.1　単位ステップ関数

例題 5.7 単位ステップ関数 $u_a(t)$ のラプラス変換を求めよ.

解

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_a(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}u_a(t)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\,|_a^{\infty -} = \frac{1}{s}e^{-sa},\ (s>0)\ \blacksquare\end{aligned}$$

単位ステップ関数を用いると例題 5.6 の $f(t)$ は次のように表わせます. 各自考えてみて下さい.

$$f(t) = u_0(t) - u_2(t) - 2(u_2(t) - u_5(t)) = u_0(t) - 3u_2(t) + 2u_5(t).$$

ここでこれから必要となるラプラス変換を表にまとめておきます.

表 5.1　ラプラス変換公式

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
e^{iat}	$\frac{1}{s-ia}$	$s>0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0,\ n$ 整数
t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$s>0, a>-1$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$s>0$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$s>0$
$u_a(t)$	$\frac{e^{-sa}}{s}$	$s>0$

5.1.1 演習問題

1. 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(a) $f(t)=\begin{cases}2, & 0\le t\le 4\\ t, & 4<t\end{cases}$ (b) $f(t)=t^2-2t-5$

(c) $f(t)=te^{-t}$ (d) $f(t)=e^{2t}\cos t$

(e) $f(t)=t^n$

5.2 ラプラス変換の存在

ラプラス変換はどのような関数に対しても存在するわけではありません．たとえば，$f(t)=e^{t^2}$ のラプラス変換は存在しません．なぜなら

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}dt=e^{-\frac{s^2}{4}}\int_0^\infty e^{(t-\frac{s}{2})^2}dt=e^{-\frac{s^2}{4}}\int_{-\frac{s}{2}}^\infty e^{u^2}du=\infty$$

ではどんなときラプラス変換は存在するのでしょうか．この疑問に答えるための準備として，次の定義をみてみましょう．

定義 5.2 (指数位数) $t\ge t_0$ のとき $|f(t)|\le Me^{at}$ を満たす定数 M,a が存在するとき，関数 $f(t)$ は**指数位数 (exponential order)** または指数位数 a であるという．

例題 5.8 次の関数のうち指数位数のものをあげよ．

(a) e^{5t} (b) t^3 (c) $\sin e^{t^2}$ (d) e^{t^2}

解 (a) $a>5$ のとき $e^{5t}<e^{at}$，よって e^{5t} は指数位数

(b) $a>0$ のとき $\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^{at}}=0$，よって t^3 は指数位数.

(c) $\sin e^{t^2}\le 1=e^{0t}$ より $\sin e^{t^2}$ は指数位数.

(d) $\lim_{t\to\infty}\frac{e^{t^2}}{e^{at}}=\infty$ より，e^{t^2} は指数位数でない． ■

定義 5.3 (区分的に連続) 有限な区間 I で定義された関数 $f(t)$ が次の条件を満たすとき，$f(t)$ は区間 I で**区分的に連続 (piecewise continuous function)** であるという．

(i) $f(t)$ は区間 I で有限個の点を除いて連続である．

(ii) $f(t)$ の不連続点 t_0 では，左側および右側極限値が存在する．

例題 5.9 下の図は区分的に連続な関数の一例です．

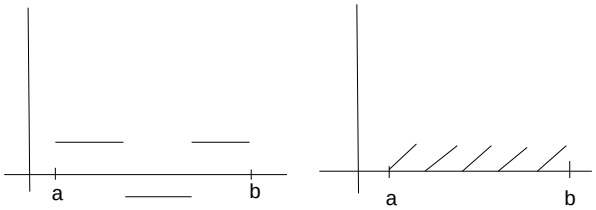

図 5.2 区分的に連続な関数

定理 5.1 任意の $t > 0$ に対して，関数 $f(t)$ が区間 $[0, t]$ で区分的に連続かつ指数位数 a ならば，$f(t)$ のラプラス変換は存在する．

証明 $f(t)$ は指数位数 a より，$t \geq t_0$ のとき

$$|f(t)| < M_1 e^{at}$$

を満たす M_1，a が存在する．また $f(t)$ は区分的に連続より，$|f(t)|$ は $[0, t_0]$ で有界．よって

$$|f(t)| < M_2 \leq M_2 e^{|a|t},\ (0 \leq t \leq t_0).$$

M を M_1 と M_2 の大きい方とすると

$$|f(t)| < M e^{|a|t}\ (t \geq 0).$$

これより

$$|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt| \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt < \int_0^\infty M e^{(|a|-s)t} dt = \frac{M}{s-|a|},\ (s > |a|)$$

したがって，$f(t)$ のラプラス変換は存在する． ■

5.2.1 演習問題

1. 次の関数は指数位数であることを示せ．

(a) $\sin 3t$　　(b) e^{100t}

(c) $\log(1+t)$　(d) $t^3 e^{7t}$

5.3 基本法則

ラプラス変換の基本法則について考える前に，簡単な変換の例として対数関数を考えてみましょう．対数をとると積・商・累乗がより簡単な和・差・積に変わります．ラプラス変換も大まかにいうと同じような働きをします．つまり，ラプラス変換をとると微分・積分・指数関数の積が s での積・s での商・そして移動に変わります．これらの性質と線形性によりラプラス変換は簡単に計算できるので応用範囲が広がり，便利な道具として発展してきました．

定理 5.2 (線形法則) 任意の定数 c_1, c_2 に対して，

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

証明

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} \equiv \int_0^\infty e^{-st} \{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} dt$$

積分の線形性より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt \\ &= c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 5.10 $\mathcal{L}\{t^2 - 2t - 5\}$ を求めよ．

解 線形法則より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2-2t-5\} &= \mathcal{L}\{t^2\}-2\mathcal{L}\{t\}-\mathcal{L}\{5\}\\ &= \frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}-\frac{5}{s}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

定理 5.3 (第 1 移動法則) $s>\alpha$ のとき $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ならば,

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a),\ (s>a+\alpha)$$

(注) $F(s-a)$ とは $F(s)$ を $a>0$ のときは右に a だけ移動し，$a<0$ のときは左に $|a|$ だけ移動することです.

証明

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt\\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt\\ &= F(s-a),\ (s>a+\alpha).\ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 5.11 $\mathcal{L}\{te^{-t}\}$ を求めよ.

解 表 5.1 より t のラプラス変換は $1/s^2$. よって第 1 移動法則より,

$$\mathcal{L}\{te^{-t}\}=\frac{1}{(s+1)^2},\ s>-1.\ \blacksquare$$

例題 5.12 $\mathcal{L}\{e^{2t}\cos t\}$ を求めよ.

解 表 5.1 より $\cos t$ のラプラス変換は $s/(s^2+1)$. よって第 1 移動法則より

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cos t\}=\frac{s-2}{(s-2)^2+1},\ s>1.\ \blacksquare$$

例題 5.13 $\mathcal{L}\{f(t)\}=e^{-2s}/(s+2),\ s>-2$ のとき，$\mathcal{L}\{e^{3t}f(t)\}$ を求めよ.

解 $e^{3t}f(t)$ のラプラス変換は $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ の s を $s-3$ に置き換えることによって得られる. したがって

$$\mathcal{L}\{e^{3t}f(t)\}=\frac{e^{-2(s-3)}}{s-1},\ s>2.\ \blacksquare$$

定理 5.4 (第 2 移動法則) 任意の正の数 a に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\} &= e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\},\\ \mathcal{L}\{u_a(t)f(t)\} &= e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}.\end{aligned}$$

証明

$$e^{-as}F(s)=\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)d\tau.$$

ここで $\tau = t - a$ とおくと

$$\begin{aligned} e^{-as}F(s) &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} u_a(t) f(t-a)dt \\ &= \mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\}. \blacksquare \end{aligned}$$

例題 5.14 $t^2 u_3(t)$ のラプラス変換を求めよ.

解 t^2 を $t = 3$ について Taylor 展開すると,

$$t^2 = (t-3+3)^2 = (t-3)^2 + 6(t-3) + 9$$

よって

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^2 u_3(t)\} &= \mathcal{L}\{(t-3)^2 u_3(t)\} + \mathcal{L}\{6(t-3)u_3\} + \mathcal{L}\{9u_3(t)\} \\ &= e^{-3s}\mathcal{L}\{t^2\} + 6e^{-3s}\mathcal{L}\{t\} + 9\mathcal{L}\{u_3(t)\} \\ &= \frac{2e^{-3s}}{s^3} + \frac{6e^{-3s}}{s^2} + \frac{9e^{-3s}}{s}. \blacksquare \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^2 u_3(t)\} &= e^{-3s}\mathcal{L}\{(t+3)^2\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{t^2+6t+9\} \\ &= e^{-3s}(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}). \blacksquare \end{aligned}$$

例題 5.15 $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t \le 4 \\ t, & 4 < t \end{cases}$ のラプラス変換を求めよ.

解 $f(t)$ を単位ステップ関数を用いて表わすと

$$f(t) = 2(u_0(t) - u_4(t)) + tu_4(t) = 2u_0(t) + (t-2)u_4(t).$$

よって

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= 2\mathcal{L}\{u_0(t)\} + \mathcal{L}\{(t-2)u_4(t)\} \\ &= \frac{2}{s} + e^{-4s}\mathcal{L}\{t+2\} = \frac{2}{s} + \frac{e^{-4s}}{s^2} + \frac{2e^{-4s}}{s}. \blacksquare \end{aligned}$$

5.3.1 演習問題

1. 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(a) $f(t) = t^2 + 3t - 4$　(b) $f(t) = e^{3t+4}$　(c) $f(t) = \sin^2 t$

(d) $e^{2t}\sin t$　(e) $f(t) = t^3 e^{3t}$　(f) $f(t) = \cos(t+a)$

(g) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 3 \\ 0, & 3 < t < 6 \\ 2, & t > 6 \end{cases}$　(h) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(i) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 2 \\ t^2, & 2 < t < 4 \\ t, & 4 < t < 8 \\ 3, & t > 8 \end{cases}$

定理 5.5 (微分法則) $f(t)$ は $[0,\infty)$ で連続で，指数位数の関数とする．さらに $f(t)$ が $(0,\infty)$ で区分的に連続ならば

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0+),$$

ここで $f(0+) = \lim_{t\to\infty} f(t)$.

証明 定義より

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} \equiv \lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(t)e^{-st}dt.$$

区間 $[0,b]$ を $f'(t)$ が不連続な点 t_j で分割する．

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{t_1} f'(t)e^{-st}dt + \int_{t_1}^{t_2} f'(t)e^{-st}dt + \cdots + \lim_{b\to\infty}\int_{t_n}^{b} f'(t)e^{-st}dt.$$

ここで部分積分を用いてそれぞれ積分すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} = f(t)e^{-st}\,|_0^{t_1} + s\int_0^{t_1} f(t)e^{-st}dt + f(t)e^{-st}\,|_{t_1}^{t_2} \\ + s\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-st}dt + \cdots + \lim_{b\to\infty} f(t)e^{-st}\,|_{t_n}^{b} + \lim_{b\to\infty}\int_{t_n}^{b} f(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

$f(t)$ は連続なので $k = 1,2,\ldots,n$ において，$f(t_k - 0) = f(t_k + 0)$．よって

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0+) + \lim_{b\to\infty} f(b)e^{-sb} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

$f(t)$ は指数位数より，$s > a$ のとき第 2 項は 0．したがって

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0+). \blacksquare$$

上の定理を繰り返し適用することにより，次の公式を得ることができます．

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+).$$

定理 5.6 (積分法則) $f(t)$ が区分的に連続で指数位数の関数ならば

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s}$$

証明 ($f(t)$ が連続の場合)
$g(t) = \int_0^t f(u)du$ とおくと，$g'(t) = f(t), g(0+) = 0$. また $f(t)$ は指数位数の関数より，

$$|g(t)| = |\int_0^t f(u)du| \le \int_0^t |f(u)|du \le \int_0^{\infty} Me^{au}du = \frac{M}{a}(e^{at} - 1) < \frac{Me^{at}}{a}.$$

したがって，$g(t)$ も指数位数の関数となり，微分法則を用いると，

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0+) = s\mathcal{L}\{g(t)\}. \blacksquare$$

例題 5.16 $\mathcal{L}\{\int_0^t u^2e^{3u}\}, \mathcal{L}\{\int_2^t u^2e^{3u}\}$ を求めよ．

解 $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\} = \frac{2}{(s-3)^2}$ より $\mathcal{L}\{\int_0^\infty u^2e^{3u}\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s-3)^2}$. 次に

$$\int_2^t f(u)du = \int_0^t f(u)du - \int_0^2 f(u)du$$

より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\int_2^t u^2e^{3u}\} &= \mathcal{L}\{\int_0^t u^2e^{3u}du\} - \mathcal{L}\{\int_0^2 u^2e^{3u}\}\\ &= \frac{2}{s(s-3)^2} - \frac{1}{s}\int_0^2 u^2e^{3u}du\\ &= \frac{2}{s(s-3)^2} - \frac{1}{s}[e^{3u}(\frac{u^2}{3} - \frac{2u}{9} + \frac{2}{27})]\ |_0^2\\ &= \frac{2}{s(s-3)^2} - \frac{2}{27s}(1-13e^6). \blacksquare\end{aligned}$$

例題 5.17 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(s^2+4)}$ のとき $f(t)$ を求めよ.

解 $\mathcal{L}\{\frac{\sin 2t}{2}\} = \frac{1}{s^2+4}$. 積分法則より

$$\mathcal{L}\{\int_0^t \frac{\sin 2u}{2}du\} = \frac{1}{s}(\frac{1}{s^2+4})$$

したがって,

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin 2u}{2}du = \frac{-\cos 2u}{4}\ |_0^t = \frac{1-\cos 2t}{4}.$$

別解

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4})$$

と表わせる. また $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$ より $f(t) = \frac{1-\cos 2t}{4}$ となる. $\blacksquare$

定理 5.7 $f(t)$ は区分的に連続で指数位数 a の関数とする. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ならば

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s),\ s > a$$

証明 定義より $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. $f(t)$ は指数位数より $tf(t)$ も指数位数となり, $\mathcal{L}\{tf(t)\}$ は存在する. また $f(t)$ は区分的に連続なので微分と積分の順序の交換が可能である. したがって,

$$-\frac{dF(s)}{ds} = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st}f(t))dt = -\int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt = \mathcal{L}\{tf(t)\}. \blacksquare$$

上の定理をくり返し適用すれば, 次の系が得られます.

系 5.1 $f(t)$ は区分的に連続で指数位数 a の関数とする. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ならば

$$\mathcal{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^nF^{(n)}(s),\ s > a.$$

例題 5.18 $\mathcal{L}\{t^2\sin t\}$ を求めよ.

解 $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$. よって

$$\mathcal{L}\{t^2\sin t\} = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s^2+1}) = \frac{2(3s^2-1)}{(s^2+1)^3}. \blacksquare$$

例題 5.19 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \log\left[\frac{s+2}{s-3}\right] = F(s)$ のとき $f(t)$ を求めよ.

解 $F(s)$ は私たちが知っている関数のラプラス変換に似ていません．そこで $F'(s)$ を考えて見ます.

$$\begin{aligned} -F'(s) &= -\frac{d}{ds}(\log\frac{s+2}{s-3}) = -\frac{d}{ds}(\log(s+2) - \log(s-3)) \\ &= \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+2} = \mathcal{L}\{e^{3t} - e^{-2t}\}. \end{aligned}$$

よって上の定理より $tf(t) = e^{3t} - e^{-2t}$．したがって,

$$f(t) = \frac{e^{3t}}{t} - \frac{e^{-2t}}{t}. \blacksquare$$

図 5.3,5.4,5.5 のような関数を**周期関数 (periodic function)** といいます．周期関数のラプラス変換は次の定理より簡単に求めることができます.

定理 5.8 $f(t)$ が周期 P の区分的に連続な関数ならば，つまり

$$f(t) \equiv f(t+P) \equiv f(t+2P) \cdots \equiv f(t+nP) \text{ ならば}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Ps}} \int_0^P e^{-st} f(t)dt,\ s > 0.$$

証明

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= \int_0^P e^{-st} f(t)dt + \int_P^{2P} e^{-st} f(t)dt + \cdots + \int_{(n-1)P}^{nP} e^{-st} f(t)dt + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)P}^{nP} e^{-st} f(t)dt. \end{aligned}$$

ここで $u = t - (n-1)P$ とおくと

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=1}^\infty e^{-(n-1)sP} \int_0^P e^{-su} f(u + (n-1)P)du.$$

つぎに，すべての n において $f(u+nP) \equiv f(u)$ が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{n=1}^\infty e^{-(n-1)sP} \int_0^P e^{-su} f(u)du \\ &= \frac{1}{1-e^{-sP}} \int_0^P e^{-su} f(u)du,\ s > 0. \blacksquare \end{aligned}$$

例題 5.20 次のグラフのラプラス変換を求めよ.

解

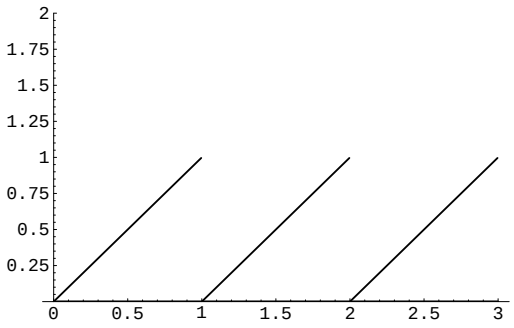

図 5.3　$f(t)$: sawtooth 関数

(a)　関数 $f(t)$ は，区間 $(0,1)$ で $f(t)=t$ の周期 1 の関数より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-st}tdt \\ &= \frac{1}{1-e^{-s}}(-\frac{t}{s}e^{-st}\ |_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt) \\ &= \frac{1}{1-e^{-s}}(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s^2}(e^{-s}-1)) \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}. \blacksquare\end{aligned}$$

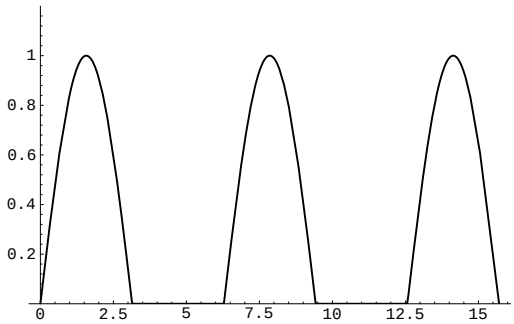

図 5.4　$h(t)=(|\sin t|+\sin t)/2$

(b)　関数 $h(t)$ は，区間 $(0,\pi)$ で $\sin t$，区間 $(\pi,2\pi)$ で 0 の周期 2π の関数だから

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^\pi e^{-st}\sin t dt = \frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}. \blacksquare$$

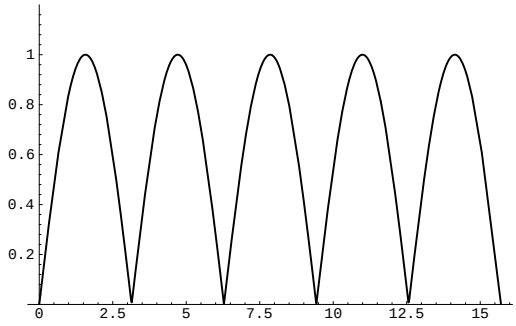

図 5.5 $g(t) = |\sin t|$

(c) 関数 $g(t)$ は, $g(t) = |\sin t|$. また $h(t) = (|\sin t| + \sin t)/2$ より $g(t) = 2h(t) - \sin t$. したがって

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g(t)\} &= \mathcal{L}\{2h(t)\} - \mathcal{L}\{\sin t\} \\ &= \frac{2}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})} - \frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s^2+1}\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}. \blacksquare\end{aligned}$$

ここまでに扱った法則をまとめてみると次のような表 5.2 にすることができます. これらはラプラス変換の一般的な性質ですので次に進む前に各自使えるようにしておいて下さい.

表 5.2 ラプラス変換法則

t 空間	s 空間
$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
$g(t)$	$G(s)$
$c_1 f(t) + c_2 g(t)$	$c_1 F(s) + c_2 G(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$u_a(t) f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0+)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0+) - f'(0+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f(t) \equiv f(t+P) \cdots \equiv f(t+nP)$	$\frac{1}{1-e^{-Ps}} \int_0^P e^{-st} f(t)dt$

この節を閉じる前にラプラス変換の有用性について述べておきます. そのための例として, 上に掲げたラプラス変換の性質をもちいて初期値問題の解のラプラス変換を求めてみます.

例題 5.21 次の初期値問題の解のラプラス変換を求めよ.

$$y'' + 2y' + 5y = f(t),$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases},$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

解 両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

となる．$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ とおき，微分法則を用いると，

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = \mathcal{L}\{u_0(t) - u_\pi(t)\}$$

と表わせる．ここで初期値を代入し，$\mathcal{L}\{f(t)\}$ を計算すると

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s}.$$

したがって

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}.$$

これが解 $y(t)$ のラプラス変換です．■

5.3.2 演習問題

1. 次の初期値問題の解のラプラス変換を求めよ．

(a) $y'' + 4y' - 5y = e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

(c) $y'' + 4y' - 5y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \pi \\ \cos t, & t > \pi \end{cases}$$

5.4 ラプラス逆変換

ラプラス変換 $F(s)$ が与えられたとき，ラプラス変換が $F(s)$ となるような関数 $f(t)$ を求める準備ができました．

定義 5.4 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ となるような t の関数 $f(t)$ が存在するとき，$f(t)$ を $F(s)$ のラプラス逆変換といい，次のようにあらわします．

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t).$$

ラプラス逆変換を求めるとき，次の変換表は便利です．

表 5.3　ラプラス逆変換表

$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\cos bt$
$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\sin bt$

例題 5.22 次の関数のラプラス逆変換を求めよ.

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}.$$

解

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} - \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

より，まず $\frac{1}{s(s^2+2s+5)}$ の逆変換を求める.
$\frac{1}{s(s^2+2s+5)}$ を部分分数分解すると

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}.$$

ここで定数 A, B, C の求め方はいろいろありますが，ここでは次のようにして求めます.

$$A = s(\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}) \mid_{s=0},$$

$$(Bs + C) \mid_{s^2+2s+5=0} = (s^2 + 2s + 5)\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}) \mid_{s=-1+2i} = \frac{1}{s} \mid_{s=-1+2i}.$$

これより

$$A = \frac{1}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = -\frac{2}{5}.$$

よって

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}] &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{1/5}{s}] - \frac{1}{5}\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}[\frac{s + 1 + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}] \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t).\end{aligned}$$

次に $\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}$ の逆変換は第 2 移動法則をつかって求める．第 2 移動法則より

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}] = u_\pi(t)f(t - \pi),$$

ただし,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}] = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t).$$

よって

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}] = u_\pi(t)f(t - \pi) \\ &= u_\pi(t)(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}(e^{-(t-\pi)}(\cos 2(t - \pi) + \frac{\sin 2(t - \pi)}{2})))\end{aligned}$$

となり，これより

$$\begin{aligned}y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{5} &- \frac{1}{5}(e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t) \\ &+ u_\pi(t)(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}(e^{-(t-\pi)}(\cos 2(t - \pi) + \frac{\sin 2(t - \pi)}{2}))).\ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 5.23 $F(s)=\frac{1}{(s-2)^2(s^2-2s-3)}$ のとき $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ を求めよ.

解 $F(s)$ を部分分数分解を用いて展開すると

$$F(s)=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s-3}+\frac{D}{s+1}$$

これより A,B,C,D を求めると,

$$B=(s-2)^2(\frac{1}{(s-2)^2(s^2-2s-3)})\mid_{s=2}=-\frac{1}{3}$$

$$A=\{(s-2)^2(\frac{1}{(s-2)^2(s^2-2s-3)})\}'\mid_{s=2}=-\frac{2}{9}$$

$$C=(s-3)(\frac{1}{(s-2)^2(s+1)(s-3)})\mid_{s=3}=\frac{1}{4}$$

$$D=(s+1)(\frac{1}{(s-2)^2(s+1)(s-3)})\mid_{s=3}=-\frac{1}{36}$$

よって

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=-\frac{2e^{2t}}{9}-\frac{te^{2t}}{3}+\frac{e^{3t}}{4}-\frac{e^{-t}}{36}.\ \blacksquare$$

5.4.1　演習問題

1. 次の関数の逆変換を求めよ.

(a) $F(s)=\frac{5}{(s-2)^6}$　(b) $F(s)=\frac{s}{(s+2)^2+1}$　(c) $F(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$
(d) $F(s)=\frac{s+1}{s^2+2s+2}$　(e) $F(s)=\frac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$　(f) $F(s)=\frac{3s^2+4}{s^4+s^2}$
(g) $F(s)=\frac{1+e^{-2s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$

5.5　微分方程式への応用

ラプラス変換の応用としてここでは 2 階の定数係数常微分方程式の初期値問題

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=f(t),$$
$$y(t_0)=A_0,\ y'(t_0)=A_1$$

を解いてみましょう．初期条件は $t-t_0$ を新しい変数と考えれば，$t_0=0$ の場合に帰着できるので，初期条件は

$$y(0)=B_0,\ y'(0)=B_1$$

としてよいことになります．ここで両辺にラプラス変換を施し,

$$\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s),\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$$

とおくと,

$$a_2[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+a_1[sY(s)-y(0)]+a_0Y(s)=F(s).$$

これを $Y(s)$ について解くと

$$Y(s)=\frac{F(s)}{a_2s^2+a_1s+a_0}+\frac{a_2(sB_0+B_1)+a_1B_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}.$$

最後に $Y(s)$ のラプラス逆変換を求めれば，初期値問題の解が得られます．この手順を例題を用いて示します.

例題 5.24 ラプラス変換を用いて次の初期値問題を解け.

$$y'' + 2y' + 2y = \sin t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

解 両辺にラプラス変換を施すと

$$s^2Y(s) - s - 1 + 2(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

これを $Y(s)$ について解くと,

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} + \frac{s+3}{s^2+2s+2}.$$

最初の項を部分分数分解すると

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}.$$

ここで

$$As + B\ |_{s=i} = \frac{1}{s^2+2s+2}\ |_{s=i} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}.$$

よって, $B = \frac{1}{5},\ A = -\frac{2}{5}$. 同様にして C, D を求めると, $C = \frac{2}{5},\ D = \frac{3}{5}$. これより,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}\} &= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1-2s}{s^2+1}\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s+3}{s^2+2s+2}\} \\ &= \frac{1}{5}(\sin t - 2\cos t) + \frac{e^{-t}}{5}(2\cos t + \sin t).\end{aligned}$$

また

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+3}{s^2+2s+2}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1+2}{(s+1)^2+1}\} = e^{-t}(\cos t + 2\sin t).$$

したがって,

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{5}(7\cos t + 11\sin t) + \frac{1}{5}(\sin t - 2\cos t).\ \blacksquare$$

例題 5.25 RC 回路の起電圧を $e^{-t},\ t \geq 0$ とする. 初期電流が $1/R$ のとき, この回路に流れている電流を求めよ. (例題 1.18 参照)

解 Kirchhoff の電圧の法則より,

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du = e^{-t},\ i(0) = \frac{1}{R}.$$

両辺にラプラス変換を施すと

$$R\mathcal{L}\{i(t)\} + \frac{1}{C}\mathcal{L}\{\int_0^t i(u)du\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}.$$

ここで $\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$ とおき, 積分法則を用いると,

$$RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = \frac{1}{s+1}.$$

これを $I(s)$ について解くと,

$$I(s) = \frac{Cs}{(RCs+1)(s+1)} = \frac{A}{RCs+1} + \frac{B}{s+1}.$$

これより A, B を求めると，

$$A = \frac{Cs}{s+1}\,|_{s=-\frac{1}{RC}} = -\frac{C}{RC-1},$$

$$B = \frac{Cs}{RCs+1}\,|_{s=-1} = \frac{C}{RC-1}.$$

よって

$$I(s) = \frac{1}{RCs+1}\cdot\frac{-C}{RC-1} + \frac{1}{s+1}\cdot\frac{C}{RC-1}.$$

これよりラプラス逆変換を用いて $i(t)$ を求めると，

$$i(t) = -\frac{C}{RC-1}\frac{1}{RC}e^{-t/RC} + \frac{C}{RC-1}e^{-t}. \blacksquare$$

例題 5.26 次の初期値問題を解け.

$$y_1' + y_1 + 3y_2' = 1,\ y_1 + y_2' + 2y_2 = t,$$

$$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0.$$

解 与えられた方程式にラプラス変換を施し，$\mathcal{L}\{y_1(t)\} = Y_1(s),\ \mathcal{L}\{y_2(t)\} = Y_2(s)$ とおくと

$$sY_1(s) - y_1(0) + Y_1(s) + 3(sY_2(s) - y_2(0)) = \frac{1}{s},$$

$$Y_1(s) + sY_2(s) - y_2(0) + 2Y_2(s) = \frac{1}{s^2}.$$

よって

$$(s+1)Y_1(s) + 3sY_2(s) = \frac{1}{s},$$

$$Y_1(s) + (s+2)Y_2(s) = \frac{1}{s^2}.$$

ここで Cramer の公式を用いて $Y_1(s),\ Y_2(s)$ を求めると，

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} & 3s \\ \frac{1}{s^2} & s+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 3s \\ 1 & s+2 \end{vmatrix}} = \frac{s-1}{s(s^2+2)} = \frac{-1/2}{s} + \frac{s/2+1}{s^2+2},$$

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & \frac{1}{s} \\ 1 & \frac{1}{s^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 3s \\ 1 & s+2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{s^2(s^2+2)} = \frac{1/2}{s^2} - \frac{1/2}{s^2+2}.$$

これよりラプラス逆変換を用いて $y_1(t),\ y_2(t)$ を求めると，

$$y_1(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\cos\sqrt{2}t}{2} + \frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}$$

$$y_2(t) = \frac{t}{2} - \frac{\sin\sqrt{2}t}{2\sqrt{2}}$$

となる．$\blacksquare$

5.5.1 演習問題

1. 次の初期値問題を解け.

(a) $y'' + 4y' - 5y = e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

(c) $y'' + 4y' - 5y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \pi \\ \cos t, & t > \pi \end{cases}$$

(d) $\begin{cases} y_1' + y_2 = 0 \\ y_1 + y_2' = 0,\ y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y_1' - y_2' - y_2 = -e^t \\ y_1 + y_2' - y_2 = e^{2t},\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y_1'' + 2y_2' + y_1 = \sin t \\ y_2'' + 2y_1' + y_2 = 0,\ y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0 \end{cases}$

5.6 合成法則と積分方程式

ラプラス変換の章を閉じる前にもうひとつ紹介しなければならない法則，合成法則があります．まず**合成積 (convolution)** を定義します．

定義 5.5 関数 $f(t), g(t)$ は区分的に連続な関数であるとする．そのとき合成積 $f(t) * g(t)$ は次のように定義される．

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

例題 5.27 $\sin t$ と $\cos t$ の合成積を求めよ.

解

$$\begin{aligned}(\sin t) * (\cos t) &= \int_0^t \sin(t-\tau)\cos\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t (\sin t + \sin(t-2\tau))d\tau \\ &= \frac{\tau \sin t}{2}\ |_0^t + \frac{\cos(t-2\tau)}{4}\ |_0^t \\ &= \frac{t\sin t}{2}. \blacksquare\end{aligned}$$

定理 5.9 (合成法則) $f(t), g(t)$ が区分的に連続な関数で，指数位数の関数ならば，

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s).$$

証明

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f*g\} &= \int_0^\infty e^{-st}[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}[\int_0^\infty u_\tau(t)f(t-\tau)g(\tau)d\tau]dt\end{aligned}$$

ここで内側の積分は $u_\tau(t)$ を挿入することにより無限積分に拡張された．次に積分順序の交換を行なうと

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f*g\} &= \int_0^\infty g(\tau)[\int_0^\infty u_\tau(t)e^{-st}f(t-\tau)dt]d\tau \\ &= \int_0^\infty [e^{-\tau s}F(s)]d\tau \\ &= F(s)\int_0^\infty e^{-\tau s}g(\tau)d\tau \\ &= F(s)G(s). \blacksquare\end{aligned}$$

系 5.2

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)*g(t).$$

この定理より証明を引き伸ばしてきた積分法則の証明が示せます．

系 5.3 $f(t)$ が区分的に連続で指数位数の関数ならば

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s}$$

証明 $f_1(t)=1, f_2(t)=f(t)$ とおくと，合成法則より

$$\mathcal{L}\{f_1*f_2\} = \mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\} = \mathcal{L}\{f_1\}\mathcal{L}\{f_2\} = \frac{\mathcal{L}\{f\}}{s}. \blacksquare$$

例題 5.28 合成法則を用いて次のラプラス逆変換を求めよ．

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\}.$$

解

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1} = F(s)G(s)$$

と表わせる．また

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \sin t$$

より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\} &= 1*\sin t \\ &= \int_0^t \sin\tau d\tau \\ &= 1-\cos t. \blacksquare\end{aligned}$$

最後に合成法則の**積分方程式 (integral equation)** への応用を紹介しましょう．積分方程式とは未知関数として積分を含んだ方程式のことです．

例題 5.29 次の方程式を満たす関数 y を求めよ．

$$y(t) = t + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$

解 両辺にラプラス変換を施すと，

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}Y(s).$$

$Y(s)$ について解くと，

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}.$$

したがって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = t + \frac{t^3}{6}. \blacksquare$$

5.6.1 演習問題

1. 次の積分方程式を解け．

(a) $y(t) = e^{-t} + 2\int_0^t e^{-3\tau}y(t-\tau)d\tau$
(b) $y(t) = \cos t + \int_0^t y(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau$
(c) $y(t) = 2t + 1 + \int_0^t y(t-\tau)e^{-\tau}d\tau$

第 6 章

フーリエ級数

6.1 内積空間

ベクトル空間の中には大きさや方向を考える必要のないものもありますが，大きさを与えることのできるベクトル空間を**計量ベクトル空間 (normed vector space)** といいます．ここでは内積が定義できる計量ベクトル空間について考えます．とくに，ここでは区間 (a,b) で**区分的に連続な関数 (piecewise continuous function)** の集まりからなる $PC(a,b)$ について考えます．

幾何ベクトルについて次の 3 つのことはよく知っていると思います．(1) 和，(2) スカラー倍，(3) 内積 (スカラー積)．これまでに私たちは和およびスカラー倍の一般化を行いました．そこでここでは内積の一般化に挑戦します．

定義 6.1 2 つのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ に対して，実数 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ が定まり，次の性質をもつとき，$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ または $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ を $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ の**内積 (inner product)** という．
あるベクトル空間のすべてのベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とすべての実数 α, β に対して，
1. $(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_3) = \alpha(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3)$　(線形性)
2. $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$ (対称性)
3. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ と $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ は同値．(正定値性)
が成り立つ．

定義 6.2 $f(x), g(x)$ を $PC[a,b]$ の元とすると，内積 (f,g) は次の式で与えられる．

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

(注) これは内積の性質 1, 2, 3 を満たしています．

例題 6.1 $f(x) = x, g(x) = x^2$ が $PC[0,2]$ に属しているとき，内積 (f,g) を計算せよ．

解

$$(f,g) = \int_0^2 (x)(x^2)dx = 4. \blacksquare$$

ベクトル空間上に内積が定義されると，ノルム (ベクトルの大きさ) が定義されます．

定義 6.3 ベクトル $\mathbf{v}$ の**ノルム (norm)** は $\|\mathbf{v}\|$ で表わされ，次の式で与えられる．

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}.$$

幾何ベクトル空間では，$||\mathbf{A}|| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = |\mathbf{A}|$ となるので $\mathbf{A}$ の長さと同じです．三次元ベクトル空間では

$$||(a_1, a_2, a_3)|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

となるので，原点から点 (a_1, a_2, a_3) までの距離と考えられます．**関数空間 (function space)** $PC[a, b]$ では，

$$||f|| = \{\int_a^b [f(x)]^2 dx\}^{1/2}.$$

ベクトル空間に内積が定義されると，ノルムだけでなく垂直という概念の一般化として直交を定義できます．

定義 6.4 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ のとき，ベクトル $\mathbf{v}_1$ とベクトル $\mathbf{v}_2$ は**直交 (orthogonal)** しているという．また異なるベクトルがみな直交しているベクトルの集合を**直交系 (orthogonal system)** という．

例題 6.2 $\sin x$ と $\cos x$ は $[-\pi, \pi]$ で直交するが $[0, \pi/4]$ では直交しないことを示せ．

解 $[-\pi, \pi]$ で

$$(\sin x, \cos x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0.$$

$[0, \pi]$ で

$$(\sin x, \cos x) = \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

関数空間での直交は直角に交わるということではありません．注意して下さい．

$\mathbf{0}$ でない幾何ベクトル $\mathbf{A}$ をその大きさで割り単位ベクトル $\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ を求めることがよくあります．もっと一般的な場合にも，ベクトル $\mathbf{v}$ をそのノルムで割り，単位ベクトル $\mathbf{v}/||\mathbf{v}||$ を作ります．このようにして大きさが 1 のベクトルを作ることを，**正規化 (normalize)** するといいます．また直交系のすべてのベクトルを正規化してできた集合を**正規直交系 (orthonormal system)** といいます．正規直交系の例として三次元ベクトル空間での $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ があげられます．

例題 6.3 関数列 $\{\cos mx\}_{m=0}^{\infty}$ は $[0, \pi]$ で直交系をなすことを示し，対応する正規直交系を求めよ．

解 $m \neq n$ のとき，

$$\begin{aligned}(\cos mx, \cos nx) &= \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx \\ &= [\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}] \,|_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

$m=0$ のとき，$\cos 0x=1$ で

$$||1||=[\int_0^{\pi}(1)^2\ dx]^{1/2}=\sqrt{\pi}.$$

$m\neq 0$ のとき，

$$||\cos mx||=[\int_0^{\pi}\cos^2 mx\ dx]^{1/2}=\sqrt{\pi/2}.$$

よって求める正規直交系は

$$\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cos x,\cdots,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\cdots\}.\ \blacksquare$$

ノルムはベクトル空間上の任意のベクトル $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ に対して，三角不等式

$$||\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2||\leq||\mathbf{v}_1||+||\mathbf{v}_2||$$

を満たします．そしてこれよりベクトル間の**距離 (distance)** は次の式を満たします．

$$||\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2||\leq||\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3||+||\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2||.$$

これにより，ノルムは私たちが普段使っている距離とほぼ同じ働きをすることがわかります．

例題 6.4 $PC[0,2]$ において，x と x^2 の距離を求めよ．

解

$$||x-x^2||=[\int_0^2(x-x^2)^2\ dx]^{1/2}=\frac{4}{\sqrt{15}}.\ \blacksquare$$

6.1.1 演習問題

1. 次の集合のうち直交系はどれか．また直交系は対応する正規直交系を求めよ．

$(a)\{(1,3),(6,-2)\}$　　$(b)\{(1,2,2),(-2,2,-1),(2,1,-2)\}$

$(c)\{\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k},2\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k},3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}\}$

2. $f(x),g(x)$ を $PC[a,b]$ の関数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$|(f,g)|\leq||f||||g||$　この結果は Schwarz の不等式とよばれる．

3. $PC[0,2]$ において，次の関数のノルムを求めよ．

(a) $f(x)=x$　$(b)f(x)=\sin\pi x$　$(c)f(x)=\cos\pi x$

4. 次にあげる 3 個の多項式は Legendre の多項式とよばれるものです．

$P_0(x)=1,\ \ P_1(x)=x,\ \ P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$.

これらは $PC[-1,1]$ で直交系をなすことを示せ．

6.2 フーリエ級数

前節で $PC[a,b]$ は内積

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

とノルム

$$||f||=(\int_a^b[f(x)]^2dx)^{1/2}$$

をもつ計量ベクトル空間であることを学びました.

ここでは周期 $2L$ をもつ周期関数

$$f(x) \equiv f(x+2L)$$

を $PC[-L,L]$ 上で考えます.

前節で学んだように次の関数列は $[-L,L]$ 上で直交系をなします.

1. $\{\cos\frac{n\pi x}{L}\}_{n=0}^{\infty}$
2. $\{\sin\frac{n\pi x}{L}\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\{\cos\frac{n\pi x}{L}\}_{m=0}^{\infty} \cup \{\sin\frac{n\pi x}{L}\}_{n=0}^{\infty}$
4. 3 で与えられた集合の部分集合

ここで幾何ベクトル $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ のときのようにこの直交系を用いてベクトル空間 $PC[-L,L]$ 内のベクトルを一次結合で表わすことができないでしょうか．つまり $f(x) \in PC[-L,L]$ のとき

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$$

と表わすことができないでしょうか．もし

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$$

と表わせたとすると,

$$(\cos\frac{n\pi x}{L}, f(x)) = (\cos\frac{n\pi x}{L}, a_n\cos\frac{n\pi x}{L}) = a_n\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L}dx = a_nL,$$

$$(\cos 0, f(x)) = (1, a_0) = a_0\int_{-L}^{L}dx = 2a_0L,$$

$$(\sin\frac{n\pi x}{L}, f(x)) = (\sin\frac{n\pi x}{L}, b_n\sin\frac{n\pi x}{L}) = b_n\int_{-L}^{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx = b_nL$$

より

$$a_0 = (\cos 0, f(x)) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,$$

$$a_n = (\cos\frac{n\pi x}{L}, f(x)) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

$$b_n = (\sin\frac{n\pi x}{L}, f(x)) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

となり，係数 a_0, a_n, b_n が決定されます.

しかし，三角級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$ は収束すると限らないし，収束したとしても，もとの関数 $f(x)$ に一致するとは限りません (4 章参照)．そこで，関数 $f(x)$ とこのようにして定められた三角級数との関係を，等号 $=$ の変わりに $\sim$ を用いて表わすことにします．以上をまとめると

定義 6.5 (フーリエ級数) $f(x) \equiv f(x+2L), f(x) \in PC[-L, L]$ のとき,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$$

であり，右辺の係数は次の式で与えられる．

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \ (n = 1, 2, \ldots).$$

このとき $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$ を $f(x)$ の**フーリエ (三角) 級数**とよび, $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L})$ を $f(x)$ の第 n 部分和とよびます.

例題 6.5 $f(x) = x \in PC[-\pi, \pi]$ のとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．また第 n 部分和のグラフを調べよ.

解 $x\cos nx$ は奇関数であることに注意すると

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0$$

となる．また

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx \quad \left(\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}[-\frac{x\cos nx}{n}\ |_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx] \\ &= \frac{2}{\pi}[-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\ |_0^{\pi}] \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad \left(\cos n\pi = \left\{\begin{array}{ll} 1, & n \text{ 偶数} \\ 0, & n \text{ 奇数} \end{array} = (-1)^n\right.\right) \end{aligned}$$

となるので

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

第 n 部分和のグラフは図 6.1 のようになる.

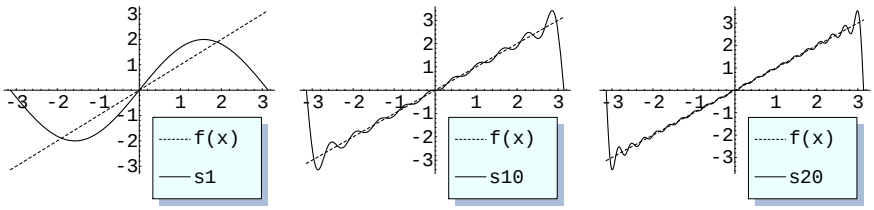

図 6.1　$f(x) = x$ のフーリエ級数

例題 6.6 次の式で与えられる関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．また第 n 部分和のグラフを調べよ.

$$\left\{\begin{array}{ll} 2, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le \pi \end{array}\right.$$

解

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx = 3,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nxdx = 0,\ n \geq 1,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nxdx\\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{-2\cos nx}{n}\ |_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nx}{n}\ |_{0}^{\pi}]\\
&= \frac{1}{n\pi}[-2 + 2\cos n\pi - \cos n\pi + 1]\\
&= \frac{\cos n\pi - 1}{n\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}
\end{aligned}
$$

より

$$f(x) \sim \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots).$$

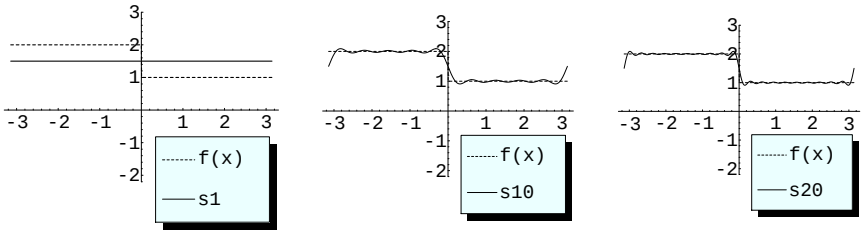

図 6.2　フーリエ級数の部分和

部分和のグラフをみると，関数 $f(x)$ が不連続の点の近くで，部分和のグラフが $f(x)$ のグラフよりかなり大きな値をとっていることがわかります．これを **overshoot** といいます．また部分和のグラフは不連続点の近くで垂直な線分に近づいていることがわかります．これを **Gibbs 現象**といいます．

次にフーリエ級数が $f(x)$ に収束するための条件を紹介します．

定理 6.1 (Dirichlet 条件) $f(x) \in PC[-L, L], f'(x) \in PC[-L, L]$ ならば

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}(a_n\frac{\cos n\pi x}{L} + b_n\frac{\sin n\pi x}{L}) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 連続点} \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x \text{ 不連続点.} \end{cases}$$

$f(x), f'(x) \in PC[-L.L]$ であるような関数を**区分的に滑らか (piecewise smooth)** な関数といいます．

例題 6.7 例題 6.6 のフーリエ級数を用いて $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}$ を示せ．

解 例題 6.6 より

$$f(x) \sim \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots).$$

また $f(x)$ は Dirichlet 条件を満たすので

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots).$$

よって

$$1 = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots).$$

これより

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots . \blacksquare$$

ベクトル $A = (a_1, a_2, a_3)$ のノルム $||A||$ が

$$||A||^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

を満たすように，三角関数を基底として $f(x) \in PC[-L, L]$ は次の等式を満たします.

$$||f||^2 = L[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)].$$

この等式を **Parseval の等式**といいます.

6.2.1 演習問題

次の関数のフーリエ級数を求めよ．またフーリエ級数のグラフを描け.

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$
2. $f(x) = |\sin x| \in PC[-\pi, \pi]$
3. $f(x) = x \in PC[-\pi, \pi]$
4. $f(x) = x^2 \in PC[-\pi, \pi]$ のフーリエ級数を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ を示せ.}$$

5. $f(x) = x \in PC[-\pi, \pi]$ のフーリエ級数を用いて

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \text{ を示せ.}$$

6.3 正弦級数，余弦級数, 複素形フーリエ級数

$f(x)$ が $[-L, L]$ で偶関数ならば，$f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ は偶関数，$f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ は奇関数となり，そのフーリエ係数は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \ (n = 0, 1, 2\ldots), \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \ (n = 1, 2\ldots) \end{aligned}$$

で与えられます．また，$f(x)$ が奇関数ならば，$f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ は奇関数，$f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ は偶関数となり，そのフーリエ係数は

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \ (n = 0, 1, 2 \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \ (n = 1, 2 \ldots) \end{aligned}$$

で与えられます．

関数 $f(x)$ が $[0, L]$ で定義されているとき，

$$f_e(-x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-L, 0) \\ f(x), & x \in [0, L] \end{cases}, \quad f_e(x) \equiv f_e(x + 2L)$$

によって，周期 $2L$ の偶関数に拡張された関数 $f_e(x)$ を**偶関数拡張 (even extension)** といいます．また，

$$f_o(-x) = \begin{cases} -f(-x), & x \in [-L, 0) \\ f(x), & x \in [0, L] \end{cases}, \quad f_o(x) \equiv f_o(x + 2L)$$

によって，周期 $2L$ の奇関数に拡張された関数 $f_o(x)$ を**奇関数拡張 (odd extension)** といいます．

例題 6.8 $f(x) = x + 1$ が $[0, 1]$ で定義されているとき，$f_e(x), f_o(x)$ を求めよ．

解

$$f_e(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \in [-1, 0) \\ x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}, \ f_o(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [-1, 0) \\ x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}.$$

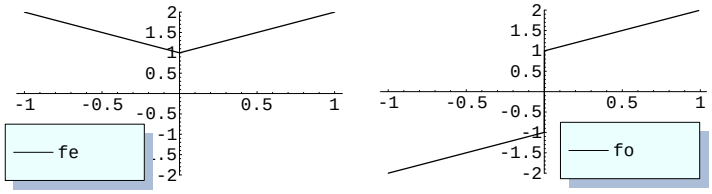

図 6.3　偶関数拡張と奇関数拡張

$f(x)$ の偶関数拡張 $f_e(x)$ は区間 $[-L, L]$ で区分的に連続．したがって，$f_e(x)$ のフーリエ級数は次のように表わせます．

$$\begin{aligned} f_e(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \\ a_0 &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f_e(x)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \ n \neq 0. \end{aligned}$$

$f_e(x)$ のフーリエ級数は $[0, L]$ での $f(x)$ のフーリエ級数，$[-L, 0]$ での $f(x)$ の偶関数拡張のフーリエ級数を表わします．これより $f_e(x)$ のフーリエ級数を $f(x)$ の**フーリエ余弦級数 (Fourier cosine transform)** といいます．

例題 6.9 次の関数のフーリエ余弦級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases} .$$

解

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} xdx = \frac{2}{\pi}[\frac{x^2}{2}\ |_0^{\pi/2}] = \frac{2}{\pi}[\frac{\pi^2}{8}] = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos nxdx \quad \begin{pmatrix} u = x & dv = \cos nxdx \\ du = dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\pi}[\frac{x\sin nx}{n}|_0^{\pi/2} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin nxdx] \\ &= \frac{1}{\pi n^2}(2\cos\frac{n\pi}{2} + n\pi\sin\frac{n\pi}{2} - 2) \end{aligned}$$

より

$$f(x) \sim \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi}[(\pi-2)\cos x - \cos 2x - (\frac{\pi}{3} + \frac{2}{9})\cos 3x + \cdots]. \blacksquare$$

偶関数拡張と同様に奇関数拡張 $f_o(x)$ のフーリエ級数は関数列 $\{\sin\frac{n\pi x}{L}\}$ を用いて表わすことができます. つまり

$$\begin{aligned} f_o(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f_o(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \end{aligned}$$

このようにして得たフーリエ級数を $f(x)$ の**フーリエ正弦級数 (Fourier sine transform)** といいます.

例題 6.10 次の関数のフーリエ正弦級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

解

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin nxdx = \frac{2}{\pi}[-\frac{x\cos nx}{n}\ |_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos nxdx] \\ &= \frac{2}{\pi}[-\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\ |_0^{\pi/2}] \\ &= \frac{1}{\pi n^2}(2\sin\frac{n\pi}{2} - n\pi\cos\frac{n\pi}{2}). \end{aligned}$$

よって,

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}(2\sin x + \frac{\pi}{2}\sin 2x - \frac{2}{9}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots). \blacksquare$$

フーリエ級数の中に現われる $\cos\frac{n\pi x}{L}$ と $\sin\frac{n\pi x}{L}$ を Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて表わすと

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(\frac{e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}}{2}) + b_n(\frac{e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}}{2i})] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{a_n - ib_n}{2})e^{in\pi x/L} + (\frac{a_n + ib_n}{2})e^{-in\pi x/L}] \end{aligned}$$

となります．ここで $c_0 = a_0/2, c_n = (a_n - ib_n)/2\ (n > 0), c_n = (a_{-n} + ib_{-n})/2\ (n < 0)$ とおくと $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx$$

で表わされます．このフーリエ級数を**複素形フーリエ級数 (complex form of Fourier transform)** といいます．

例題 6.11 次の関数を複素形フーリエ級数を用いて表わせ．

$$\begin{cases} 2, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

解

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{0} 2dx + \int_{0}^{\pi} dx] = \frac{3}{2}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{0} 2e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx] \\ &= -\frac{1}{i\pi n}e^{-inx}\ |_{-\pi}^{0} - \frac{1}{i2n\pi n}e^{-inx}\ |_{0}^{\pi} = \frac{i}{n\pi}[1 - e^{in\pi}] + \frac{1}{2n\pi}[e^{-in\pi} - 1] \\ &= \frac{i}{n\pi}[1 - (-1)^n] + \frac{i}{2n\pi}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n \text{ 偶数} \\ \frac{i}{n\pi}, & n \text{ 奇数}. \end{cases} \end{aligned}$$

したがって，

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \frac{i}{\pi}\sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}e^{i(2k+1)x}. \blacksquare$$

6.3.1 演習問題

1. 次の関数の $f_e(x), f_o(x)$ を求め，そのグラフを描け．

$(a)\ f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 < x < 1 \\ 1-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$　　$(b) f(x) = e^x\ x \in (0, \pi)$

2. 次の関数のフーリエ余弦，正弦級数を求めよ．

$(a)\ f(x) = x^2\ x \in [0, 1]$　　$(b)\ f(x) = \sin\frac{x}{2}\ x \in [0, \pi]$

$(c)\ f(x) = \cos x\ x \in [0, \pi]$

3. 次の関数の複素形フーリエ級数を求めよ．

$(a)\ f(x) = |x|\ x \in [-\pi, \pi]$　　$(b)\ f(x) = x^2\ x \in [-\pi, \pi]$

6.4 Sturm-Liouville 問題

驚くかも知れませんが，三角関数以外の直交関数列も，応用数学にはよく出てきます．ここでは境界値問題からどのようにして直交関数列が出てくるか見てみます．

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + (q(x) + \lambda r(x))y = 0,$$

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0,$$

$$c_3y(b) + c_4y'(b) = 0$$

の形の境界値問題を **Sturm-Liouville 問題**といいます．ここで λ は実数をとり，自明でない解が存在するとき λ を**固有値 (eigenvalue)** といい，自明でない解を**固有関数 (eigenfunction)** といいます．

例題 6.12 $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(L) = 0$ の固有値は $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ で固有関数は $y_n = \sin\frac{n\pi x}{L}$ で与えられることを示せ．

解 (1) $\lambda = 0$ のとき， $y'' = 0$ より

$$y = c_1x + c_2.$$

ここで境界条件 $y(0) = y(L) = 0$ を用いると $c_1 = c_2 = 0$ となり，$y \equiv 0$.
(2) $\lambda < 0$ のとき，$\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$ とおくと

$$y'' - \alpha^2y = 0.$$

特性方程式を求めると $m^2 - \alpha^2 = 0$ より，$m = \pm\alpha$．よって

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x}.$$

ここで境界条件 $y(0) = y(L) = 0$ を用いると $c_1 = c_2 = 0$ となり，$y \equiv 0$.
(3) $\lambda > 0$ のとき，$\lambda = \beta^2$ $(\beta > 0)$ とおくと

$$y'' + \beta^2y = 0.$$

特性方程式を求めると $m^2 + \beta^2 = 0$ より，$m = \pm\beta i$．よって

$$y = c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x.$$

ここで境界条件 $y(0) = 0$ より $c_1 = 0$．つぎに $y(L) = 0$ より

$$0 = c_2\sin\beta L.$$

ここで $c_2 = 0$ ならば自明でない解が存在しない．そこで自明でない解が存在するためには，$\beta = n\pi/L$．よって固有値は $\lambda_n = \beta^2 = n^2\pi^2/L^2$，固有関数は $y_n = \sin(n\pi x/L)$ となる． ■

例題 6.13

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)y'] + \lambda y = 0.$$

は Legendre の微分方程式とよばれています．$\lambda = n(n + 1)$，ただし n が負でない整数のとき，この微分方程式は多項式の解をもちます．この解を P_n で表わし，位数 n の Legendre の多項式といいます．最初のいくつかの Legendre の多項式を表わすと次のようになります．

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3 = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x), \ldots,$$

ここで Legendre の多項式全体の集合は区間 $[-1, 1]$ で直交系をなすことを示せ．

解 Legendre の多項式 P_m, P_n は固有値 $\lambda = \lambda_m, \lambda_n$ に対する固有関数である．よって

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'] + \lambda_m P_m = 0,$$

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'] + \lambda_m P_n = 0.$$

ここで最初の式に P_n を次の式に $-P_m$ を掛けて加えると，

$$(\lambda_m - \lambda_n)P_m P_n = \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n' \int^x P_m dt] - \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m' \int^x P_n dt].$$

次に，両辺を区間 $[-1, 1]$ で積分すると

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)\int_{-1}^{1} P_m P_n dx &= (1-x^2)(P_n' \int^x P_m dt - P_m' \int^x P_n dt)\ |_{-1}^{1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって $\lambda_m \neq \lambda_n$ のとき

$$\int_{-1}^{1} P_m P_n dx = 0. \ \blacksquare$$

6.4.1　演習問題

1. 次の Sturn-Liouville 問題を解け.

(a) $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0, y'(L) = 0$

(b) $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0, y'(L) = 0$

(c) $(xy')' + (\lambda/x)y = 0,\ y(1) = 0, y(e) = 0$

2. 次の微分方程式は Chebyshev の微分方程式とよばれるものです.

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0 \ \ -1 < x < 1$$

ここで p が負でない整数のとき，この方程式は多項式の解をもちます．この解を $x = 1$ のとき 1 になるようにし $T_n(x)$ で表わします．これを位数 n の Chebyshev の多項式といいます．最初のいくつかの Chebyshev の多項式を表わすと次のようになります.

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = 2x^2 - 1, T_3 = 4x^3 - 3x, \ldots$$

ここで Chebyshev の多項式全体の集合は区間 $[-1, 1]$ で直交系をなすことを示せ.

第 7 章

偏微分方程式

7.1 偏微分方程式の解

この章では偏導関数を含んだ方程式の初等的な解法について学びます．偏微分方程式は独立変数 $x, y, z, \ldots$，これらの変数の関数 u，偏導関数 $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xz}, \ldots$ を含んだ方程式のことです．この方程式の次数は偏導関数の最高次数で与えられます．

最も一般的な 2 変数の 2 階線形偏微分方程式は次の形で与えられます．

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0.$$

ただし，a, b, c, d, e, f, g は x, y の既知の関数とします．また独立変数 x, y が定義されている平面上の領域で上の式を満たす u をこの偏微分方程式の解といいます．

線形偏微分方程式は比較的簡単な理論で説明でき，また多くの実用問題での数学的モデルはこの形で与えられるので，しっかり学んで下さい．

次の演算記号は偏微分方程式を扱う上で欠かせないものです．

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad \text{Laplace または potential operator}$$

$$\Delta_{n-1} - k\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{Heat または diffusion operator}$$

$$\Delta_{n-1} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{D'Alembert または wave operator}$$

これらの式で，t は時間変数，k は物質の熱伝導率/熱拡散率に反比例する定数，c は波動の速度を表わします．

定数係数の場合，2 次曲線

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

に対比させて，$b^2 - 4ac$ が負，零，正にしたがって，**楕円型 (elliptic)**，**放物線型 (parabolic)**, **双曲線型 (hyperbolic)** とよばれます．また適当な変数変換により b^2-4ac が負，零，正にしたがって，potential operator，diffusion operator，wave operator を用いることができます．

例題 7.1 $3u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}+xu_y = 0$ は楕円型であることを示せ．また, $u_{xx}+yu_{yy} = 0$ は何型か調べよ．

解

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4(3)(5) = -56 < 0$$

より，楕円型.

一方，$u_{xx} + yu_{yy} = 0$ は

$$b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)y = -4y$$

したがって，$y > 0$ のとき楕円型，$y = 0$ のとき放物線型，$y < 0$ のとき双曲線型となる. ■

例題 7.2 $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = e^x \cos y$ は二次元 Laplace 方程式

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \Delta_2 v = 0$$

の解であることを示せ．二次元ラプラス方程式を満たす 2 回微分可能の関数を**調和関数 (harmonic function)** という.

解

$$u_x = 2x, u_{xx} = 2, u_y = -2y, u_{yy} = -2,$$

$$v_x = e^x \cos y, v_{xx} = e^x \cos y, v_y = -e^x \sin y, v_{yy} = -e^x \cos y.$$

したがって，$u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0$. ■

偏微分方程式の解全体の集合は**解集合 (solution set)** といいます．ただ解集合は非常に大きな集合であったり，やっかいな集合であったりするので，私たちはすべての解が導けるような基本的な解の集合を考えます．このような解の集合を**完全解 (complete solution)** または**一般解 (general solution)** といいます．また特殊解は一般解から導けます.

簡単な偏微分方程式は次の例が示すように直接積分することにより解くことができます.

例題 7.3 $u_x = y \sin x$ を解け.

解

$$u(x, y) = \int u_x dx = \int y \sin x dx = -y \cos x + f(y),$$

ただし f は y の任意の関数. ■

例題 7.4 $u_{xx}(x, y, z) = x$ を解け.

解

$$u_x(x, y, z) = \int u_{xx} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + f(y, z),$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = \int u_x dx &= \int (\frac{x^2}{2} + f(y, z)) dx \\ &= \frac{x^3}{6} + xf(y, z) + g(y, z). \end{aligned}$$ ■

残念ながら一般に，偏微分方程式は上で行なったように直接積分して解けることはほとんどありません．そこで次の節では他の方法を考えてみます．その前に，もう少し偏微分方程式の解について考えます．

同次常微分方程式で解の一次結合が，また解であったように，同次偏微分方程式でも $u_1(x,y), u_2(x,y), \ldots, u_n(x,y)$ が，同次偏微分方程式の解ならば，その一次結合 $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x,y)$ もまた解になります．とくに，偏微分方程式では $\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x,y)$ が収束し，この級数の項別微分が可能であれば，$\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x,y)$ も同次偏微分方程式の解になります．これを**重ね合わせの原理 (principle of superposition)** といいよく用います．

7.1.1 演習問題

1. 次の関数は Laplace 方程式 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ を満たすことを示せ.

(a) $u(x,y) = x^2 - y^2$　　(b) $u(x,y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

(c) $u(x,y) = ax + by + c$　(d) $u(x,y) = \cos x \cosh y$

2. 次の関数は拡散方程式 $u_{xx} - u_t = 0, t > 0$ を満たすことを示せ.

(a) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$　　(b) $u(x,t) = \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau$

(c) $u(x,t) = ax + b + c(x^2 + 2t)$　(d) $u(x,t) = e^{-t} \cos x$

3. 次の関数が解となる偏微分方程式を求めよ.

(a) $u(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$　(b) $u(x,y) = \cos(x^2 + y^2) + x^2$

4. $f(x^2 + y^2)$ は $yu_x - xu_y = 0$ の解であることを示せ.

5. $u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$ は $u_{xx} - u_{yy} = 0$ の解であることを示せ.

6. 二次元 Laplace 方程式を極座標で表わせ.

7.2 偏微分方程式の 3 つの解法

同次の定数係数の偏微分方程式の解法には，次の 3 つの解法がよく用いられます．まず

$$u_x + bu_y + cu = Q(x,y)$$

の形の偏微分方程式は，変数変換 $\xi = x, \eta = bx - y$ を用いることにより u_y の項を落とすことができるので，その解は常微分方程式

$$u' + cu = Q$$

を解くことにより求めることができます．実際,

$$\xi = x, \eta = bx - y$$

とおくと,

$$u(x,y) = U(\xi,\eta) = U(x, bx - y).$$

これより,

$$u_x = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\xi + bU_\eta,$$
$$u_y = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -bU_\eta.$$

よって

$$u_x + bu_y + cu = U_\xi + cU = Q(\xi, b\xi - \eta).$$

例題 7.5 $u_x + 2u_y + u = y$ を解け.

解 $\xi = x, \eta = 2x - y$ とおくと

$$u_x + 2u_y + u = U_\xi + U = 2\xi - \eta$$

となる．これは ξ について 1 階線形なので積分因子 $\mu = e^{\int d\xi} = e^\xi$ より,

$$\frac{d(e^\xi U)}{d\xi} = 2\xi e^\xi - \eta e^\xi$$

を得る．ここで両辺を ξ で積分すると,

$$e^\xi U = \int 2\xi e^\xi - \eta e^\xi d\xi = 2(\xi e^\xi - e^\xi) - \eta e^\xi + \phi(\eta)$$
$$= e^\xi(2\xi - 2 - \eta) + \phi(\eta).$$

よって

$$u(x,y) = U(\xi,\eta) = e^{-\xi}e^\xi(2\xi - 2 - \eta) + e^{-\xi}\phi(\eta)$$
$$= 2x - 2 - (2x - y) + e^{-x}\phi(2x - y) = y - 2 + e^{-x}\phi(2x - y). \blacksquare$$

次の解法は**変数分離法 (method of separation of variables)** とよばれるもので，x の関数 $X(x)$ と y の関数 $Y(y)$ の積の形の解 $u(x,y)$ を捜す方法です.

例題 7.6 Laplace 方程式 $\Delta_2 u = 0$ を解け.

解 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ を $u(x,y) = X(x)Y(y)$ を用いて解く.
まず $u_x = X'(x)Y(y), u_{xx} = X''(x)Y(y), u_y = X(x)Y'(y), u_{yy} = X(x)Y''(y)$ より

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

となる．これを変数分離すると

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

ここで左辺は y と独立で右辺は x と独立．それが等しいということはともに同じ定数ということがいえる．この定数を λ とおくと

$$\frac{X''}{X} = \lambda, \quad \frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

$\lambda > 0$ のとき $\lambda = k^2$ $(k > 0)$ とおくと

$$X = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx},\ Y = C_1 \cos ky + C_2 \sin ky.$$

$\lambda < 0$ のとき $\lambda = -k^2$ $(k > 0)$ とおくと

$$X = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx,\ Y = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}.$$

$\lambda = 0$ のとき

$$X = c_1 x + c_2,\ Y = C_1 y + C_2.$$

よって Laplace 方程式が解をもつなら解は次のいずれかの形をとる.

$$(Ae^{kx} + Be^{-kx})(C\cos ky + D\sin ky) \quad k > 0,$$

$$(A\cos kx + B\sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky}) \quad k > 0,$$
$$(Ax + B)(Cy + D). \blacksquare$$

$u(x,y) = X(x)Y(y)$ を代入することにより $X(x)$ と $Y(y)$ を分離できる微分方程式を**変数分離形 (separation of variables)** といいます.

例題 7.7 次の境界値問題を解け.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, u(0,y) = u(2,y) = 0, u(x,0) = \sin\pi x - 3\sin 5\pi x, u_y(x,0) = 0.$$

解 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ よりさきほどの例題の結果が使えます. 初期条件 $u(x,0)$ の形より 3 つの解の中から

$$u(x,y) = (A\cos kx + B\sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$$

を選びます. ここで $u(0,y) = 0$ より

$$A(Ce^{ky} + De^{-ky}) = 0.$$

よって $A = 0$ または $C = D = 0$. しかし $C = D = 0$ なら $u(x,y) = 0$ となるので $A = 0$ とおくと

$$u(x,y) = B\sin kx(Ce^{ky} + De^{-ky}).$$

ここで境界条件 $u(2,y) = 0$ を用いると

$$B\sin 2k(Ce^{ky} + De^{-ky}) = 0.$$

$B = 0$ または $C = D = 0$ なら $u(x,y) = 0$ となるので

$$\sin 2k = 0 \text{ よって } k = \frac{n\pi}{2} \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

これより

$$\begin{aligned} u(x,y) &= B\sin\frac{n\pi x}{2}(Ce^{\frac{n\pi y}{2}} + De^{-\frac{n\pi y}{2}}) \\ &= \sin\frac{n\pi x}{2}(ce^{\frac{n\pi y}{2}} + de^{-\frac{n\pi y}{2}}). \end{aligned}$$

初期条件 $u_y(x,0) = 0$ を用いるために両辺を y で偏微分すると

$$u_y(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{2}(\frac{cn\pi}{2}e^{\frac{n\pi y}{2}} - \frac{dn\pi}{2}e^{-\frac{n\pi y}{2}}).$$

初期条件 $u_y(x,0) = 0$ より

$$u_y(x,0) = \sin\frac{n\pi x}{2}(\frac{cn\pi}{2} - \frac{dn\pi}{2}) = 0.$$

よって $c = d = c_n$. これよりここまでの条件を満たす解の列

$$u_n(x,y) = c_n\sin\frac{n\pi x}{2}(e^{\frac{n\pi y}{2}} + e^{-\frac{n\pi y}{2}})$$

を得る. 最後に初期条件 $u(x,0) = \sin\pi x - 3\sin 5\pi x$ を満たすために, $c_2 = 1/2, c_{10} = -3/2$ その他の $c_n = 0$ とおき, 重ね合わせの原理を用いると

$$u(x,y) = \sin\pi x(\frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{2}) - 3\sin 5\pi x(\frac{e^{5\pi y} + e^{-5\pi y}}{2}). \blacksquare$$

$\cosh ky = (e^{ky} + e^{-ky})/2, \sinh ky = (e^{ky} - e^{-ky})/2$ を用いると $Ce^{ky} + De^{-ky}$ の代わりに $C\cosh ky + D\sinh ky$ が使えます.

次の例題が示すように, 変数分離法は変数係数の偏微分方程式にも使えます.

例題 7.8 $x^2u_{xx}+xu_x-u_y=0$ を解け.

解 $u(x,y)=X(x)Y(y)$ を与えられた方程式に代入すると

$$x^2X''Y+xX'Y-xY'=0.$$

変数分離すると

$$\frac{x^2X''+xX'}{X}=\frac{Y'}{Y}.$$

左辺と右辺はある定数に等しいはずなので，この定数を λ とおくと

$$x^2X''+xX'-\lambda X=0,\ Y'-\lambda Y=0.$$

最初の方程式は Cauchy-Euler の方程式で $x=e^t$ とおくことにより解が得られる.
$\lambda>0$ のとき $\lambda=k^2$ とおくと $X=c_1x^k+c_2x^{-k}$,
$\lambda<0$ のとき $\lambda=-k^2$ とおくと $X=c_3\cos\log x+c_4\sin\log x$,
$\lambda=0$ のときは $X=c_5\log x+c_6$ となる.
2 つめの方程式は
$\lambda=k^2$ とおくと $Y=C_1e^{k^2y}$,
$\lambda=-k^2$ とおくと $Y=C_2e^{-k^2y}$,
$\lambda=0$ のときは $Y=C_3$ となる．したがって,

$$\{e^{k^2y}x^{\pm k},e^{-k^2y}\cos(k\log x),e^{-k^2y}\sin(k\log x),\log x,1\}$$

の一次結合が解となる． ■

偏微分方程式のすべてが変数分離形になるわけではありません．たとえば

$$u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}=0$$

はそのひとつです．そこでそんなとき用いられるのが **D'Alembert 法**とよばれる方法で，2 階定数係数偏微分方程式

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}=G(x,y)$$

において，変数変換 $v=x+my,w=x+ny$ とおくことにより，$u(x,y)$ を $U(v,w)$ と $v(x,y),w(x,y)$ の合成関数とし，U_{vv} と U_{ww} の係数が 0 になるように m と n を選ぶことにより $U_{vw}=G(v,w)$ を求めるという方法です．次の例題で詳しく示してみましょう.

例題 7.9 $u_{xx}-u_{xy}-2u_{yy}=e^{x+y}$ を解け.

解 $v=x+my,w=x+ny$ とおくと

$$u(x,y)=U(v(x,y),w(x,y))=U(x+my,x+ny).$$

これより

$$\begin{aligned}u_x&=\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=U_v+U_w,\\ u_{xx}&=U_{vv}v_x+U_{vw}w_x+U_{wv}v_x+U_{ww}w_x\\ &=U_{vv}+U_{vw}+U_{wv}+U_{ww}=U_{vv}+2U_{vw}+U_{ww}.\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = mU_v + nU_w, \\ u_{xy} &= mU_{vv} + (m+n)U_{vw} + nU_{ww}, \\ u_{yy} &= m^2U_{vv} + 2mnU_{vw} + n^2U_{ww}. \end{aligned}$$

これを元の微分方程式に代入すると

$$U_{vv}(1-m-2m^2) + U_{vw}(2-m-n-4mn) + U_{ww}(1-n-2n^2) = e^{x+y}.$$

ここで m, n を二次方程式 $1-t-2t^2$ の異なる実数解とすると $m=-1, n=1/2$. これより $\frac{9}{2}U_{vw} = e^{x+y} = e^{(4w-v)/3}$ を得る. これを解くと

$$U_v(v,w) = \frac{2}{9}\int e^{(4w-v)/3}dw = \frac{1}{6}e^{(4w-v)/3} + c(v).$$

v で積分すると

$$U(v,w) = \int (\frac{1}{6}e^{(4w-v)/3} + c(v))dv = -\frac{1}{2}e^{(4w-v)/3} + g(v) + h(w),\ g,h \in C^2.$$

よって

$$\begin{aligned} u(x,y) = U(v,w) &= -\frac{1}{2}e^{(4w-v)/3} + g(v) + h(w) \\ &= -\frac{1}{2}e^{x+y} + g(x-y) + h(x+\frac{1}{2}y). \blacksquare \end{aligned}$$

例題 7.10 *D'lembert* 法を用いて波動方程式 $u_{xx} = (1/c^2)u_{tt}(0 < x < L, t > 0)$ の解で初期条件

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = 0$$

と境界条件

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

を満たすものを求めよ.

解 $v = x + my, w = x + ny$ とおくと m, n は二次方程式 $1 - t^2/c^2 = 0$ の解になるので $m = c, n = -c$. よって

$$u(x,y) = g(x+ct) + h(x-ct).$$

ここで初期条件を用いると

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g(x) + h(x) = f(x), \\ u_t(x,0) &= cg'(x) - ch'(x) = 0. \end{aligned}$$

これより $g'(x) = h'(x)$. よって $g(x) = h(x) + k$, ただし k はある定数. この $g(x)$ を上の 2 つの式の最初のほうに代入すると

$$h(x) + k + h(x) = f(x)$$

となる. これより

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)-k}{2}, \\ g(x) &= \frac{f(x)+k}{2}. \end{aligned}$$

したがって

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}. \blacksquare$$

7.2.1 演習問題

1. 変数変換を用いて次の偏微分方程式を解け.

(a) $u_x + 2u_y - u = 0$　　(b) $u_x + u_y = 0$

(c) $u_x + u_y = xu + yu$　(d) $u_x - u_y - u = 2x + y$

2. $u(x,y) = ce^{ax}e^{by}$ を用いて次の偏微分方程式を解け.

(a) $u_x + 2u_y - u = 0$　　$(b) u_{xx} - u_{yy} + u_y = 0$

(c) $u_{xy} + u_x + u_{yy} = 0$　(d) $u_x + u_y + u = 0$

3. D'Alember 法を用いて次の偏微分方程式を解け.

(a) $u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0$　(b) $u_{xy} + 4u_{yy} = e^{2x+y}$

(c) $u_{xy} - u_{yy} = 0$　　(d) $u_{xx} = 25u_{yy}$

7.3 3 つの境界値問題

7.3.1 Laplace 方程式

すでに学んだように，次の形の偏微分方程式をそれぞれ二次元，三次元の **Laplace 方程式**といいます.

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0,\ \Delta_3 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

これは非圧縮性流体の速度ポテンシャル，静電場のポテンシャル，熱伝導現象における定常温度分布などを表わす方程式です．C^2 級の関数で，Laplace 方程式をみたすものを**調和関数 (harmonic function)** といいます.

二次元の Laplace 方程式の解は次の形のいずれかを取ることを学びましたが，次の形の関数の有限個の一次結合で Laplace 方程式の境界値問題の解を表わすのが適当でないことがよくあります.

$$(A\cosh kx + B\sinh kx)(C\cos ky + D\sin ky),$$

$$(A\cos kx + B\sin kx)(C\cosh ky + D\sinh ky),$$

$$(Ax + B)(Cy + D).$$

そんなときは，無限級数を用いて解を表わし，フーリエ級数の知識をもとに問題をときます.

例題 7.11 2 次元 Laplace 方程式の境界値問題

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\ (0 < x < L, 0 < y < K),$$

$$u(x,0) = 0,\ u(x,K) = x\ (0 \le x \le L),$$

$$u_x(0,y) = 0,\ u_x(L,y) = 0\ (0 \le y \le K)$$

を解け.

解 変数分離法と境界条件 $u_x(0,y)=0, u(x,0)=0$ より Laplace 方程式の解は

$$C\cosh kx\cos ky,\ C\cos kx\sinh ky,\ Cy$$

のどれかである．3 番目の形は境界条件 $u_x(L,y)=0$ をすべての C でみたし，また 2 番目の形も $\sin kL=0$ のとき，つまり $k=n\pi/L$ $(n=1,2,\ldots)$ のとき境界条件 $u_x(L,y)=0$ をすべての C でみたす．よって重ね合わせの原理より，

$$u(x,y)=\frac{C_0}{2}y+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}$$

を境界値問題の解として考える．最後に境界条件 $u(x,K)=x$ より

$$u(x,K)=\underbrace{C_0K/2}_{a_0/2}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{C_n\sinh\frac{n\pi K}{L}}_{a_n}\cos\frac{n\pi x}{L}=x.$$

この条件が満たされるためには，この級数が x に収束するように a_n を選ばなければならない．ところが，これは本質的にフーリエ余弦級数である．よって

$$a_0=C_0K=\frac{2}{L}\int_0^L xdx=\frac{2}{L}\frac{x^2}{2}\,|_0^L=L,$$

$$\begin{aligned}a_n=C_n\sinh\frac{n\pi K}{L}&=\frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx\\&=\frac{2L}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\frac{4L}{n^2\pi^2}, & n\text{ 奇数}\\ 0, & n\text{ 偶数.}\end{cases}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\frac{Ly}{2K}\\&-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2}\frac{1}{(2m+1)^2}\frac{\cos(2m+1)\pi x/L\sinh(2m+1)\pi y/L}{\sinh(2m+1)\pi K/L}\end{aligned}$$

となる．■

7.3.2　演習問題

1. 次の境界値問題

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<L,\ 0<y<K\\&u(0,y)=0,\ u(L,y)=0,\ 0<y<K\\&u(x,0)=0,\ u(x,K)=f(x),\ 0<x<L\end{aligned}$$

の解は次の無限級数で与えられることを示せ．

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}\end{aligned}$$

ただし，$C_n \sinh \frac{n\pi K}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$.

2. Laplace 方程式を次の条件の元で解け.

(a)

$$u(0,y) = 0 = u(L,y),\ 0 < y < K$$
$$u_y(x,0) = 0,\ u(x,K) = f(x),\ 0 < x < L$$

(b)

$$u(0,y) = g(y),\ u(L,y) = 0,\ 0 < y < K$$
$$u(x,0) = 0 = u(x,K),\ 0 < x < L$$

3. Laplace 方程式の境界条件が

$$u_x(0,y) = 0 = u_x(L,y),\ 0 < y < K$$
$$u(x,0) = 0,\ u_y(x,K) = f(x)\ 0 < x < L$$

のとき

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)$$
$$= D_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L},$$

ただし,

$$D_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$
$$D_n \frac{nx}{L}\cosh\frac{n\pi K}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ n \geq 1$$

で与えられることを示せ.

7.3.3　波動方程式

次に水平に張られた弾性弦が微小振動するとき，位置 x，時刻 t において弦の垂直方向の変位 $u(x,t)$ がみたす偏微分方程式について考えてみましょう.

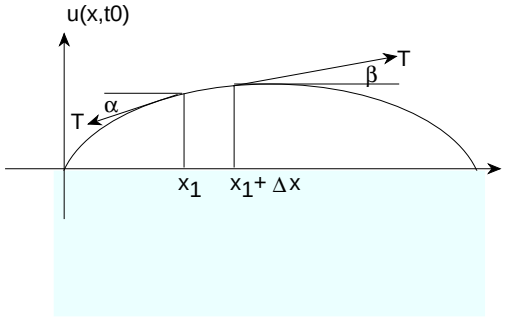

図 7.1　弾性弦の振動

まず 2 点間に張った弦を考えます．弦をはじいて振動させます．このとき振幅は小さいものとします．また弦の張力は他の力に比べて大きいものとします．振動している弦の方程式をみつけるため x_1 から $x_1 + \Delta x$ の間の弦の小さな部分について調べます.

水平方向には動きがないので，水平方向の力はつりあっています．よって

$$|T_1|\cos\alpha = |T_2|\cos\beta = T = \text{定数} \quad (\text{水平方向}).$$

また垂直方向の力の差は，運動方程式より質量 $\rho\Delta s$ と加速度 u_{tt} の積で表わされます．ただし ρ は単位長での質量，Δs はいま考えている弦の小さな部分の長さ．よって

$$|T_2|\sin\beta - |T_1|\sin\alpha = \rho\Delta s u_{tt} \quad (\text{垂直方向}).$$

ここで振動が小さいことに注意すると，$\Delta s \approx \Delta x$．両辺を T で割ると

$$\frac{\rho\Delta x}{T}u_{tt} \approx \tan\beta - \tan\alpha.$$

両辺を Δx で割り，接線の傾きと微分係数は等しいことを用いると，

$$\frac{\rho}{T}u_{tt} \approx \frac{u_x(x_1+\Delta x,t) - u_x(x_1,t)}{\Delta x}.$$

ここで $\Delta x \to 0$ とすると，

$$\frac{\rho}{T}u_{tt} = u_{xx} \text{ または } \ u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

これは**一次元波動方程式 (one dimensional wave equation)** とよばれます．

初期条件は $t=0$ のときの弦の形状および初速度を指定する条件です．たとえば，初期の形状が $y=f(x)$ である弦に初速度 $g(x)$ を与えた場合には，初期条件は

$$u(x,0) = f(x), \ \ u_t(x,0) = g(x)$$

となります．また弦が有限な長さ L をもつとき，境界条件については，たとえば次のものが考えられます．

(i)　弦の両端を固定するとき

$$u(0,t) = 0, \ \ u(L,t) = 0.$$

(ii)　弦の両端点が振動方向に自由に動けるとき

$$u_x(0,t) = 0, \ \ u_x(L,t) = 0.$$

薄い膜の振動は，膜が静止の状態では xy 平面に位置し，時刻 t における垂直方向の変位が $u(x,y,t)$ であるとすると，次の**二次元波動方程式 (two dimensional wave equation)** で表わされます．

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

この方程式を極座標 (r,θ) で表わすと，次のようになります．

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right).$$

例題 7.12 両端が固定されている長さ L の水平に張られた弾性弦の初期形状が $f(x)$ で与えられているとき，この弦の垂直方向の変位を求めよ．

解 まず弾性弦の垂直方向の変位を $u(x,t)$ とすると，$u(x,t)$ は一次元波動方程式 $u_{xx} = (1/c^2)u_{tt}(0 < x < L, t > 0)$ を満たす．次に，初期条件は

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = 0$$

と表わせる．また両端が固定されているので，境界条件は

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

ここでは変数分離法を用いて一次元波動方程式を解く．$u(x,t) = X(x)T(t)$ とおき，一次元波動方程式に代入すると

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2T} = \lambda.$$

これよりただちに次の微分方程式を得る．

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T'' - c^2\lambda T = 0.$$

ここで u の境界条件を用いると，すべての t に対して

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

となる．これは $T(t)$ が 0 でないならば，$X(0) = X(L) = 0$ を意味する．よってこれより Sturn-Liouville 問題

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0$$

を得る．すでに学んだように，この問題は固有値 $\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$，固有関数 $X_n(x) = \sin(n\pi x/L^2)$ をもっている．さらに，固有値が $\lambda_n = -n^2\pi^2/L$ のとき，

$$T'' - c^2\lambda_n T = 0$$

の一般解は

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin\frac{n\pi ct}{L}$$

で与えられる．

$X_n(x)$ と $T_n(t)$ の積

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}(C_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin\frac{n\pi ct}{L})$$

は一次元波動方程式を満たし，さらに境界条件を満たしている．よって重ね合わせの原理より

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}(C_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin\frac{n\pi ct}{L}).$$

ここで初期条件 $u(x,0) = f(x)$ より，

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L} \equiv f(x).$$

この条件が満たされるためには，この級数が $f(x)$ に収束するように C_n を選ばなければならない．ところがこれは皆さんがよく知っている関数 $f(x)$ の $[0, L]$ でのフーリエ正弦級数展開である．よって

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

で与えられる．

D_n を見つける方法もほとんど同じである．$u(x,t)$ が t について項別微分可能であるとすると，

$$0 \equiv u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

これより，$(n\pi c/L)D_n$ は 0 のフーリエ正弦級数となるので

$$D_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\infty} 0\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

で与えられる． ■

例題 7.13 四角いドラムの薄い膜の振動は次の境界値問題として表わされる．

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2\Delta_2 u, \qquad 0<x<1,\ 0<y<1,\ t>0 \\ u(0,y,t) &= 0,\ \ u(1,y,t)=0,\ u(x,0,t)=0,\ u(x,1,t)=0 \\ u(x,y,0) &= f(x,y), \qquad u_t(x,y,0)=g(x,y) \end{aligned}$$

この境界値問題を初期速度 $g(x,y) = 0$ のとき解け．

解 変数分離法を用い，$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ を仮定し，これを二次元波動方程式に代入すると

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{T''}{c^2T}$$

となる．ここで左辺は t と独立であり，右辺は x, y と独立なので，両辺とも定数となり，この定数を λ とおくと

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{T''}{c^2T} = \lambda.$$

これより

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \lambda$$

となり，ここでも左辺と右辺は定数となるので，この定数を α とおくと次の 3 つの微分方程式を得る．

$$X'' - \alpha X = 0,$$

$$Y'' - \beta Y = 0,$$

$$T'' - c^2\lambda T = 0,$$

ただし，$\beta = \lambda - \alpha$． ここで境界条件

$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, \quad u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0$$

を用いると，Sturn-Liouville 問題

$$X'' - \alpha X = 0,\ X(0) = X(1) = 0,$$

$$Y'' - \beta Y = 0,\ Y(0) = Y(1) = 0$$

が得られる．この境界値問題の固有値と固有関数はそれぞれ

$$\alpha_m = -m^2\pi^2,\quad X_m(x) = \sin m\pi x\ (m = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$\beta_n = -n^2\pi^2,\quad Y_n(x) = \sin n\pi y\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与えられる．この α_m, β_n に対して，T は

$$T_{mn}(t) = C_{mn}\cos\sqrt{m^2+n^2}\pi ct + D_{mn}\sin\sqrt{m^2+n^2}\pi ct.$$

ここで初期条件 $u_t(x, y, 0) = 0$ より $T'(0) = 0$ となるので $D_{mn} = 0$．よって

$$T_{mn}(t) = C_{mn}\cos\sqrt{m^2+n^2}\pi ct.$$

こうして，境界条件と初期条件を満たす解の列

$$u_{mn}(x, y, t) = \sin m\pi x \sin n\pi y C_{mn}\cos\sqrt{m^2+n^2}\pi ct$$

が得られる．これらを重ね合わせて

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin m\pi x \sin n\pi y C_{mn}\cos\sqrt{m^2+n^2}\pi ct$$

が得られる．初期条件 $u(x, y, 0) = f(x, y)$ が満たされるためには

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\sin m\pi x \sin n\pi y = f(x, y)$$

が成り立たなければならない．この式から C_{mn} を定めよう．

$$C_m = \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\sin n\pi y$$

とおくと

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin m\pi x$$

と表わせる．これらはどちらもフーリエ正弦級数なので，その係数は

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{2}{1}\int_0^1 C_m \sin n\pi y dy \\ &= \frac{2}{1}\int_0^1 [\frac{2}{1}\int_0^1 f(x, y)\sin m\pi x dx]\sin n\pi y dy \\ &= 4\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\sin n\pi x \sin n\pi y dx dy. \end{aligned}$$

この C_{mn} を $u(x, y, t)$ に代入すると解が得られる．■

7.3.4　演習問題

1. 次の境界値問題を解け.

(a)　両端が固定された長さ 1 m の水平に張られた弾性弦の初期形状が $\sin \pi x$ で与えられている．弦の初速度が 0 のとき，この弦の垂直方向の変位を変数分離法を用いて求めよ.

(b)　両端が固定された長さ 1 m の水平に張られた弾性弦に初速度 1 m/sec を与えたとき，この弦の垂直方向の変位を変数分離法を用いて求めよ.

2.　D'Alembert 法は非有限区間での波動方程式にも用いることができ

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau$$

は次の初期値問題の解であることを示せ.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \ (-\infty < x < \infty,\ t > 0),$$
$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x).$$

3.　2 の結果を用いて次の初期値問題を解け.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \ (-\infty < x < \infty,\ t > 0),$$
$$u(x,0) = e^{-x^2},\ \ u_t(x,0) = 1.$$

4.　二次元波動方程式 $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$ を次の条件の元で解け.

初期条件：　$u(x,y,0) = f(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y,\ u_t(x,y,0) = 0.$

(a)　境界条件：　$u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0 \ (0 < x < 1),$
$u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0 \ (0 < y < 1)$.

初期条件：　$u(x,y,0) = f(x,y) = 0,\ u_t(x,y,0) = g(x,y).$

(b)　境界条件：　$u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0 \ (0 < x < 1),$
$u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0 \ (0 < y < 1).$

7.3.5　熱伝導方程式

最後に表面が断熱された細長い均質な棒に熱が伝わるとき，位置 x，時刻 t での棒の温度 $u(x,t)$ が満たす偏微分方程式について考えてみましょう.

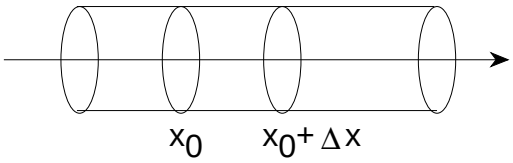

図 7.2　熱の伝わり方

x_0 での切断面を通して Δt 時間に棒に流入してくる熱量は，温度勾配 $u_x(x_0,t)$ に比例するので $KAu_x(x_0,t)\Delta t$ (K：熱伝導率, A：断面積)．同じく Δt 時間に $x_0 + \Delta x$ での切

断面を通して流入する熱量は $KAu_x(x_0+\Delta x,t)\Delta t$. よって x_0 と $x_0+\Delta x$ の間に流入する総熱量は

$$KA[u_x(x_0+\Delta x,t)-u_x(x_0,t)]\Delta t$$

となります.

一方，この棒の比熱を g(単位質量の温度を単位時間に $1°C$ 上げるのに必要な熱量) とするとき，質量 $\rho A\Delta x$ の部分が温度変化 u_t をもたらすための熱量を Δt 時間与えると，総熱量は

$$gu_t\rho A\Delta x\Delta t$$

となります．これが上の総熱量と等しくならなければならないので

$$KA[u_x(x_0+\Delta x,t)-u_x(x_0,t)]\Delta t=gu_t\rho A\Delta x\Delta t.$$

両辺を $A\Delta x\Delta t$ で割ると

$$K[\frac{u_x(x_0+\Delta x,t)-u_x(x_0,t)}{\Delta x}]=g\rho u_t.$$

ここで $\Delta x\to 0$ とすると

$$Ku_{xx}=g\rho u_t$$

となり

$$u_t=ku_{xx}\quad k=\frac{K}{g\rho}>0$$

を得ます.

これは**一次元熱伝導方程式 (one dimensional heat equation)** とよばれます.

外部から熱の供給 $q(x,t)$ がある場合には，棒の温度 $u(x,t)$ は次の式を満たします.

$$u_t=ku_{xx}+q(x,t)\ \ (k>0).$$

$u(x,t)$ が時間 t に対して一定のとき，つまり $u_t=0$ のとき，$u(x,t)$ は**定常状態 (steady state)** での温度分布を表わします．初期条件は，定常状態での温度分布の $t=0$ における温度分布 $f(x)$ を表わします．つまり，

$$u(x,0)=f(x)$$

となります．また棒が有限な長さ L をもつときの境界条件には次のようなものが考えられます.

(i) 棒の両端の温度が 0 に保たれているとき

$$u(0,t)=u(L,t)=0.$$

(ii) 棒の両端が断熱されているとき

$$u_x(0,t)=u_x(L,t)=0.$$

薄い板の熱伝導現象は，この板が xy 平面におかれ，時刻 t での点 (x,y) の温度が $u(x,y,t)$ であるとき，次の**二次元熱伝導方程式 (two dimensional heat equation)** で表わされます.

$$u_t=k(u_{xx}+u_{yy})\ (k>0).$$

ここで $u_t = 0$ のとき，つまり $u(x,t)$ が時間 t に対して定数のとき，Laplace 方程式 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ を得ます．そしてこの方程式は定常状態での温度分布を表わします．

また円柱の熱伝導方程式は，時刻 t での点 (x,y,z) の温度が $u(x,y,z,t)$ であるとき，次の**三次元熱伝導方程式 (three dimensional heat equation)** で表わされます．

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \ (k > 0).$$

この方程式を円柱座標 (r,θ,z) で表わすと，変数変換

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$$

により，次のようになります．

$$u_t = k(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}) \ (k > 0).$$

例題 7.14 表面が断熱されている長さ L の細長い均質な棒で棒の両端の温度が 0 度に保たれていて，初期温度分布が $u(x,0) = f(x)$ で与えられているとき棒の温度 $u(x,t)$ を求めよ．

解 この関数の数学的モデルは熱伝導方程式

$$u_t = ku_{xx}$$

と初期条件 $u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$，境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t > 0$ で与えられる．

変数分離解 $u(x,t) = X(x)T(t)$ を仮定して，これを熱伝導方程式に代入すると

$$XT' = kX''T,$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = \lambda \ (\lambda = \text{定数})$$

が得られる．また境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ より，Sturn-Liouville 問題

$$X'' - \lambda X = 0,\ X(0) = X(L) = 0$$

を得る．これは固有値 $\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$，固有関数 $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ をもつ．またこの λ_n に対して $T' - \lambda KT = 0$ は

$$T' + (\frac{n\pi\sqrt{K}}{L})^2 T = 0$$

となり，その一般解は

$$T_n(t) = B_n e^{-(\frac{n\pi\sqrt{K}}{L})^2 t}$$

で与えられる．こうして熱伝導方程式と境界条件を満たす解の列

$$u_n(x,t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi\sqrt{K}}{L})^2 t}$$

が得られる．これらを重ね合わせると

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t).$$

ここで初期条件 $u(x,0)=f(x)$ を用いると

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x).$$

よって B_n は $f(x)$ のフーリエ正弦級数の係数となるので

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

したがって

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\Big(\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\Big)\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-(\frac{n\pi\sqrt{K}}{L})^2t}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

例題 7.15 例題 7.14 において，$t=0$ の前に棒の一端が沸騰しているお湯につけられていて，$t=0$ で 30° の水につけたとする．このとき棒の温度 $u(x,t)$ を求めよ．

解 時刻 $t=0$ の前で，定常状態という条件のもとでは，温度分布はラプラス方程式 $u_{xx}=0$ と境界条件 $u(0,t)=0, u(L,t)=100$ で与えられる．ここで，$u_{xx}=0$ より，解を $u(x,t)=ax+bt+c$ とおくと，$u_t(x,t)=0$ より $b=u_t(x,t)=0$．また，境界条件より，$0=u(0,t)=c, 100=u(L,t)=aL+c$．したがって，

$$u(x,t)=\frac{100}{L}x$$

これより，$t\geq 0$ において，次の境界値問題を解くことになる．

$$u_t=ku_{xx}, u(0,t)=0, u(L,t)=30, u(x,0)=\frac{100}{L}x$$

境界条件が同次でないので，この偏微分方程式の解の和は境界条件を満たすとは限らない．そこで，$t\to\infty$ のとき $u_{xx}=0$ を満たす関数を考える．このような解を $t>0$ における定常状態での解といい，$u(x,\infty)$ で表す．

この解は，$t<0$ での $u(x,t)$ と同様にして求めることができ，

$$u(x,\infty)=\frac{30}{L}x$$

となる．

ここで，$u(x,t)=u(x,\infty)+v(x,t)$ とおくと，

$$\begin{aligned}v_t&=kv_{xx}\\v(0,t)&=u(0,t)-u(0,\infty)=0-0=0\\v(L,t)&=u(L,\infty)-u(L,\infty)=30-30=0\end{aligned}$$

となり，同次の境界条件を持った熱伝導方程式を得ることができる．初期条件は

$$v(x,0)=u(x,0)-u(x,\infty)=\frac{100}{L}x-\frac{30}{L}x=\frac{70}{L}x$$

これより，解 $v(x,t)$ は，上の例題の $u(x,t)$ と同じで，

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-(\frac{n\pi\sqrt{K}}{L})^2t}$$

ただし，B_n は初期温度分布関数のフーリエ正弦係数である．したがって，

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{70}{L} x \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{140}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

これより，温度 $u(x,t)$ は定常状態 $u(x,\infty)$ と非定常分布 $v(x,t)$ により求まることが分かる．■

非三角関数解 三角関数は常に境界値問題の解を表すことができるとは限らない.

例題 7.16 球面における温度分布が $f(\phi)$ で与えられる半径 1 の球の内部の定常状態での温度を求めよ.

解 空間では，定常状態温度 $u(x,y,z)$ はラプラス方程式 $\Delta_3 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ を満たす．極座標変換

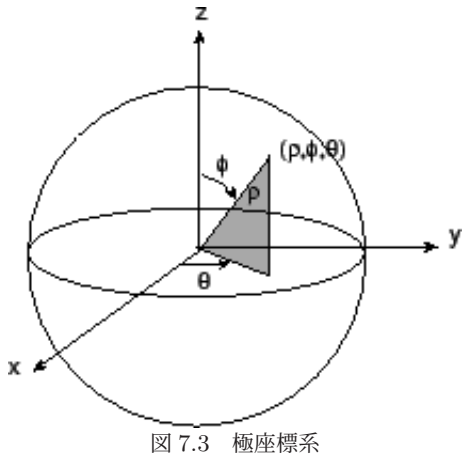

図 7.3　極座標系

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\theta$$

を用いると，

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + 2\rho u_\rho + u_{\phi\phi} + \frac{\cos\phi}{\sin\phi}u_\phi + \frac{1}{\sin^2\phi}u_{\theta\theta} = 0$$

を得る．境界条件の対称性より，u は ϕ と ρ の関数のはずである．したがって，

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + 2\rho u_\rho + u_{\phi\phi} + \frac{\cos\phi}{\sin\phi}u_\phi = 0$$

ここで，解を $U(\phi,\rho) = R(\rho)\Phi(\phi)$ とおくと，

$$\frac{\rho^2 R''}{R} + \frac{2\rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\frac{\Phi'}{\Phi} = \lambda$$

となる．これより，2 つの常微分方程式

$$\Phi'' + \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\Phi' + \lambda\Phi = 0$$
$$\rho^2 R'' + 2\rho R - \lambda R = 0$$

を得る．$x = \cos\phi$ とおくと，

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{d\phi} = \frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{d\phi} = -\sin\phi\frac{d\Phi}{dx}$$
$$\Phi'' = \sin^2\phi\frac{d^2\Phi}{dx^2} - \cos\phi\frac{d\Phi}{dx}$$

となるので，最初の式に代入すると，

$$(1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} - 2x\frac{d\Phi}{dx} + \lambda\Phi = 0$$

これは，Legendre 方程式で，$x \in [-1,1]$ で有界な解は，$\lambda = n(n+1)$，n 整数のときだけである．2 つ目の式は，Cauchy-Euler の方程式で，$\lambda = n(n+1)$ のとき，完全解

$$a\rho^n + \frac{b}{\rho^{n+1}}$$

を持つ．

もし，$n \geq 0$ ならば，$\rho = 0$ のとき意味を持つために $b = 0$ とおく．この段階で，次の解を持つ．

$$a_0P_0(x), a_1\rho P_1(x), a_2\rho P_2(x), \ldots, a_n\rho^n P_n(x), \ldots,$$

ただし，$P_n(x)$ は位数 n の Legendre 多項式である．重ね合わせの原理より，

$$U(\rho,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n P_n(\cos\phi)$$

ここで，$U(1,\phi) = f(\phi)$，または

$$f(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\phi)$$

これは，$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ を直交系とする f のフーリエ級数である．また，例題 6.13 より，

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0,\ m \neq n$$

さらに，

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

これより，ϕ を用いて表すと，

$$\int_0^{\pi} P_m(\cos\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m \end{cases}$$

したがって，

$$\int_0^{\pi} f(\phi)\sin\phi P_n(\cos\phi)d\phi = \int_0^{\pi}\sin\phi P_n(\cos\phi)\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(\cos\phi) = \frac{2a_n}{2n+1}$$

これより，

$$a_n = (n+\frac{1}{2})\int_0^{\pi} f(\phi)\sin\phi P_n(\cos\phi)d\phi$$

となり，形式解を得ることができた． ■

扱う領域が有界でないとき，フーリエ級数を用いて解を表わすことは不可能になります．このような場合，よく用いられるのが変換です．次の章でフーリエ変換を用いて，領域が有界でない場合の熱伝導方程式を解きます．

7.3.6　演習問題

1. 表面が断熱されている長さ 2m の細長い棒の定常状態の温度分布が

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

で与えられ，時間 $t = 0$ のとき，両端が温度 0° 度の冷水の中につけられた．このとき棒の温度 $u(x,t)$ を求めよ．

2. 1. と同じ条件で定常温度分布が $f(x) = x(2-x),\ 0 < x < 2$ で与えられているときの温度 $u(x,t)$ を求めよ．

3. 長さ 1m の細長い棒の端が 10° と 90° に保たれているとき，定常温度分布を求めよ．

4. (a) 次の熱伝導方程式の境界値問題

$u_{xx} = ku_t \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0$

$|x| \to \infty$ のとき $u(x,t)$ 有界

$u(x,0) = f(x)$

にラプラス変換を施し，$u(x,t)e^{-st} \to 0$ を仮定すると次の微分方程式を得ることを示せ．

$$U_{xx}(x,s) - ksU(x,s) = -kf(x),\ -\infty < x < \infty.$$

(b)

$$\begin{aligned} U(x,s) = &\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{s}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{ks}(y-s)} f(y)dy \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{s}} \int_{-\infty}^0 e^{-\sqrt{ks}(y-s)} f(y)dy \\ &- \sqrt{\frac{k}{s}} \int_0^x f(y) \sinh -\sqrt{ks}(y-s) f(y)dy \end{aligned}$$

は上の境界値問題の解であることを示せ．

第 8 章

フーリエ変換

8.1 フーリエ変換

Dirichlet 条件を満たす関数のフーリエ展開は周期関数や有限区間で定義された関数の応用に役立ちました．しかし，前章でみたように，無限区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数を表わすことができませんでした．そこでこのようなときには，フーリエ級数でなく**フーリエ変換 (積分)(Fourier Transform)** を用います．

フーリエ積分展開は周期 L の周期関数の複素フーリエ級数において，$L \to \infty$ と考えることができます．つまり周期 L の周期関数の複素フーリエ級数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$$

において，$\omega = n\pi/L, F(\omega) = 2Lc_n$ とおくと，$\Delta\omega = \frac{(n+1)\pi - n\pi}{L} = \pi/L$．よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{2L} e^{i\omega x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \Delta\omega. \end{aligned}$$

ただし，

$$F(\omega) = \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

ここで $L \to \infty$ とすると次の定理が得られます．

定理 8.1 (フーリエ積分公式) $f(x)$ が $(-\infty, \infty)$ で区分的に滑らかで，絶対積分可能 $(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty)$ ならば

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

ただし

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

ここに使われた $F(\omega)$ を $f(x)$ の**フーリエ変換 (Fourier transform)** といい，$\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$ と表わします．また $f(x)$ は $F(\omega)$ の**フーリエ逆変換 (Fourier inverse transform)** といい，$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ と表わします．フーリエ積分公式で $f(x)$ か $F(\omega)$ のどちらか一方がわかればもう一方が求まるので，フーリエ積分公式は フーリエ反転公式ともよばれます．

例題 8.1 $f(x) \in C^1$ 級で，$f(x), f'(x)$ が $(-\infty, \infty)$ で絶対積分可能のとき $\mathcal{F}[f'(x)] = (i\omega)F(\omega)$ を示せ．

解 まず $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ より $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ となる．もし $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \alpha \neq 0$ ならば，十分大きな $T > 0$ に対して，$\int_T^{\infty} |f(x)|dx = \infty$ となり，絶対積分可能でない．次に f' のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[f'] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx.$$

ここで $u = e^{-i\omega x}$　$dv = f'(x)$ とおき，部分積分を用いると

$$\mathcal{F}[f'] = f(x)e^{-i\omega x}\,|_{\infty}^{\infty} + (i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = (i\omega)F(\omega). \blacksquare$$

ラプラス変換と同様，次のような微分法則が成り立ちます．

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n F(\omega).$$

また，便利な公式として次のようなものがあります．

表 8.1　フーリエ変換公式

$f(x)$	$F(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{-a\|x\|}$ $(a > 0)$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{-a^2x^2}$ $(a > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\omega^2/4a^2}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$ $(a > 0)$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\|\omega\|}$

フーリエ変換 $F(\omega)$ で，Euler の公式 $e^{-i\omega x} = \cos\omega x - i\sin\omega x$ を用いると，

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\omega x - i\sin\omega x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx \\ &= \underbrace{A(\omega)}_{even\,function} - i\underbrace{B(\omega)}_{odd\,function}. \end{aligned}$$

よってフーリエ積分公式より

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A(\omega)-iB(\omega))(\cos\omega x+i\sin\omega x)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x d\omega. \end{aligned}$$

まとめると

定理 8.2 $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で区分的に滑らかで，$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ (絶対積分可能) ならば

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega,$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx,$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx.$$

フーリエ余弦変換

$f(x)$ が $(0,\infty)$ で区分的に滑らかで，$\int_{0}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ (絶対積分可能) ならば

$$F_c(\omega)=\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx,$$
$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega x d\omega.$$

$F_c(\omega)$ を**フーリエ余弦変換 (Fourier cosine transform)** といいます.

フーリエ正弦変換

$f(x)$ が $(0,\infty)$ で区分的に滑らかで，$\int_{0}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ (絶対積分可能) ならば

$$F_s(\omega)=\int_{0}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx,$$
$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F_s(\omega)\sin\omega x d\omega.$$

$F_s(\omega)$ を**フーリエ正弦変換 (Fourier sine transform)** といいます.

例題 8.2 フーリエ積分公式を用いて，次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{\omega^2+1}=\begin{cases}0, & x<0\\ \pi/2, & x=0\\ \pi e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

解

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \pi/2, & x=0\\ \pi e^{-x}, & x>0\end{cases}$$

とおくと，フーリエ積分公式より

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\cos\omega x dx + \int_{0}^{\infty} \pi e^{-x}\cos\omega x dx \\ &= \pi(\frac{\cos\omega x}{\omega^2+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\cos\omega x dx + \int_{0}^{\infty} \pi e^{-x}\sin\omega x dx \\ &= \pi(\omega\frac{\sin\omega x}{\omega^2+1}). \end{aligned}$$

よって

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} (\frac{\cos\omega x}{\omega^2+1} + \frac{\omega\sin\omega x}{\omega^2+1})d\omega$$

となる．■

フーリエ変換の偏微分方程式への応用に行く前に．合成積のフーリエ変換について少し考えてみましょう．まず，$f(x)$ と $g(x)$ の合成積 $f*g$ を

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau$$

で定義します．ここで $f(x)$ が $(0,\infty)$ で絶対積分可能ならば次の定理が成り立ちます．

定理 8.3 (合成積のフーリエ変換)

$$\mathcal{F}\{f*g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\} = F(\omega)G(\omega).$$

証明 $F(\omega), G(\omega)$ をそれぞれ $f(x), g(x)$ のフーリエ変換とすると，

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega u}du,\ G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega v}dv.$$

よって

$$F(\omega)G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v)e^{-i\omega(u+v)}dudv.$$

ここで，$u+v=x$ とおくと，$u=x-v, du=dx$ より

$$\begin{aligned} F(\omega)G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(v)(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+v)}du)dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(v)(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)e^{-i\omega x}dx)dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)g(v)dv)dx \\ &= \mathcal{F}\{f*g\}. \blacksquare \end{aligned}$$

8.1.1 演習問題

1. $f(x)$ が $(0,\infty)$ で区分的に滑らかで，$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$ (絶対積分可能) のとき，次のことが成り立つことを示せ.

(a) $\mathcal{F}_s[f'(x)] = -\omega\mathcal{F}_c[f(x)]$

(b) $\mathcal{F}_c[f'(x)] = -f(0+) + \omega\mathcal{F}_s[f(x)]$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$ のとき，下の問に答えよ.

(a) $f(x)$ のフーリエ変換を求めよ.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\omega \cos \omega x}{\omega} d\omega$ を計算せよ.

(c) (b) の結果を用いて $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$ を求めよ.

3.

(a) 積分方程式 $\int_0^\infty f(x)\cos \omega x dx = \begin{cases} 1-\omega & 0 \le \omega \le 1 \\ 0 & \omega > 1 \end{cases}$ を解け.

(b) (a) の結果を用いて $\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}$ を示せ.

4. フーリエ積分公式を使って，次の各等式が成り立つことを示せ.

(a) $\int_0^\infty \frac{1-\cos a\omega}{\omega} \sin \omega x d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < x < a \\ \frac{\pi}{4}, & x = a \\ 0, & x > a \end{cases}$

(b) $\int_0^\infty \frac{\sin \pi\omega \sin \omega x}{1-\omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi \sin x}{2}, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

8.2 偏微分方程式への応用

ここでは境界値問題をフーリエ変換を用いて解く方法を学びます.

例題 8.3 1 次元熱伝導方程式

$$u_t = u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0)$$

の解で初期条件

$$u(x,0) = f(x)$$

を満たすものを求めよ.

解 この方程式は変数分離法でも解けるが，ここではフーリエ変換を用いて解く．まず $\mathcal{F}[u(x,t)] = U(\omega,t)$ と表わす．次に偏微分方程式の両辺にフーリエ変換を施すと，左辺は

$$\mathcal{F}[u_t] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t}[U(\omega,t)].$$

右辺は

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = (i\omega)^2 U(\omega,t).$$

よって偏微分方程式 $u_t = u_{xx}$ は次の常微分方程式に変換される.

$$\frac{d}{dt}[U(\omega,t)] + \omega^2 U(\omega,t) = 0$$

これは t について線形なので，一般解

$$U(\omega,t)=C_\omega e^{-\omega^2 t}$$

を得る．ここで C_ω を求めると，$u(x,0)=f(x)$ より

$$\mathcal{F}[u(x,0)]=U(\omega,0)=F(\omega)=C_\omega.$$

よって

$$U(\omega,t)=F(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

ここで，フーリエ積分公式を用いて $u(x,t)$ を求めると

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}f(r)e^{-i\omega r}dr)e^{-\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(r)e^{-i\omega(r-x)}e^{-\omega^2 t}drd\omega.\end{aligned}$$

Euler の公式を用いるとこの解はもっと簡単な形になる．つまり

$$e^{-i\omega(r-x)}=\cos[\omega(r-x)]-i\sin[\omega(r-x)]$$

より

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(r)\cos[\omega(r-x)]e^{-\omega^2 t}drd\omega\\&-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(r)\sin[\omega(r-x)]e^{-\omega^2 t}drd\omega.\end{aligned}$$

ここで $u(x,t)$ は実数であることに注意すると，虚部が消えて

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(r)\cos[\omega(r-x)]e^{-\omega^2 t}drd\omega$$

となる．■

例題 8.4 一端を固定し，水平に張られた細くて非常に長い弦の初期形状が $f(x)$ で与えられている．弦の初速度が 0 のとき，この弦の垂直方向の変位を求めよ．

解 この弦の垂直方向の変位を $u(x,t)$ とすると，$u(x,t)$ は一次元波動方程式

$$u_{xx}=(1/c^2)u_{tt}(0<x<\infty,t>0)$$

を満たす．また初期条件は

$$u(x,0)=f(x),u_t(x,0)=0$$

で与えらえれ，一端が固定されていることより境界条件は

$$u(0,t)=0.$$

この偏微分方程式をフーリエ変換を用いて解く．
$0 < x < \infty$ より，フーリエ正弦変換を用いる．演習問題 8.1.1 より

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[u_{xx}] &= -\omega\mathcal{F}_c[u_x] \\ &= -\omega(-u(0+,t) + \omega\mathcal{F}_s[u]) \\ &= -\omega^2 U_s(\omega,t), \\ \frac{1}{c^2}\mathcal{F}_s[u_{tt}] &= \frac{1}{c^2}\int_0^\infty u_{tt}(x,t)\sin\omega x dx \\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\infty u(x,t)\sin\omega x dx \\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_s(\omega,t).\end{aligned}$$

よって $u_{xx} = (1/c^2)u_{tt}$ は次の常微分方程式に変換される．

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_s(\omega,t) + \omega^2 U_s(\omega,t) = 0.$$

これは t について線形なので，一般解

$$U_s(\omega,t) = A_\omega\cos c\omega t + B_\omega\sin c\omega t$$

を得る．ここで初期条件を用いて A_ω, B_ω を求めると，$u(x,0) = f(x)$ より

$$\mathcal{F}_s[u(x,0)] = U_s(\omega.0) = A_\omega = F_s(\omega).$$

また

$$\mathcal{F}_s[u_t(x,0)] = \frac{\partial U_s(\omega.0)}{\partial t} = c\omega B_\omega = 0$$

より $B_\omega = 0$．よって $U_s(\omega,t) = F_s(\omega)\cos c\omega t$ を得る．ここでフーリエ反転公式を用いると

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U_s(\omega,t)\sin\omega x d\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)\cos c\omega t\sin\omega x d\omega.\end{aligned}$$

ここで

$$\cos c\omega t\sin\omega x = \frac{1}{2}\{\sin\omega(x+ct) + \sin\omega(x-ct)\}$$

より

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)[\sin\omega(x+ct) + \sin\omega(x-ct)]d\omega \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} & x > ct \\ \frac{1}{2}\{f(x+ct) - f(x-ct)\} & x < ct. \end{cases}\end{aligned}$$

8.2.1 演習問題

1. フーリエ変換を用いて，一次元熱伝導方程式を解け．

$$u_t = 2u_{xx} \quad (0 < x < \infty,\ t > 0)$$
$$u(0,t) = 0,\ u(x,0) = \begin{cases} 25x, & 0 < x < 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

2. フーリエ変換を用いて，一次元波動方程式

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0)$$

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

の解が $u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\}$ で与えられることを示せ.

3. フーリエ変換を用いて，次の境界値問題を解け.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad (0 < x < \infty,\ t > 0) \\ u(x,0) &= u_t(x,0) = 0 \\ u_x(0,t) &= f(t) \end{aligned}$$

4. フーリエ変換を用いて，次の境界値問題を解け.

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty)$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$x^2 + y^2 \longrightarrow \infty$ のとき $u(x,y) \longrightarrow 0$.

付録 A

問題解答

Chap 1

1.1

1.

(a) $c_1 = 1 \quad c_2 = -2$

1.2

1.

(a) $(\sin x)y = c$ (b) $y = -\log(c - e^x)$

(c) $y = \frac{-1+x-c(1+x)}{1-x+c(1+x)}$ (d) $y = \tan(x + x^2 + c)$

2.

(a) $y = \frac{2}{1+e^{-x}}$ (b) $y = 3e^{\cos x + 1}$

(c) $1 + y^2 = \frac{1}{2}x^2$ (d) $y^2 + \log|y^2 - 1| = 2x + \log(x-1)^2 + \log 3$

3.

(a) $T(t) = 20 + 50(\frac{3}{5})^{t/15}$ (b) $t = 41.9$ min

1.3

1.

(a) $\log y - \frac{x^2}{2y^2} = c$ (b) $\log(xy^3 + y^4) - \frac{x}{y} = c$

(c) $x^2 + 4y^2 = c(x + y)$ (d) $e^{-\frac{x}{y}}(\frac{x}{y} + 1) - \log y = c$

(e) $2x - 2y - \frac{16}{3}\log|3x + 6y + 5|$

(f) $(1+\sqrt{2})\log(|\frac{y-13}{x-5} - 1 + \sqrt{2}|) + (1-\sqrt{2})\log(|\frac{y-13}{x-5} - 1 - \sqrt{2}|)$
$+2\log|x-5| = c$

2.

(a) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = 3$ (b) $(\frac{y}{x})^3 + 3\log x = 8$

3.

例題 1.9 は $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$ と 2 つの平行な直線となるため，座標軸の平行移動では定数項を落とすことができない.

1.4

1.

(a) $\frac{x^3}{3} + xy^2 = c$ (b) $e^{xy} + x^2 y = c$

(c) $x + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$ (d) $-\frac{x^3}{3} + xy^2 = c$

2.

(a) $\frac{x^3}{3} + (y-1)e^y = 0$ (b) $e^x y + x\sin y = 1$

(c) $\sin^2 x - x^2y^2 + y^2 = 4$

1.5

1.

$(a)\ \log|x| + \frac{y^2}{x} = c \quad (b)\ \frac{x^4}{4} + x^5 y + x^4 y^2 = c$

$(c)\ x^2 + \frac{x}{y} + y^2 = c \quad (d)\ x^2 \cos y + x \sin y = c$

2.

$(a)\ xy^2 - y^3 = cx^2 \quad (b)\ -x^{-1}y^2 + x^2 y^{-1} = c$

1.6

1.

$(a)\ y = \frac{c - e^x}{\cos x} \quad (b)\ y = 1 + ce^{-x^2}$

$(c)\ y = \frac{-\cos x + \sin x + c}{x} \quad (d)\ y = \frac{\cos 2x + c}{2xe^x}$

2.

$(a)\ y = (x+2)e^{-\sin x} \quad (b)\ y = \log x(\log\log x - 1)$

$(c)\ y = \begin{cases} 1 - e^{-x} & (0 \le x < 1) \\ (e-1)e^x & (x \ge 1) \end{cases} \quad (d)\ y = (\sin x - 1)\cos x$

3. $i(t) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{5^{10}}(5-t)^{10} & (0 \le t < 5) \\ 2 & (t \ge 5) \end{cases}$

1.7

1.

$(a)\ y = \frac{x}{x+c} \quad (b)\ y = \frac{1}{\log x + 1 + cx}$

$(c)\ y = \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + c}$

2.

$(a)\ y^2 = -4x^2 + ce^{-2x} \quad (b)\ y^2 + 2y = 1 + ce^{-x^2}$

3.

$(a)\ y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x+c} \quad (b)\ y = x + \frac{2x}{2ce^{x^2} - 1}$

1.8

1. 省略

2.

$(a)\ y(3) = 4 \quad (b)\ y(4) = \frac{155}{8}$

Chap 2

2.1

1.

$(a)\ y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$

$$W(e^{-4x}, e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{-4x} & e^x & e^{2x} \\ -4e^{-4x} & e^x & 2e^{2x} \\ 16e^{-4x} & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{-4x+x+2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 16 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 30e^{-x} \neq 0$$

$(b)\ y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$

$$W(e^{-3x}, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-x} \\ -3e^{-3x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = 2e^{-4x} \neq 0$$

$(c)\ y = c_1 + c_2 e^x$

$$W(1, e^x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \neq 0$$

(d) $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{7x} W(1, e^x, e^{7x}) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{7x} \\ 0 & e^x & 7e^x \\ 0 & e^x & 49e^{7x} \end{vmatrix} = 42e^{8x} \neq 0$

2.

(a) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ (b) $y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos \sqrt{3}x + c_4 \sin \sqrt{3}x$

3.

(a) $y = c_1x^{-2} + c_2x^2$ (b) $y = c_1x^{-1} + c_2x^3$

2.2

1.

(a) $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ (b) $y = c_1x^2 \log x + c_2x^2$

(c) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{xe^{-x}}{2}$

(d) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \cos x \log|\cos x| + x \sin x$

2. 省略

2.3

1.

(a) $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$ (b) $\{e^{-x}, e^{\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}), e^{\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})\}$

(c) $\{e^{-x}, xe^{-x}, e^{2x}\}$ (d) $\{1, \cos 3x, x \cos 3x, \sin 3x, x \sin 3x\}$

2.

(a) $y = c_1e^{-2x} + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^x$

(b) $y = c_1 + c_2x + e^{-x}[(c_3 + c_4x) \cos 2x + (c_5 + c_6x) \sin 2x]$

3.

(a) $y = e^x$ (b) $y = (1 - x)e^{3x}$

(c) $y = \frac{4}{3}e^{-x} - e^{-3x}[\frac{4}{3} \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 2x]$ (d) $y = c_1 + c_2x + e^{-x}[c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x]$

2.4

1.

(a) $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + e^x$ (b) $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$

(c) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x$

(d) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x + xe^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$

(e) $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + c_3e^{2x} - \frac{1}{338}(5e^{2x} \sin 2x - 12e^{2x} \cos 2x)$

(f) $y = (c_1 + c_2x) \cos x + (c_3 + c_4x) \sin x + \frac{1}{4}e^x(x^2 - 4x + 4)$

2.5

1.

(a) $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} - xe^{-x} - x \log xe^{-x} = (c_1 + c_2x)e^{-x} - x \log xe^{-x}$

(b) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \log|\sec 2x + \tan 2x| - \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x$

(c) $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + xe^{2x} \log x$

(d) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + (e^x + e^{2x}) \log(1 + e^{-x})$

(e) $y = y_c + y_p = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \log|\sec x| - \sin x \log|\sec x + \tan x|$

2. 省略

2.6

1.

(a) $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2}$ (b) $y = c_1 \cos(3 \log x) + c_2 \sin(3 \log x)$

(c) $y = c_1x + c_2x^3 - \frac{1}{3}x^2 \log x - \frac{2}{9}x^2$ (d) $y = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x^2 + \frac{1}{8}x^3$

(e) $y = c_1 + c_2x^{-1} + c_3x^{-1} \log x$

Chap 3

3.1

1.

(a) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$ (b) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$

(c) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

(d) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$

(e) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

(f) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} e^{(2+\sqrt{7})t} + c_2 \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} e^{(-2-\sqrt{7})t}$

3.2

1.

(a) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -2\cos 2t + 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} -2\cos 2t - 2\sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{4t}$

(b) $\mathbf{X} = e^{4t} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1-3t \\ 1+6t \end{pmatrix} \right]$

(c) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{6t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$

(d) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}$

(e) $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3\cos 2t + 4\sin 2t \\ -5\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3\sin 2t - 4\cos 2t \\ -5\sin 2t \end{pmatrix}$

(f) $\mathbf{X} = e^{-t} \left[c_1 \begin{pmatrix} -2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} \right]$

3.3

1.

$$
\begin{aligned}
(a)\ \mathbf{X} &= \Phi\mathbf{C}+\Phi\mathbf{U}\\
&= \begin{pmatrix} -e^{t} & e^{5t} \\ e^{t} & 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -e^{t} & e^{5t} \\ e^{t} & 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2}e^{-4t} \end{pmatrix}\\
(b)\ \mathbf{X} &= \Phi\mathbf{C}+\Phi\mathbf{U}\\
&= \begin{pmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\\
&+ \begin{pmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\cos 3t+3\cos t}{4} \\ \frac{\sin 3t+3\sin t}{4} \end{pmatrix}\\
(c)\ \mathbf{X} &= \Phi\mathbf{C}+\Phi\mathbf{U}\\
&= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\\
&+ \begin{pmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2t+2e^{-t} \\ 0 \\ 4e^{t}+e^{2t} \end{pmatrix}\\
(d)\ \mathbf{X} &= \Phi\mathbf{C}+\Phi\mathbf{U}\\
&= \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{t} & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^{t} & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^{t} & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^{t} & \cos t & \sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}\\
&+ \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{t} & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^{t} & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^{t} & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^{t} & \cos t & \sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(t^2e^{t}-2te^{t}+2e^{t}) \\ -\frac{1}{4}(t^2e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(t^2\cos t-2t\sin t-2\cos t) \\ \frac{1}{2}(t^2\sin t-2t\cos t+2\sin t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2.

(a) $y_1 = y, y_2 = y_1', \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$
\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{te^{3t}}{3}-\frac{e^{3t}}{9}) \\ -\frac{1}{2}(te^{t}-e^{t}) \end{pmatrix}
$$

3.

$$
(a)\begin{cases} x_1 = c_1e^{-2t} \\ x_2 = -\frac{1}{3}(2c_1e^{-2t}+e^{4t}-e^{t}) \end{cases}
$$

$$
(b)\begin{cases} x_1 = c_1e^{-t}+c_2+c_3t+c_4e^{t}-\frac{1}{2}t^2 \\ x_2 = c_1e^{-t}+c_2-c_3+c_3t+t-\frac{1}{2}t^2 \end{cases}
$$

$$
(c)\begin{cases} x_1 = c_1e^{-2t}+c_2e^{4t}-t+1 \\ x_2 = c_1e^{-2t}-c_2e^{4t}+t \end{cases}
$$

$$
(d)\begin{cases} x_1 = c_1+c_2e^{-3t}+c_3e^{t}-\frac{t^2}{6}-\frac{14t}{9} \\ x_2 = 3c_1-3c_2e^{-3t}+c_3e^{t}-\frac{t^2}{2}-\frac{4t}{3}+\frac{17}{9} \end{cases}
$$

Chap 4

4.1

1.

(*a*) $\rho = 3$ (*b*) $\rho = \frac{1}{e}$

2.

(a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ とおくと $S_n - xS_n = 1 - x^{n+1}$. よって $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
これより $S = \lim S_n = \frac{1}{1-x}$.

(*b*) $\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt$
$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, |x| < 1$

3.

(a) $|\frac{\sin nx}{n^3}| \leq \frac{1}{n^3} = M_n$ とおくと,
$\sum M_n = \sum \frac{1}{n^3} < \infty$
よって Weierstrass の M-test により一様収束.

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ とおくと $f'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3})'$ ここで (a) より
$f(x)$ は一様収束するので項別微分が可能。よって
$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin nx}{n^3})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

(c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ とおくと $\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$. ここで (a) より
$f(x)$ は一様収束するので項別積分が可能。よって
$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^3}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}$

4.2

1.

(a) $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} = c_0 e^{-x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(b) $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+1} x^{3n+1}$ ただし
$c_{3n} = \frac{(-1)^n (3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1}{(3n)!} c_0$,
$c_{3n+1} = \frac{(-1)^n (3n-1)(3n-4)\cdots 5\cdot 2}{(3n+1)!} c_1$

(c) $y = c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = c_1 x + xe^x - x$

(d) $y = c_0(1 + 2x^2 + \frac{x^4}{3}) + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{2^n n!(2n+1)(2n-1)(2n-3)} x^{2n+1}$

2.

(a) $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1}{(3n)!}(x-2)^{3n}$
$+ \ c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n-1)(3n-4)\cdots 2}{(3n+1)!}(x-2)^{3n+1}$

(b) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2^n n!}(c_0 - \frac{1}{5})(x-1)^{2n}$
$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (n+1)!}{(2n+1)!}(c_1 - \frac{1}{2})(x-1)^{2n+1}$

4.3

1.

(a) 確定特異点 $x = 0$, (b) 確定特異点 $x = 0$, 不確定特異点 $x = 1$

(c) 確定特異点 $x = 2$

2.

(*a*) $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^{2n-1} n!(n+2)!}$

(*b*) $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

(*c*) $y = c_0 |x^{1/2}| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$

3.

(a) $y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} ((n+2m-1)(n+2m-3)\cdots(n+2-1)(n-2+2)\cdots$
$(n-2m+4)(n-2m+2))\, x^{2m}$
$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} ((n+2m)(n+2m-2)\cdots$
$(n+2)(n-2+1)\cdots(n-2m+3)(n-2m+1))\, x^{2m+1}$

(b) $y_1 = 1 + 6(x-1) + \frac{15}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{2}(x-1)^3$;
$y_2 = y_1 \log(x-1) + \frac{11}{3} + \frac{19}{2}(x-1) + \frac{17}{8}(x-1)^2 + \cdots$

(c) $y_1 = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(m+k+1)} (\frac{x}{2})^{2k+m}$
$y_2 = J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(m-k+1)} (\frac{x}{2})^{2k-m}$

Chap 5

5.1

1.
(a) $F(s) = \frac{2}{s}(e^{-4s}+1) - \frac{1}{s^2}e^{-4s}$ (b) $F(s) = (\frac{2}{s}-2)\frac{1}{s^2} - \frac{5}{s}$
(c) $F(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$ (d) $F(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+1}$
(e) $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

5.2

1.
(a) $\lim_{t\to\infty} \frac{\sin 3t}{e^{at}} = 0$ $(a>0)$ (b) $\lim_{t\to\infty} \frac{e^{100t}}{e^{at}} = 0$ $(a>100)$
(c) $\lim_{t\to\infty} \frac{\log(1+t)}{e^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{1+t}}{ae^{at}} = 0$ $(a>0)$
(d) $\lim_{t\to\infty} \frac{t^3 e^{7t}}{e^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^3}{e^{(a-7)t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{3t^2}{(a-7)e^{(a-7)t}}$
$= \cdots = \lim_{t\to\infty} \frac{6}{(a-7)^3 e^{(a-7)t}} = 0$ $(a>7)$

5.3.1

1.
(a) $F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} - \frac{4}{s}$ (b) $F(s) = \frac{e^4}{s-3}$ (c) $F(s) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4})$
(d) $\frac{1}{(s-2)^2+1}$ (e) $F(s) = \frac{6}{(s-3)^4}$ (f) $F(s) = \frac{s\cos a}{s^2+1} - \frac{\sin a}{s^2+1}$
(g) $\frac{2}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-6s}}{s}$ (h) $\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$
(i) $\frac{2}{s} + e^{-2s}(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}) - e^{-4s}(\frac{2}{s^3} + \frac{7}{s^2} + \frac{12}{s}) - e^{-8s}(\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s})$

5.3.2

1.
(a) $Y(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2+4s-5)}$ (b) $Y(s) = \frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s^2+4s+4)}$
(c) $Y(s) = \frac{1}{s^2+4s-5}(\frac{2(1-e^{-\pi s})}{s} + \frac{-se^{-\pi s}}{s^2+1})$

5.4

1.
(a) $f(t) = \frac{t^5 e^{2t}}{4!}$ (b) $f(t) = e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t$
(c) $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ (d) $f(t) = e^{-t}\cos t$
(e) $f(t) = \frac{e^{-t}}{2} - 4e^{-2t} + \frac{9e^{-3t}}{2}$ (f) $f(t) = 4t - \sin t$
(g) $f(t) = \frac{\sin t}{3} - \frac{\sin 2t}{6} + u_2(t)(\frac{\sin(t-2)}{3} - \frac{\sin 2(t-2)}{6})$

5.5

1.

(a) $y = \frac{5e^t}{36} + \frac{te^t}{6} - \frac{5e^{-5t}}{36}$

(b) $y = e^{-t} + 2te^{-2t}$

(c) $y = 2(-\frac{1}{5} + \frac{e^t}{6} + \frac{e^{-5t}}{30})$
$-u_\pi(t)(-\frac{2}{5} - \frac{3\cos(t-\pi)}{26} + \frac{\sin(t-\pi)}{13} + \frac{5e^{t-\pi}}{12} + \frac{77e^{-5(t-\pi)}}{780})$

(d)
$y_1(t) = e^{-t} + e^t$
$y_2(t) = -e^{-t} + e^t$

(e)
$y_1(t) = \frac{3}{5}e^{2t} - \frac{3}{5}\cos t + \frac{4}{5}\sin t$
$y_2(t) = \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{10}\cos t + \frac{7}{10}\sin t$

(f)
$y_1(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}te^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}te^{-t}$
$y_2(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}te^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}te^{-t} + \frac{1}{2}\cos t$

5.6

1.

(a) $y = e^{-t}2te^{-t}$ (b) $y = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$

(c) $y = 1 + 3t + t^2$

Chap 6

6.1

1.

(a) $\{\frac{(1,3)}{\sqrt{10}}, \frac{(6,-2)}{2\sqrt{10}}\}$ (b) $\{\frac{(1,2,2)}{3}, \frac{(-2,2,-1)}{3}, \frac{(2,1,-2)}{3}\}$

(c) 直交系でない

2.

$$0 \le ||(f-\lambda g)||^2 = (f-\lambda g, f-\lambda g)$$
$$= ||f||^2 - 2\lambda(f,g) + \lambda^2||g||^2$$

これは λ についての二次式で 0 より大きいので，その判別式 Δ は 0 以下になる．よって

$$\Delta = |(f,g)|^2 - ||f||^2\ ||g||^2 \le 0$$

これより

$$|(f,g)| \le ||f||\ ||g||$$

3.

(a) $||f|| = \sqrt{\frac{8}{3}}$ (b) $||f|| = 1$ (c) $||f|| = 1$

4.

$(P_0, P_1) = \int_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}\ |_{-1}^{1} = 0$

$(P_0, P_2) = \int_{-1}^{1} \frac{3x^2-1}{2} dx = \frac{x^3-x}{2}\ |_{-1}^{1} = 0$

$(P_1, P_2) = \int_{-1}^{1} x\frac{3x^2-1}{2} dx = \frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{4}\ |_{-1}^{1} = 0$

6.2

1. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx$
2. $f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1}\cos 2mx$
3. $f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$
4. 省略
5. 3 の結果に $x = \frac{\pi}{2}$ を代入.

6.3

1.

(a) $f_e(x)=\begin{cases} x+1, & -2<x<-1 \\ -x-1, & -1<x<0 \\ x-1, & 0<x<1 \\ 1-x, & 1<x<2 \end{cases}$ $f_o(x)=\begin{cases} -x-1, & -2<x<-1 \\ x+1, & -1<x<0 \\ x-1, & 0<x<1 \\ 1-x, & 1<x<2 \end{cases}$

(b) $f_e(x)=\begin{cases} e^{-x}, & -\pi<x<0 \\ e^{x}, & 0<x<\pi \end{cases}$ $f_o(x)=\begin{cases} -e^{-x}, & -\pi<x<0 \\ e^{x}, & 0<x<\pi \end{cases}$

2.

(a) $f(x)\sim \frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$
$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^3}]\sin n\pi x$

(b) $f(x)\sim \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx$
$f(x)\sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\sin nx$

(c) $f(x)\sim \cos x$
$f(x)\sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(1-n(-1)^{n+1}}{n^2-1}\sin nx$

3.

(a) $f(x)\sim \frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{inx}$

(b) $f(x)\sim \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-in\pi x}$

6.4

1.

(a) $y=\begin{cases} c_2, & \lambda=0 \\ 0, & \lambda<0 \\ c_1\cos\frac{n\pi x}{L}, & \lambda>0 \end{cases}$ (b) $y=\begin{cases} 0, & \lambda\le 0 \\ c_2\sin\frac{n\pi x}{L}, & \lambda>0 \end{cases}$

(c) $y=\begin{cases} 0, & \lambda\le 0 \\ c_2\sin n\pi x\log x, & \lambda>0 \end{cases}$

2. 省略

Chap 7

7.1

1.

(a) $u_x=2x, u_{xx}=2, u_y=-2y, u_{yy}=-2$ より $u_{xx}+u_{yy}=0.$

(b) $u_x=\frac{-y}{x^2+y^2}, u_{xx}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, u_y=\frac{x}{x^2+y^2}, u_{yy}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$
より $u_{xx}+u_{yy}=0.$

(c) $u_x=a, u_{xx}=0, u_y=b, u_{yy}=0$ より $u_{xx}+u_{yy}=0.$

(d) $u_x=-\sin x\cosh y, u_{xx}=-\cos x\cosh y, u_y=\cos x\sinh y,$
$u_{yy}=\cos x\cosh y$ より $u_{xx}+u_{yy}=0$

2.

(a) $u_x=\frac{-xe^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}, u_{xx}=(\frac{-1}{2t^{3/2}}+\frac{x^2}{4t^5/2})e^{-x^2/4t}, u_t=(\frac{-1}{2t^{3/2}}+\frac{x^2}{4t^5/2})e^{-x^2/4t}$
より $u_{xx}-u_t=0.$

(b) $u_x=-\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}, u_{xx}=\frac{x}{4t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}, u_t=\frac{x}{4t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ より $u_{xx}-u_t=0$

(c) $u_x=a+2cx, u_{xx}=2c, u_t=2c$ より $u_{xx}-u_t=0.$

(d) $u_x=-e^{-t}\sin x, u_{xx}=-e^{-t}\cos x, u_t=-e^{-t}\cos x$ より $u_{xx}-u_t=0.$

3. (a) $yu_x+xu_y=0$ (b) $yu_x-xu_y-2xy=0$

4. $u = f(x^2+y^2), t = x^2+y^2$ とおくと,

$$u_x = \frac{du}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{du}{dt}(2x)$$
$$u_y = \frac{du}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{du}{dt}(2y)$$

よって $yu_x - xu_y = 0$.

5. $u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$ において, $v = x+y,\ w = x-y$ とおくと

$$u_x = \frac{\partial f(v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g(w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f(v)}{\partial v} + \frac{\partial g(w)}{\partial w}$$
$$u_{xx} = \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w^2}$$
$$u_y = \frac{\partial f(v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g(w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f(v)}{\partial v} - \frac{\partial g(w)}{\partial w}$$
$$u_{yy} = \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w^2}$$

よって $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

6. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

7.2

1.
   (a) $u(x,y) = e^x\phi(2x-y)$ (b) $u(x,y) = \phi(x-y)$
   (c) $u(x,y) = e^{xy}\phi(x-y)$ (d) $u(x,y) = -2x-y-1+e^x\phi(-x-y)$
2.
   (a) $u(x,y) = ce^{(1-2b)x+by}$ (b) $u(x,y) = ce^{\pm\sqrt{b-b^2}x+by}$
   (c) $u(x,y) = ce^{-\frac{b^2 x}{b+1}+by}$ (d) $u(x,y) = ce^{-(1+b)x+by}$
3.
   (a) $u(x,y) = g(x+\frac{5+\sqrt{21}}{2}y) + h(x+\frac{5-\sqrt{21}}{2}y)$
   (b) $u(x,y) = \frac{1}{6}e^{2x+y} + g(x) + h(x-\frac{y}{4})$
   (c) $u(x,y) = g(x) + h(x+y)$ (d) $u(x,y) = g(x+\frac{y}{5}) + h(x-\frac{y}{5})$

7.3.1

1. 省略
2.
   (a) $u(x,y) = \sum_1^\infty B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cosh\frac{n\pi y}{L}$
   ただし $B_n\cosh\frac{n\pi K}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$
   (b) $u(x,y) = \sum_1^\infty C_n \sinh\frac{n\pi(L-x)}{K}\sin\frac{n\pi y}{K}$
   ただし $C_n\sinh\frac{n\pi L}{K} = \frac{2}{K}\int_0^K g(y)\sin\frac{n\pi y}{K}dy$
3. 省略

7.3.2

1.
   (a) $u(x,t) = \sin\pi x\cos\pi ct$ (b) $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{n\pi c}\sin n\pi x\sin n\pi ct$
2. 省略
3. $u(x,t) = \frac{1}{2}(e^{-(x+ct)^2} + e^{-(x-ct)^2} + t)$
4.

(a) $u(x,y,t) = \sin \pi x \sin piy \cos(\sqrt{2}\pi ct)$

(b) $u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi x \sin \sqrt{m^2+n^2}\pi ct$,

ただし $D_{mn} = \frac{4}{\sqrt{m^2+n^2}\pi c}\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\sin m\pi x \sin n\pi x dxdy$

7.3.3

1. $u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2}e^{-k(2m+1)^2\pi^2 t/4}$
2. $u(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2}e^{-k(2m+1)^2\pi^2 t/4}$
3. $10 + 80x$
4. 省略

Chap 8

8.1

1.

$$(a)\quad \mathcal{F}_s[f'(x)] = \int_0^\infty f'(x)\sin\omega x dx \left(\begin{array}{ll} u = \sin\omega x & dv = f'(x) \\ du = \omega\cos\omega x dx & v = f(x) \end{array}\right)$$
$$= f(x)\sin\omega x\,|_0^\infty - \omega\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$$
$$= -\omega\mathcal{F}_c[f(x)]$$

$$(b)\quad \mathcal{F}_c[f'(x)] = \int_0^\infty f'(x)\cos\omega x dx \left(\begin{array}{ll} u = \cos\omega x & dv = f'(x) \\ du = -\omega\sin\omega x dx & v = f(x) \end{array}\right)$$
$$= f(x)\cos\omega x\,|_{0+}^{\infty-} + \omega\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$$
$$= -f(0+) - \omega\mathcal{F}_s[f(x)]$$

2.

(a) $\mathcal{F}[f] = \frac{1}{i\omega}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = \frac{2}{\omega}\sinh\omega a$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega a\cos\omega x}{\omega}d\omega = \begin{cases} \pi, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$

(c) $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}$

3.

(a) $f(x) = \frac{2}{\pi x^2}(1-\cos x)$ (b) 省略

4. 省略

8.2

1. $u(x,t) = \frac{100}{\pi^2}\int_0^\infty(\frac{-4\omega\cos 4\omega + \sin 4\omega}{\omega^2})e^{-2\omega^2 t}\sin\omega x d\omega$
2. 省略
3. 省略
4. $u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-\omega y}e^{-i\omega x}d\omega$