複素関数論演習詳解

横田 壽

第 1 章

複素数

1.1 複素数と複素平面

練習問題 1.1

1. 複素平面上で点 $-3, 2i, 4+i, 2-2i$ を図示せよ.
2. 次の定理を証明せよ.

(a) $z_1 \bar{+} z_2 = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

(b) $z_1 \bar{z_2} = \bar{z_1}\bar{z_2}$

(c) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

3. 次の不等式を証明せよ.

(a) $Rez \leq |z|$

(b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(c) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

4. 次の複素数を極形式で表わせ.

(a) $-1+i$

(b) $3-\sqrt{3}i$

(c) -1

(d)　$2i$

5. 次の式を満たす点はどのような曲線を描くか.

(a)　$\arg z =$ 一定

(b)　$|z| =$ 一定

(c)　$|z-1| = |z-i|$

(d)　$|z-2i| = 3$

(e)　$|z+3| = 3|z-1|$

(f)　$z - \bar{z} = 2i$

1.2　ドゥモワブルの定理とオイラーの公式

練習問題 1.2

1. De Moivre の定理を証明せよ.
2. 次の複素数を簡単にせよ.

(a)　$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^7$

(b)　$(\sqrt{3}-i)^6$

(c)　$\frac{(1+\sqrt{3}i)^6}{(-1+i)^{10}}$

3. 次の方程式を解け.

(a)　$z^2 = i$

(b)　$z^3 = -1$

(c)　$z^4 = -1+\sqrt{3}i$

4. 次の値を $x+iy$ の形 (直交形式) で表わせ.

(a) $e^{i\frac{3}{4}\pi}$

(b) $e^{-i\frac{1}{6}\pi}$

(c) $e^{2+i\pi}$

(d) $e^{2-i\frac{3}{2}\pi}$

5. 次の複素数を $re^{i\theta}$ の形 (極形式) で表わせ.

(a) -2

(b) i

(c) $1+i$

(d) $\sqrt{3}-i$

(6) $|z|=1$ であるための必要十分条件は $z=e^{i\theta}$ の形に表わせることである．これを証明せよ.

第 2 章

複素関数

2.1 複素数の関数

練習問題 2.1

1. $w = z^2$ のとき，x, y を u, v の関数で表し，z 平面の実軸および虚軸に平行な w 平面のどのような曲線に写像されるかを調べよ.
2. 次の関数について u, v を x, y の関数で表せ.

(a) $w = z^3$

(b) $w = \frac{z}{z+1}$

(c) $w = \frac{z-i}{z+i}$

2.2 1 次関数

練習問題 2.2

1. $w = \frac{1}{z}$ による次の直線または円の像はどんな直線または円に写されるか.

(a) 単位円 $|z| = 1$ と 2 点 P,Q で交わる直線

(b) 単位円に 1 点 P で接する直線

(c) 3 点 a(実数)，i，$-i$ を通る円

2. 複素平面上で，次の 1 次変換による不変な点を求めよ.

(a)　$w = \frac{1}{z}$

(b)　$w = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$

2.3　初等関数

2.3.1　有理整関数

練習問題 2.3

1. 次の式を満たす複素数を求めよ.

(a)　$e^z = 1$
(b)　$e^z = i$
(c)　$e^z = -2$

2. 次の値を $u + iv$ の形で表せ.

(a)　$\sin 2i$
(b)　$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$
(c)　$\cos\left(\frac{\pi}{3} - i\right)$
(d)　$\tan\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right)$
(e)　$\sin(iy)$
(f)　$\cos(iy)$

3. 次の公式を証明せよ.

(a)　$1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}$
(b)　$\sin(-z) = -\sin z$
(c)　$\cos(-z) = \cos z$

4. $\sin z$ について次のことが成り立つことを示せ.

(a)　$\sin z$ は周期 2π を持つ

(5)　$\tan z$ の周期を求めよ.

2.4　初等関数の逆関数

練習問題 2.4

1. $z^{1/2}$ は 2 つの分岐を持つことを示せ.
2. 次の値を全て求めよ.

(a)　$\log 2$

(b)　$\log(-1)$

(c)　$\log i$

(d)　$\log(1+i)$

3.　次の値を $a+bi$ の形で表せ.

(a)　$(-1)^i$

(b)　i^i

(c)　2^i

(d)　2^{1+i}

4.　次の公式を証明せよ.

(a)　$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right)$

(b)　$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$

(5)　次の値を求めよ.

(a)　$\cos^{-1} 1$

(b)　$\sin^{-1} 2$

(c)　$\cos^{-1} i$

第 3 章

正則関数

練習問題 3.1

1. 次の点集合は領域であるかどうか調べよ.

(a) z 平面から原点 O を除いた集合

(b) $\{z : \Re z > 0\}$

(c) $\{z : \Im z \geq 0\}$

(d) $\{z : 1 < |z| < 2\}$

2. 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{z \to i}(z^2 + 2z)$

(b) $\displaystyle\lim_{z \to \frac{i}{2}} \frac{(2z-3)(z+i)}{(iz-1)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{z \to 1+i} \frac{z-1-i}{z^2-2z+2}$

(d) $\displaystyle\lim_{z \to e^{i\pi/4}} \frac{z^2}{z^4+z+1}$

3. 次の関数が連続でない点を求めよ.

(a) z^2

(b) e^z

(c) $\frac{2z}{z+i}$

(d) $\frac{2z-3}{z^2+2z+2}$

(e) $\frac{z+1}{z^4+1}$

(f) $\frac{z^2+4}{z-2i}$

(g) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i} & (z \neq 2i) \\ 4i & (z = 2i) \end{cases}$

3.1 正則関数 (analytic function,holomorphic function)

3.1.1 微分係数と導関数

練習問題 3.2

1. 次の関数を微分せよ.

(a) $z^3 - 2z^2 + 3z$

(b) $(z^2 + i)^3$

(c) $\frac{z-i}{z+i}$

2. 次の関数を微分せよ.

(a) $tanz$

(b) $\dfrac{1}{\cos z}$

(c) $\sqrt{z^2 + 1}$

(d) $\sin^2 z$

(e) $\log(z^2 + 4i)$

(f) $i^{\cos z}$

(g) $\sin^{-1}(z - i)$

(h) $\log(z + \sqrt{z^2 + 1})$

(i) $\log(\sin^{-1} z)$

(j) z^z

3. $z = x + iy$ とするとき，次の関数の正則性を調べ，正則ならばその導関数を求めよ.

(a) $x - iy$

(b) $x^2 - y^2 + 2ixy$

(c) $(x^2 - y^2 - 3x + 2) + i(2xy - 3y)$

(d) $\dfrac{x + iy}{x^2 + y^2}$

第 4 章

複素積分

4.1 線積分とグリーンの定理

練習問題 4.1

1. 次の線積分を求めよ.

(a) $\int_c ydx,\ C : y = 1 - x,\ 0 \leq x \leq 1$
(b) $\int_c x^2dy,\ C : y = 1 - x,\ 0 \leq x \leq 1$
(c) $\int_c (xydx - y^2dy),\ C : y = x^2,\ -1 \leq x \leq 1$
(d) $\int_c (xydx - x^3dy),\ C : x = \cos\theta, y = \sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

2. 媒介変数 t に関する次の線積分を求めよ.

(a) $\int_c (x^2 + y)dt,\ C : x = \sqrt{t}, y = 1 - t^2,\ 0 \leq t \leq 1$
(b) $\int_c xy^2dt,\ C : x = \sin t, y = \sin^2 t,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

3. Green の定理を用いて次の線積分の値を求めよ.

(a) $\int_c (x^2ydx - xy^2dy),\ C$: 単位円周
(b) $\int_c (ydx + 2xdy),\ C$: 第 1 象限にある四分円の周

4.2 複素積分

練習問題 4.2

1 単位円を 1 周する曲線 C に沿って $\int_C z\cos zdz$ を求めよ.
2 関数 $\bar{z}$ を点 $0, 1, 1+i, i$ を頂点とする正方形の辺および対角線に沿って 0 から $1+i$ まで積分せよ.

4.3　コーシーの積分定理

練習問題 4.3

1.　次の定理を証明せよ.

(a)　関数 $f(z)$ が領域 D で正則であり，2 点 a, b を結ぶ 2 つの曲線 C_1, C_2 が D 内にあり，かつ C_1, C_2 で囲まれた領域が D 内にあれば,

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_{c_2} f(z)dz$$

である.

(b)　2 つの単一閉曲線 C_1, C_2 で囲まれた領域 D で $f(z)$ が正則ならば,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

2.　次の関数を，示された閉曲線に沿って積分せよ.

(a)　$\frac{1}{z^2+1}$，C : 原点を中心とし，半径 $r > 1$ の円周

(b)　$\frac{z}{(2z+i)(z-2)}$，C : 単位円

(c)　$\frac{1}{z^4}$，C : 原点を中心とし，半径 $r > 1$ の円の上半円周と，実軸上の直径

3.　次の積分を求めよ．積分路は下端と上端を結ぶ線分とする.

(a)　$\int_i^1 z^2 \ dz$

(b)　$\int_0^i ze^z \ dz$

(c)　$\int_0^{1+i} \frac{z}{z+1} \ dz$

(d)　$\int_0^i \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \ dz$

4.　次の関数が調和関数であることを証明し，それを実部にもつような正則関数を作れ.

(a)　$u = x^2 - y^2$

(b)　$u = e^x \cos y$

(c)　$u = \cos x \sinh y$

(d)　$u = \frac{1}{2} \log_e(x^2 + y^2)$

4.4　コーシーの積分表示

練習問題 4.4

1.　次の定理を証明せよ.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\ dx\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

2. 次の積分を求めよ.

(a)　$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2}\ dz$
(b)　$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2}\ dz$
(c)　$\int_{|z|=3} \frac{\sin^2 z}{z}\ dz$
(d)　$\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{2z-\pi i}\ dz$
(e)　$\int_{|z|=1} \frac{e^{3z}}{2z-\pi i}\ dz$
(f)　$\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2+1}\ dz$
(g)　$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\ dz$
(h)　$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(2z-\pi)^3}\ dz$
(i)　$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{(2z-\pi)^3}\ dz$

第 5 章

展開と留数

5.1 ローラン展開

練習問題 5.1

1. 関数 $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$ に付いて次の各領域の点について，原点を中心としたローラン展開せよ

(a) $|z| < 1$
(b) $a < |z| < 2$
(c) $|z| > 2$

2. 次の関数を，[ ] 内の点を中心としてローラン展開せよ．また，その中心はどのような特異点か．

(a) $\frac{1}{z^3(z+1)}$ $[z = 0]$
(b) $\frac{z^3}{(z+1)}$ $[z = -1]$
(c) $\frac{e^{z^2}}{z^3}$ $[z = 0]$
(d) $\frac{\sin z}{z-\pi}$ $[z = \pi]$

5.2 留数

練習問題 5.2

1. 次の関数の特異点における留数を求めよ．

(a) $\frac{1}{z(z-1)^2}$
(b) $\frac{z}{(2z+1)(z-2)}$
(c) $\frac{1}{\sin z}$
(d) $\frac{e^z}{(z-1)(z+2)^2}$

2. 次の積分を求めよ.

(a) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)^2}$
(b) $\int_{|z|=1} \frac{z}{(2z+1)(z-2)}\ dz$
(c) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin z}$
(d) $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)(z+2)^2}\ dz$

3. $\frac{e^{2z}}{z^2(z^2+2z+2)}$ を次の曲線に沿って積分せよ.

(a) $|z| = 1$
(b) $|z - i| = 2$
(c) $|z| = 3$

5.3 実積分への応用

練習問題 5.3

1. 次の関数の特異点における留数を求めよ (m は正の実数).

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\ dx$
(b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx$
(c) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}\ d\theta$
(d) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\sin\theta)^2}\ d\theta$
(e) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\ dx$
(f) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin mx}{x^2+1}\ dx$
(g) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}\ dx$
(h) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos mx}{x^2}\ dx$

2. 次の積分を [ ] 内に示された複素積分によって求めよ (a は正の定数).

(a) $\int_0^{\infty} \frac{\log_e x}{x^2+a^2}\ dx$ [$\int_c \frac{\log z}{z^2+a^2}\ dz$, C は図 19.5
(b) $\int_0^{\infty} \frac{(\log_e x)^2}{(x+a)^3}\ dx$ [$\int_c \frac{(\log z)^3}{(z+a)^2}\ dz$, C は図 19.7

付録 A

演習問題詳解

1.1 複素数と複素平面

1.

2.

(a) $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とおくと,

$$\begin{aligned} z_1 \bar{+} z_2 &= x_1 + iy_1 \bar{+} x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \\ &= x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \bar{z_1} + \bar{z_2} \end{aligned}$$

(b) $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とおくと,

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 &= (x_1 + iy_1)\bar{(}x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \bar{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= \bar{z_1}\bar{z_2} \end{aligned}$$

(c) $z = x + iy$ とおくと,

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{x + iy + x - iy}{2} = x = Rez$$

3.

(a)

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2} \leq \frac{|z| + |z|}{2} = |z|$$

(b) 距離が絡んだら 2 乗を考える.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)z_1 \bar{+} z_2 = |z_1|^2 + z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\Re z_1\bar{z_2} + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

両辺の平方根をとると $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(c) $\Re z \leq |z|$ より $-|z| \leq -\Re z$ に注意する．

$$||z_1| - |z_2||^2 = |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 - 2\Re z_1 \bar{z_2} + |z_2|^2 \leq |z_1 - z_2|^2$$

したがって，$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

4.

(a) 直交形式から極形式は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ただし，$-\pi < \theta \leq pi$.

$-1 + i$ を極形式に変換するには，$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ と $\theta = \tan^{-1} -1 = -\frac{\pi}{4}$ を求めればよい．これより

$$-1 + i = \sqrt{2}e^{-pii/4}$$

(b) 直交形式から極形式は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ただし，$-\pi < \theta \leq pi$.

$3 - \sqrt{3}i$ を極形式に変換するには，$r = \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ と $\theta = \tan^{-\sqrt{3}} 3 = -\frac{\pi}{6}$ を求めればよい．これより

$$3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{-pii/6}$$

(c) 直交形式から極形式は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ただし，$-\pi < \theta \leq pi$.

$$-1 = -1 + 0i = e^{pi}$$

(d) 直交形式から極形式は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ただし，$-\pi < \theta \leq pi$.

$$2i = 0 + 2i = 2e^{pi/2}$$

5.

(a) $\arg z$ とは x 軸と原点から点 z に引いた直線のなす角である．よってこれが一定ということは，点 z の集まりは原点から x 軸と一定の角をなす点となるので，直線である．

別解　$\arg z =$ 一定 とはある定数 c で $\tan^{-1}(y/x) = c$ のことである．よって $\frac{y}{x} = \tan c$ より $y = \tan cx$ つまり，原点から放たれた直線である．

(b) $|z| =$ 一定 とは原点からの距離が一定のことである．したがって円を描く．

別解　$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ より $|z| =$ 一定 ならば，$\sqrt{x^2 + y^2} = c$．よって $x^2 + y^2 = c^2$ で円.

(c) $|z - 1|$ とは点 1 からの距離．また，$|z - i|$ とは点 i からの距離．この 2 つが等しい点の集まりは，点 1 と点 i を通る垂直 2 等分線である．

別解　$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $|z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ より $|z-1| = |z-i|$ を書き直すと

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

これより

$$(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow y = x$$

(d) $|z - 2i|$ とは点 2i からの距離．よって $|z - 2i| = 3$ は中心 $2i$ で半径が 3 の円を描く．

別解　$|z-2i| = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$ より $|z-2i|=3$ を書き直すと

$$x^2+(y-2)^2=3^2$$

これより中心 $2i$ で半径が 3 の円であることが分かる．

(e)　$|z+3|$ とは $|z-(-3)|$ のことであるから点 (-3) からの距離．$|z-1|$ は点 1 からの距離．よって $|z+3|=3|z-1|$ は点-3 からの距離が点 1 からの距離の 3 倍になっている点 z の集まり．このような点は点-3 と点 1 を結ぶ直線を 3:1 に内分する点と外分する点を直径とする円を描く．この円を**アポロニウスの円**という．

別解　$|z+3| = \sqrt{(x+3)^2+y^2}$，$3|z-1| = 3\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ より $|z+3|=3|z-1|$ を書き直すと

$$(x+3)^2+y^2=9[(x-1)^2+y^2]$$

この式を整理すると

$$8x^2-18x+8y^2=0$$

または,

$$8[(x-\frac{9}{8})^2+y^2]=\frac{81}{8}$$

よって中心 $\frac{9}{8}$ で半径が $\frac{9}{2\sqrt{2}}$ の円であることが分かる．

1.2 ドゥモワブルの定理とオイラーの公式

1.

オイラーの公式より $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$．これより全ての実数 n に対して

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

が成り立つ．

2.

(a)　累乗を含んでいる場合，括弧の中を一度極形式に直すとよい．

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

より $r=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1, \theta=\tan^{-1}-1=-\frac{\pi}{4}$．したがって

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}=e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

これより

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^7 &= (e^{-\frac{\pi}{4}i})^7=e^{-\frac{7\pi}{4}i}=e^{\frac{\pi}{4}i}\\ &= \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(b) 累乗を含んでいる場合，括弧の中を一度極形式に直すとよい.

$$\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

これより

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^6&=(2e^{-\frac{\pi}{6}i})^6=64e^{-\pi i}\\&=64[\cos\pi-i\sin\pi]=-64\end{aligned}$$

(c) 累乗を含んでいる場合，括弧の中を一度極形式に直すとよい.

$$\begin{aligned}\frac{(1+\sqrt{3}i)^6}{(-1+i)^{10}}&=\frac{(2e^{\pi i/3})^6}{(\sqrt{2}e^{3\pi i/4})^{10}}\\&=\frac{2^6e^{2\pi i}}{2^5e^{15\pi i/2}}=2e^{2\pi i-15\pi i/2}=2e^{-11\pi i/2}=2e^{\pi i/2}=2i\end{aligned}$$

3.

(a) 2 項方程式の根の公式を利用する

$z^2=i=e^{\pi i/2}$ から根は $\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{2}$ $(k=0,1)$

(b) 2 項方程式の根の公式を利用する

$z^3=-1=e^{\pi i}$ から根は $\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}$ $(k=0,1,2)$

(c) 2 項方程式の根の公式を利用する

$z^4=-1+\sqrt{3}i=2e^{2\pi i/3}$ から根は $2^{1/4}[\cos\frac{2\pi/3+2k\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi/3+2k\pi}{4}]$ $(k=0,1,2,3)$

4.

(a) 極形式を直交形式に直すには，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を用いればよい.

$$e^{i\frac{3}{4}\pi}=\cos 3\pi/4+i\sin 3\pi/4=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$$

(b) 極形式を直交形式に直すには，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を用いればよい.

$$e^{-i\frac{1}{6}\pi}=\cos\pi/6-i\sin\pi/6=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

(c) 極形式を直交形式に直すには，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を用いればよい.

$$e^{2+i\pi}=e^2e^{i\pi}=e^2[\cos\pi+i\sin\pi]=-e^2$$

(d) 極形式を直交形式に直すには，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を用いればよい.

$$e^{2-i\frac{3}{2}\pi}=e^2e^{-i\frac{3}{2}\pi}=e^2[\cos 3\pi/2-i\sin 3\pi/2]=e^2i$$

5.

(a) 直交形式を極形式に直すには $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ただし，$-\pi<\theta\leq\pi$.

$$-2 = -2 + 0i = \sqrt{2^2 + 0^2}e^{\pi i} = 2e^{\pi i}$$

(b) 直交形式を極形式に直すには $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ただし，$-\pi < \theta \leq \pi$.

$$i = 0 + i = \sqrt{0 + 1^2}e^{\pi i/2} = e^{\pi i/2}i$$

(c) 直交形式を極形式に直すには $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ただし，$-\pi < \theta \leq \pi$.

$$1 + i = \sqrt{1^2 + 1^2}e^{\pi i/4} = \sqrt{2}e^{\pi i/2}$$

(d) 直交形式を極形式に直すには $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ただし，$-\pi < \theta \leq \pi$.

$$\sqrt{3} - i = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}e^{-\pi i/6} = 2e^{-\pi i/6}$$

6. まず，$|z| = 1$ ならば $z = e^{i\theta}$ であることを示す.
$z = re^{\theta}$ とおくと，$|z| = 1$ より

$$|re^{i\theta}| = |r||e^{i\theta}| = |r| = 1$$

$r \geq 0$ より $r = 1$ となり $z = e^{\theta}$ であることが示せた.
次に，$z = e^{i\theta}$ ならば，$|z| = 1$ を示す.

$$|z| = |e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos\theta^2 + \sin\theta^2} = 1$$

2.1 複素数の関数

1. $z = x + iy$，$w = u + iv$ より $w = z^2$ を計算すると

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy) = u + iv$$

これより $u = x^2 - y^2$，$v = 2xy$ となる．次に，この式を x, y について解く．$v = 2xy$ より $y = \frac{v}{2x}$．これを $u = x^2 - y^2$ に代入すると

$$u = x^2 - (\frac{v}{2x})^2 = x^2 - \frac{v^2}{4x^2}$$

両辺を $4x^2$ 倍すると

$$4x^4 - 4x^2u - v^2 = 0$$

これは x^2 についての 2 次式と考えることができる．つまり $x^2 = X$ とおく．よって，解の公式から

$$x^2 = \frac{2u \pm \sqrt{4u^2 + 4v^2}}{4} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$$

ここで，x は実部であることに注意すると，

$$x^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$$

これより

$$x = \pm\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$$

を得る．次に y を求める．$u = x^2 - y^2$ より

$$y^2 = x^2 - u = \frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2} - u = \frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$$

よって

$$y = \pm\sqrt{\frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$$

次に z 平面の実軸に平行な直線 $y = \pm b$ $(b > 0)$ がどんな曲線に写されるか考える．上の式から $y = \pm b$ は

$$y = \pm b = \pm\sqrt{\frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$$

を満たす．よって

$$b^2 = \frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$$

となり $v^2 = 4b^2(b^2 + u)$ という放物線に写される．

同様に，z 平面の虚軸に平行な直線 $x = \pm a$ $(a > 0)$ は

$$x = \pm a = \pm\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$$

を満たす．よって

$$a^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$$

となり $v^2 = 4a^2(a^2 - u)$ という放物線に写される．

2.

(a)　$z = x + iy$，$w = u + iv$ とおくと

$$u + iv = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

より $u = x^3 - 3xy^2$，$v = 3x^2y - y^3$.

(b)　$z = x + iy$，$w = u + iv$ とおくと

$$u + iv = \frac{z}{z + 1} = \frac{z(\bar{z} + 1)}{|z + 1|^2} = \frac{|z|^2 + z}{|z + 1|^2}$$

ここで，$|z|^2 = x^2 + y^2$ に注意すると

$$u + iv = \frac{x^2 + y^2 + x + iy}{(x+1)^2 + y^2}$$

したがって，$u = \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$，$v = \frac{y}{(x+1)^2+y^2}$.

(c) $z = x + iy$，$w = u + iv$ とおくと

$$u + iv = \frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)(z-i)}{|z+i|^2} = \frac{(x+i(y-1))^2}{|z+i|^2}$$

ここで，$|z+i|^2 = x^2 + (y+1)^2$ に注意すると

$$u + iv = \frac{x^2 - (y-1)^2 + 2ix(y-1)}{x^2 + (y+1)^2}$$

したがって，$u = \frac{x^2-(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}$，$v = \frac{2x(y-1)}{x^2+(y+1)^2}$.

１次関数

1.

(a) $w = \frac{1}{z}$ は単位円 $|z| = 1$ に関して，点 z を反転して z_1 をとり，さらに実軸に関して z_1 を対称変換する．

2 点 P，Q は単位円上にあるので，$w = \frac{1}{z}$ によって実軸に関して対称な点 P',Q' に写る．また，直線の無限遠点は原点に写る．さらに $w = \frac{1}{z}$ は円円対応であることから，この直線は原点，P'，Q' を通る円に写される．

(b) $w = \frac{1}{z}$ は単位円 $|z| = 1$ に関して，点 z を反転して z_1 をとり，さらに実軸に関して z_1 を対称変換する．

点 P は単位円上にあるので，$w = \frac{1}{z}$ によって実軸に関して対称な点 P' に写る．また，直線の無限遠点は原点に写る．さらに $w = \frac{1}{z}$ は円円対応であることから，この直線は原点と P' を直径とする円に写される．

(c) $w = \frac{1}{z}$ は単位円 $|z| = 1$ に関して，点 z を反転して z_1 をとり，さらに実軸に関して z_1 を対称変換する．

点 a は $\frac{1}{a}$ に，点 i は $\frac{1}{i}$ に，点 $-i$ は $\frac{1}{-i}$ にそれぞれ写される．さらに $w = \frac{1}{z}$ は円円対応であることから，3 点 $a, i, -i$ を通る円は 3 点 $\frac{1}{a}, \frac{1}{i}, \frac{1}{-i}$ を通る円に写される．

2.

(a) 不変な点とは $f(z) = z$ を満たす点のことである．

$w = \frac{1}{z} = z$ とおくと $z^2 = 1$．したがって， 2 項方程式の根の公式を利用すると

$z^2 = 1 = e^0$ から根は $\cos\frac{0+2k\pi}{2} + i\sin\frac{0+2k\pi}{2}$ $(k = 0, 1)$．つまり ± 1.

(b) 不変な点とは $f(z) = z$ を満たす点のことである．

$w = \frac{az+b}{cz+d} = z$ とおくと $cz^2 + dz = az + b$．書き直すと

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

したがって，

$$z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$$

2.3 初等関数

1.

(a)　この段階では $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ を用いる．

$e^z = 1$ より $e^x(\cos y + i \sin y) = 1$．ここで，複素数が等しいのは実部と虚部どうしが等しいことであることに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases}$$

ここで，$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ であることに注意すると

$$e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} = 1$$

よって $2x = 0$．つまり $x = 0$ となる．これを上の連立方程式に代入すると $\cos y = 1,\ \sin y = 0$ となり，これより $y = 2n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を得る．よって求める z は

$$z = x + iy = 2n\pi i$$

(b)　この段階では $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ を用いる．

$e^z = i$ より $e^x(\cos y + i \sin y) = i$．ここで，複素数が等しいのは実部と虚部どうしが等しいことであることに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} e^x \cos y = 0 \\ e^x \sin y = 1 \end{cases}$$

ここで，$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ であることに注意すると

$$e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} = 1$$

よって $2x = 0$．つまり $x = 0$ となる．これを上の連立方程式に代入すると $\cos y = 0,\ \sin y = 1$ となり，これより $y = \frac{1}{2} + 2n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を得る．よって求める z は

$$z = x + iy = (\frac{1}{2} + 2n\pi)i$$

(c)　この段階では $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ を用いる．

$e^z = -2$ より $e^x(\cos y + i \sin y) = -2$．ここで，複素数が等しいのは実部と虚部どうしが等しいことであることに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} e^x \cos y = -2 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases}$$

ここで，$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ であることに注意すると

$$e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} = 4$$

よって $2x = \log 4$．つまり $x = \log 2$ となる．これを上の連立方程式に代入すると $\cos y = -1$, $\sin y = 0$ となり，これより $y = \pi + 2n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を得る．よって求める z は

$$z = x + iy = \log 2 + (\pi + 2n\pi)i$$

(a) 三角関数はいったん指数関数を用いて書き直す．その後極形式を直交形式に直せばよい．
$\sin 2i$ を指数関数を用いて表すと

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

より

$$\sin 2i = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = i\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}$$

(b) 加法定理を使って簡単にする．

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right) &= \sin\frac{\pi}{2}\cos i + \cos\frac{\pi}{2}\sin i \\ &= \cos i = \frac{e^{-1} + e}{2}\end{aligned}$$

(c) 加法定理を使って簡単にする．

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3} - i\right) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos i + \sin\frac{\pi}{3}\sin i \\ &= \frac{1}{2}\cos i + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin i \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-1} + e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-1} - e}{2i} & \\ &= \frac{e^{-1} + e}{4} - i\frac{\sqrt{3}(e - e^{-1})}{4}\end{aligned}$$

(d) $tanz = \frac{\sin z}{\cos z}$

$$
\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{6}+2i\right) &= \frac{\sin\frac{\pi}{6}+2i}{\cos\frac{\pi}{6}+2i} \\
&= \frac{\sin\frac{\pi}{6}\cos 2i+\cos\frac{\pi}{6}\sin 2i}{\cos\frac{\pi}{6}\cos 2i-\sin\frac{\pi}{6}\sin 2i} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}} \\
&= \frac{e^{-2}+e^{2}+i\sqrt{3}(e^{2}-e^{-2})}{\sqrt{3}(e^{-2}+e^{2})-i(e^{2}-e^{-2})} \\
&= \frac{(e^{-2}+e^{2}+i\sqrt{3}(e^{2}-e^{-2}))(\sqrt{3}(e^{-2}+e^{2})+i(e^{2}-e^{-2}))}{(\sqrt{3}(e^{-2}+e^{2})-i(e^{2}-e^{-2}))(\sqrt{3}(e^{-2}+e^{2})+i(e^{2}-e^{-2}))} \\
&= \frac{\sqrt{3}(e^{-4}+2+e^{4})-\sqrt{3}(e^{4}-2+e^{-4})+3i(e^{4}-e^{-4})+i(e^{4}-e^{-4})}{3(e^{-4}+2+e^{4})+e^{4}-2+e^{-4}} \\
&= \frac{4\sqrt{3}+4i(e^{4}-e^{-4})}{4e^{-4}+4+e^{4}} = \frac{\sqrt{3}+i(e^{4}-e^{-4})}{e^{4}+1+e^{-4}}
\end{aligned}
$$

(e)

$$\sin iy = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

(e)

$$\cos iy = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$

3.

(a) 基本となるのは $\cos^2 z+\sin^2 z=1$ です.

$\cos^2 z+\sin^2 z=1$ の両辺を $\cos^2 z$ で割ると

$$\frac{\cos^2 z}{\cos^2 z}+\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}=\frac{1}{\cos^2 z}$$

よって

$$1+\tan^2 z=\frac{1}{\cos^2 z}$$

(b)

$$\sin(-z)=\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}=-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z$$

(c)

$$\cos(-z)=\frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$$

4.

(a) $f(z+c) = f(z)$ を満たす c のうち $|c|$ が最小のものを関数 $f(z)$ の周期という．また，$e^{(z+2i\pi)} = e^z$ であることに注意する．

$\sin(z+c) = \sin z$ とおいて c の値を求める．

$\sin(z+c) = \frac{e^{i(z+c)} - e^{-i(z+c)}}{2i}$ より，$\sin(z+c) = \sin z$ おくと

$$\begin{aligned} e^{i(z+c)} - e^{-i(z+c)} &= e^{iz} - e^{-iz} \\ e^{i(z+c)} - e^{iz} &= -e^{-i(z+c)}e^{-iz}(e^{i(z+c)} - e^{iz}) \end{aligned}$$

ここで両辺をよく見ると $e^{i(z+c)} - e^{iz}$ が共通項であることが分かる．したがって，

$$(e^{i(z+c)} - e^{iz})(1 + e^{-i(z+c)}e^{-iz}) = 0$$

よって

$$e^{i(z+c)} = e^{iz} \text{ または } e^{i(z+c)} = -e^{-iz}$$

ここで指数関数の周期は $2\pi i$ であることを用いると，$e^{ic} = 1$ より $c = 2n\pi$．また，$e^{i(z+c)} = -e^{-iz}$ より $z + c = -z + n\pi$

5.

(a) $\tan z_1 = \tan z_2$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\sin z_1}{\cos z_1} &= \frac{\sin z_2}{\cos z_2} \\ \frac{\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i}}{\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2}} &= \frac{\frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}}{\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2}} \\ \frac{i(e^{-iz_1} - e^{iz_1})}{e^{iz_1} + e^{-iz_1}} &= \frac{i(e^{-iz_2} - e^{iz_2})}{e^{iz_2} + e^{-iz_2}} \\ \frac{i(1 - e^{2iz_1})}{e^{2iz_1} + 1} &= \frac{i(1 - e^{iz_2}}{e^{2iz_2} + 1} \\ (1 - e^{2iz_1})(e^{2iz_2} + 1) &= (e^{2iz_1} + 1)(1 - e^{2iz_2}) \\ e^{2iz_2} - e^{2iz_1}e^{2iz_2} - e^{2iz_1} + 1 &= e^{2iz_1} - e^{2iz_1}e^{2iz_2} - e^{2iz_2} + 1 \\ e^{2iz_2} &= e^{2iz_1} \end{aligned}$$

これより $z_2 = z_1 + n\pi$．したがって，$\tan z$ は周期 π を持つ．

2.4 初等関数の逆関数

1. $w = \sqrt{z} = z^{1/2}$ とは $w = z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i(\theta+2n\pi)/2}$ を表す．したがって 2 価関数である．ここで，$z = re^{i\theta}$ とすると

$$w_1 = \sqrt{r}e^{i\theta/2},\ w_2 = \sqrt{r}e^{(\theta+2\pi)i/2} = -w_1$$

2.

(a) $\log z = \log_e r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を用いる．

$$\log 2 = \log_e 2 + i(0 + 2n\pi) = \log_e 2 + 2n\pi$$

(b) $\log z = \log_e r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を用いる.

$$\log(-1) = \log_e |-1| + i(\pi + 2n\pi) = i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i$$

(c) $\log z = \log_e r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を用いる.

$$\log i = \log_e |i| + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = (2n + \frac{1}{2})\pi i$$

(d) $\log z = \log_e r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を用いる.

$$\log(1+i) = \log_e |1+i| + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi) = \log_e \sqrt{2} + (2n + \frac{1}{4})\pi i$$

3.

(a) $a^z = e^{z \log a}$ を用いる.

$$(-1)^i = e^{i \log(-1)} = e^{i[\log_e |-1| + i(\pi + 2n\pi)]} = e^{-(2n+1)\pi}$$

(b) $a^z = e^{z \log a}$ を用いる.

$$(i)^i = e^{i \log(i)} = e^{i[\log_e |i| + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)]} = e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi}$$

(c) $a^z = e^{z \log a}$ を用いる.

$$\begin{aligned}(2)^i &= e^{i \log(2)} = e^{i[\log_e |2| + i(0 + 2n\pi)]} \\ &= e^{i[\log_e |2|} e^{-2n\pi} \\ &= e^{-2n\pi}[\cos(\log_e 2) + i \sin(\log_e 2)]\end{aligned}$$

(d) $a^z = e^{z \log a}$ を用いる.

$$\begin{aligned}(2)^{1+i} &= 2 \cdot 2^i = 2e^{i \log(2)} = 2e^{i[\log_e |2| + i(0 + 2n\pi)]} \\ &= 2e^{i[\log_e |2|} e^{-2n\pi} \\ &= 2e^{-2n\pi}[\cos(\log_e 2) + i \sin(\log_e 2)]\end{aligned}$$

4.

(a) $\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \log(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$ を示す.

$\sin^{-1} z = w$ とおくと $z = \sin w$. ここで複素関数 $\sin w$ は指数関数を用いて定義されていることに注意すると,

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

この式を w について解けばよい.

$$\begin{aligned}
2iz &= e^{iw} - e^{-iw} \Rightarrow \\
2ize^{iw} &= (e^{iw})^2 - 1 \Rightarrow \\
0 &= (e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 \Rightarrow \\
e^{iw} &= iz \pm \sqrt{(iz)^2 + 1} \Rightarrow \\
iw &= \log(iz \pm \sqrt{(iz)^2 + 1}) \Rightarrow \\
w &= \frac{1}{i}\log(iz \pm \sqrt{(iz)^2 + 1})
\end{aligned}$$

注意 $\sqrt{(iz)^2+1}$ は 2 価性によって根号の前に $\pm$ のついた 2 つの分枝を同時に表しているものとすれば, $+$ だけでよい.

(b) $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$ を示す.

$\tan^{-1} z = w$ とおくと $z = \tan w$. ここで複素関数 $\tan w$ は指数関数を用いて定義されていることに注意すると,

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

この式を w について解けばよい.

$$\begin{aligned}
iz(e^{iw} + e^{-iw}) &= e^{iw} - e^{-iw} \Rightarrow \\
iz((e^{iw})^2 + 1) &= (e^{iw})^2 - 1 \Rightarrow \\
iz + 1 &= (1 - iz)(e^{iw})^2 \Rightarrow \\
(e^{iw})^2 &= \frac{1 + iz}{1 - iz} \Rightarrow \\
e^{iw} &= \sqrt{\frac{1 + iz}{1 - iz}} \Rightarrow \\
iw &= \log(\sqrt{\frac{1 + iz}{1 - iz}}) \Rightarrow \\
w &= \frac{1}{2i}\log(\frac{1 + iz}{1 - iz})
\end{aligned}$$

5.

(a) $\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\log(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$ を用いる.

$$\cos^{-1}(1) = \frac{1}{i}\log(1 \pm \sqrt{1^2 - 1}) = \frac{1}{i}(\log_e(1) + i(2n\pi)) = 2n\pi$$

別解 $w = \cos^{-1}(1)$ とおくと $1 = \cos w = \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$ これを w について解くと

$$\begin{aligned}
(e^{iw})^2 - 2e^{iw} + 1 = 0 \ &\Rightarrow \\
e^{iw} = 1 \ &\Rightarrow \\
iw = \log(1) = \log_e 1 + i(2n\pi) \ &\Rightarrow \\
w = 2n\pi
\end{aligned}$$

(b) $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\log(iz \pm \sqrt{1-z^2})$ を用いる．

注意

$$\log_e(2-\sqrt{3}) = \log_e(\frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \log(\frac{1}{2+\sqrt{3}}) = -\log(2+\sqrt{3})$$

より

$$\log_e(2 \pm \sqrt{3}) = \pm \log_e(2+\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned}
\sin^{-1}(2) &= \frac{1}{i}\log(2i \pm \sqrt{1-4}) \\
&= \frac{1}{i}\log(2i \pm i\sqrt{3}) = \frac{1}{i}\log(i(2 \pm \sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{i}(\log(i) + \log(2 \pm \sqrt{3})) = \frac{1}{i}[i(2n+\frac{1}{2})\pi + \log_e(2 \pm \sqrt{3}) + i(2n\pi)] \\
&= 2n\pi \pm i\log_e(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

(c) $\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\log(z \pm \sqrt{z^2-1})$ を用いる．

$$\begin{aligned}
\cos^{-1}(i) &= \frac{1}{i}\log(i \pm \sqrt{i^2-1}) = \frac{1}{i}\log(i(1 \pm \sqrt{2})) \\
&= \frac{1}{i}(\log i + \log(1 \pm \sqrt{2}))
\end{aligned}$$

ここで

$$\log(1 \pm \sqrt{2}) = \begin{cases} \log_e(1+\sqrt{2}) + i(2n\pi) \\ \log_e(\sqrt{2}-1) + i(\pi + 2n\pi) \end{cases}$$

に注意すると

$$\cos^{-1}(i) = \begin{cases} -i[(2n+\frac{1}{2})\pi + \log_e(1+\sqrt{2})] \\ -i[(2n+\frac{3}{2})\pi + \log_e(\sqrt{2}-1)] \end{cases}$$

極限と連続

1.

集合 D が領域とよばれるには次の 2 つを満たす必要がある．

1　$z_0 \in D$ のとき $z \in N(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\} \subset D$ (開集合)

2　$z_1, z_2 \in D$ のとき z_1と z_2を D に含まれる連続な曲線で結べる．(弧状連結性)

注意 $N(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ を点 z_0 の δ 近傍という．

(a) D を z 平面から原点 O を除いた集合とする．

1. 原点以外の点 z_0 を選び，z_0 と原点までの距離の半分 $|z_0|/2$ を δ とすれば，δ 近傍 $N(z_0, \delta)$ は D に含まれる．したがって D は開集合．

2. D 内のいかなる 2 点を選んでも D に含まれる連続な曲線で結ぶことができるので，弧状連結性が満たされる．

したがって，D は領域

(b) $D = \{z : \Re z > 0\}$ とする．

1. 原点以外の点 z_0 を選び，z_0 と虚軸までの距離の半分を δ とすれば，δ 近傍 $N(z_0, \delta)$ は D に含まれる．したがって D は開集合．

2. D 内のいかなる 2 点を選んでも D に含まれる連続な曲線で結ぶことができるので，弧状連結性が満たされる．

したがって，D は領域

(c) $D = \{z : \Im z \geq 0\}$ とする．

1. 実軸上に点 z_0 を選ぶと，どんな δ 近傍 $N(z_0, \delta)$ も D 以外の点を含むので開集合ではない．しかし，$\{z : \Im z = 0\}$ 内のどの点を選んでも，その点の δ 近傍は D に属する点と属さない点の両方を含む．このような点の集まりを D の**境界**という． したがって，D は閉集合である．

2. D 内のいかなる 2 点を選んでも D に含まれる連続な曲線で結ぶことができるので，弧状連結性が満たされる．

したがって，D は閉領域である．

(d) $\{z : 1 < |z| < 2\}$ とする．

1. 原点以外の点 z_0 を選び，z_0 と $|z| = 1$ または $|z| = 2$ までの距離短い方の半分を δ とすれば，δ 近傍 $N(z_0, \delta)$ は D に含まれる．したがって D は開集合．

2. D 内のいかなる 2 点を選んでも D に含まれる連続な曲線で結ぶことができるので，弧状連結性が満たされる．

したがって，D は領域

2.

(a)

$$\lim_{z \to i}(z^2 + 2z) = i^2 + 2i = 2i - 1$$

(b)

$$\lim_{z \to \frac{i}{2}} \frac{(2z-3)(z+i)}{(iz-1)^2} = \frac{(i-3)(\frac{3i}{2})}{(-\frac{3}{2})^2} = -\frac{2}{3}(1+3i)$$

(c)

$$\lim_{z \to 1+i} \frac{z-1-i}{z^2-2z+2} = \lim_{z \to 1+i} \frac{z-(1+i)}{(z-(1-i))(z-(1+i))} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

(d)

$$\lim_{z \to e^{i\pi/4}} \frac{z^2}{z^4+z+1} = \frac{e^{\pi i/2}}{e^{\pi i} + e^{\pi i/4} + 1} = \frac{i}{-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

3.

注意

1. 複素平面上の全ての点で指数関数 e^z は連続，原点以外で対数関数 $\log z$ は連続，分母が 0 以外で有理関数は連続

2. 連続関数の和，差，積，合成はまた連続，分母が 0 以外で商も連続.

(a) z^2 は有理関数．よって全ての点で連続.

(b) 指数関数 e^z は全ての点で連続.

(c) $\frac{2z}{z+i}$ は有理関数．したがって分母が 0 となる点 $z=-i$ で不連続.

(d) $\frac{2z-3}{z^2+2z+2}$ は有理関数．したがって分母が 0 となる点 $z=-1+i,-1-i$ で不連続.

(e) $\frac{z+1}{z^4+1}$ は有理関数．したがって分母が 0 となる点で不連続．つまり $z^4+1=0$ の解となる点で不連続.

$$z^4=-1=e^{i\pi} \text{より } z_k=(\cos\frac{pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4})\ (k=0,1,2,3)$$

したがって，

$$z_0=\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}, z_1=\frac{(-1+i)}{\sqrt{2}}, z_2=\frac{(-1-i)}{\sqrt{2}}, z_3=\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$$

(f) $\frac{z^2+4}{z-2i}$ は有理関数．したがって分母が 0 となる点 $z=2i$ で不連続.

(g) $f(z)=\begin{cases}\frac{z^2+4}{z-2i} & (z\neq 2i)\\ 4i & (z=2i)\end{cases}$ は $z=2i$ 以外では有理関数．したがって分母が 0 となる点 $z=2i$ 以外では連続．では分母が 0 となる点で連続だろうか．$f(z)$ は区分的関数．したがって連続性を調べるには定義に戻る必要がある．つまり

$$\lim_{z\to 2i} f(z)=f(2i)$$

が成り立てば $z=2i$ で連続である.

$$\lim_{z\to 2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{z^2+4}{z-2i}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z+2i)(z-2i)}{z-2i}=4i$$

また $f(2i)=4i$ より点 $z=2i$ でも連続である.

3.2 正則関数

1.

微分公式と微分法を確認しよう.

(a)

$$\begin{aligned}(z^3-2z^2+3z)' &= (z^3)'-2(z^2)'+3z' \text{ (和の導関数は導関数の和)}\\ &= 3z^2-4z+3\ ((z^\alpha)'=\alpha z^{\alpha-1})\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}((z^2+i)^3)' &= 3(z^2+i)^2(z^2+i)' \text{ (合成関数の微分法より)}\\ &= 3(z^2+i)^2(2z) = 6z(z^2+i)^2\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(\frac{z-i}{z+i})' &= \frac{(z-i)'(z+i)-(z-i)(z+i)'}{(z+i)^2} \text{ (商の微分法より)}\\ &= \frac{z+i-(z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}\end{aligned}$$

2.

(a)

$$\begin{aligned}(\tan z)' &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{(\sin z)'(\cos z)-(\sin z)(\cos z)'}{(\cos z)^2} \text{ (商の微分法より)}\\ &= \frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2} = \sec^2 z\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(\frac{1}{\cos z})' &= \frac{-(\cos z)'}{(\cos z)^2} \text{ (商の微分法より)}\\ &= \frac{\sin z}{\cos^2 z} = \sec z \tan z\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(\sqrt{z^2+1})' &= ((z^2+1)^{1/2})' = \frac{1}{2}(z^2+1)^{-1/2}(z^2+1)' \text{ (合成関数の微分法より)}\\ &= z(z^2+1)^{-1/2}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}(\sin^2 z)' &= ((\sin z)^2)' = 2(\sin z)(\sin z)' \text{ (合成関数の微分法より)}\\ &= 2\sin z\cos z\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}(\log(z^2+4i))' &= \frac{1}{z^2+4i}(z^2+4i)' \text{ (合成関数の微分法より)}\\ &= \frac{2z}{z^2+4i}\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}(i^{\cos z})' &= (e^{\cos z\log i})' \text{ ($a^z = e^{z\log a}$より)}\\ &= e^{\cos z\log i}(\cos z\log i)' \text{ (合成関数の微分法より)}\\ &= e^{\cos z\log i}(-\sin z\log i) = -i^{\cos z}\sin z\log i\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}(\sin^{-1}(z-i))' &= \frac{1}{\sqrt{1-(z-i)^2}}(z-i)' \text{ (合成関数の微分法より)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(z-i)^2}}\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}(\log(z+\sqrt{z^2+1}))' &= \frac{1}{z+\sqrt{z^2+1}}(z+\sqrt{z^2+1})' \text{ (合成関数の微分法より)}\\ &= \frac{1}{z+\sqrt{z^2+1}}(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}})\\ &= \frac{1}{z+\sqrt{z^2+1}}(\frac{\sqrt{z^2+1}+z}{\sqrt{z^2+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}(\log(\sin^{-1} z))' &= \frac{1}{\sin^{-1} z}(\sin^{-1} z)' \text{ (合成関数の微分法より)}\\ &= \frac{1}{\sin^{-1} z}(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}})\\ &= \frac{1}{\sin^{-1} z\sqrt{1-z^2}}\end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}(z^z)' &= (e^{z\log z})' = e^{z\log z}(z\log z)'\\ &= e^{z\log z}(\log z + z\frac{1}{z}) = z^z(\log z+1)\end{aligned}$$

4.1 線積分とグリーンの定理

1. 複素積分を求めるには，一般に曲線 C を $z(t)=x(t)+iy(t)$ とパラメター化する．

この曲線は点 $(0,1)$ と点 $(1,0)$ を結ぶ直線であるので，$z(t)=(0,1)+(1,-1)t,\ 0\le t\le 1$ とパラメター化できる．したがって，$x(t)=t, y(t)=1-t,\ 0\le t\le 1$．これより

$$\int_c ydx = \int_0^1 (1-t)dt = t-\frac{t^2}{2}\ |_0^1 = \frac{1}{2}$$

別解　この問題は $y=1-x$ と x で表示されているので，直接積分できる．

$$\int_c ydx = \int_0^1 (1-x)dx = x-\frac{x^2}{2}\ |_0^1 = \frac{1}{2}$$

この曲線は点 $(0,1)$ と点 $(1,0)$ を結ぶ直線であるので，$z(t)=(0,1)+(1,-1)t$，$0\leq t\leq 1$ とパラメター化できる．したがって，$x(t)=t, y(t)=1-t$，$0\leq t\leq 1$，$dy=-dt$．これより

$$\int_c x^2dy=\int_0^1 t^2(-dt)=-\frac{t^3}{3}\ |_0^1=-\frac{1}{3}$$

この曲線は点 $(-1,1)$ と点 $(1,1)$ を $y=x^2$ で結ぶ曲線であるので，$x(t)=t, y(t)=t^2$，$-1\leq t\leq 1$，$dy=2tdt$ とパラメター化できる．これより

$$\int_c(xydx-y^2dy)=\int_{-1}^1(t^3-t^4(2t))dt=0\ (t^3,t^5\text{は奇関数}$$

この曲線は中心を原点とする半径 1 の円であるので，$x(t)=\cos t, y(t)=\sin t$，$0\leq t\leq 2\pi$ とパラメター化できる． $dx=-\sin tdt, dy=\cos tdt$ となるので

$$\int_c(xydx-x^3dy)=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t\cos t-\cos^4 t)dt$$

ここで $u=\sin t$ とおくと $du=\cos tdt$, $\begin{array}{ll} t: & 0\to 2\pi \\ u: & 0\to 0 \end{array}$ となるので

$$\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t\cos tdt=\int_0^0 u^2du=0$$

次に

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^4 tdt&=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t)^2dt=\int_0^{2\pi}(\frac{1+\cos 2t}{2})^2dt\\&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt\\&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1=2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2})dt\\&=\frac{1}{4}[\frac{3t}{2}+\cos 2t+\frac{\sin 4t}{8}\ |_0^{2\pi}]\\&=\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

2.

(a) この曲線はすでにパラメター化されている．したがって

$$\begin{aligned}\int_c(x^2+y)dt&=\int_0^1(t+1-t^2)dt=\frac{t^2}{2}+t-\frac{t^3}{3}\ |_0^1\\&=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

(b)　この曲線はすでにパラメター化されている．したがって

$$\int_c xy^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^2 t dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = \frac{2!!}{3!!} = \frac{2}{3}$$

注意　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ 奇数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & (n \text{ 偶数}) \end{cases}$

$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$ を表す．

3.　Green の定理とは，単一閉曲線 C 囲まれた単連結領域 R 上で，偏微分が連続であるような $P(x,y), Q(x,y)$ の線積分は，単連結領域 R での 2 重積分で表せるというものである．つまり

$$\int_c Pdx + Qdy = \int\int_R (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

(a)　Green の定理を用いると

$$\int_c (xy^2 dx - xy^2 dy) = \int\int_R (\frac{\partial(-xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y})dxdy$$
$$\int\int_R (-y^2 - x^2)dxdy = -\int\int_R (x^2 + y^2)dxdy$$
$$= -\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^1 r^2 |J| dr d\theta$$

ここでジャコビアン J を求めると $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r.$

これより

$$\int_c (xy^2 dx - xy^2 dy) = -\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^1 r^2 r dr d\theta$$
$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^1 r^3 dr = -2\pi\frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

(b)　Green の定理を用いると

$$\int_c (ydx + 2xdy) = \int\int_R (\frac{\partial(2x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y})dxdy$$
$$\int\int_R (2-1)dxdy = \int\int_R dxdy$$
$$= R \text{ の面積} = \frac{\pi}{4}$$

4.2 複素積分

1. 単位円をパラメター化すると，$z(t) = e^{it}$，$0 \leq t \leq 2\pi$. これより

$$\begin{aligned}\int_C z\cos z dz &= \int_0^{2\pi} e^{it}\cos(e^{it})ie^{it}dt \quad \left(\begin{array}{ll} u = e^{it} & dv = ie^{it}\cos(e^{it})dt \\ du = ie^{it}dt & v = sin(e^{it}) \end{array}\right. \\ &= e^{it}\sin(e^{it}) \mid_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} ie^{it}\sin(e^{it})dt \\ &= \cos(e^{it}) \mid_0^{2\pi} = \cos(e^{2\pi i}) - \cos(0) = 0\end{aligned}$$

2.

case1. 正方形の辺に沿って，積分経路を 0 から 1,1 から $1+i$ ととる.

0 と 1 を結ぶ直線 c_1 は，$z(t) = (0,0) + (1,0)t$，$0 \leq t \leq 1$ とパラメター化できる．したがって，$x(t) = t, y(t) = 0$，$0 \leq t \leq 1$. これより $z = x + iy = t$ となり

$$\int_{c_1} \bar{z}dz = \int_0^1 t(dt) = \frac{t^2}{2} \mid_0^1 = \frac{1}{2}$$

1 と $1+i$ を結ぶ直線 c_2 は，$z(t) = (1,0) + (0,1)t$，$0 \leq t \leq 1$ とパラメター化できる．したがって，$x(t) = 1, y(t) = t$，$0 \leq t \leq 1$. これより $z = x + iy = 1 + it$ となり

$$\int_{c_2} \bar{z}dz = \int_0^1 (1-it)(idt) = \int_0^1 (i+t)dt = [it + \frac{t^2}{2} \mid_0^1 = i + \frac{1}{2}$$

これより求める積分は

$$\int_c \bar{z}dz = \int_{c_1} \bar{z}dz + \int_{c_2} \bar{z}dz = 1 + i$$

case2. 正方形の辺に沿って，積分経路を 0 から i,i から $1+i$ ととる.

0 と i を結ぶ直線 c_3 は，$z(t) = (0,0) + (0,1)t$，$0 \leq t \leq 1$ とパラメター化できる．したがって，$x(t) = 0, y(t) = 1$，$0 \leq t \leq 1$. これより $z = x + iy = it$ となり

$$\int_c \bar{z}dz = \int_0^1 (-it)(idt) = \frac{t^2}{2} \mid_0^1 = \frac{1}{2}$$

i と $1+i$ を結ぶ直線 c_4 は，$z(t) = (0,1) + (1,0)t$，$0 \leq t \leq 1$ とパラメター化できる．したがって，$x(t) = t, y(t) = 1$，$0 \leq t \leq 1$. これより $z = x + iy = t + i$ となり

$$\int_c \bar{z}dz = \int_0^1 (t-i)(dt) = [\frac{t^2}{2} - it \mid_0^1 = \frac{1}{2} - i$$

これより求める積分は

$$\int_c \bar{z}dz = \int_{c_3} \bar{z}dz + \int_{c_4} \bar{z}dz = 1 - i$$

case3. 正方形の対角線に沿って，積分経路を 0 から $1+i$ ととる.

0 と $1+i$ を結ぶ直線 c_5 は，$z(t)=(0,0)+(1,1)t$，$0\le t\le 1$ とパラメター化できる．したがって，$x(t)=t, y(t)=t$，$0\le t\le 1$．これより $z=x+iy=t+it$ となり

$$\int_{c_5}\bar{z}dz=\int_0^1(t-it)(1+i)dt=\int_{c_5}2tdt=t^2\ |_0^1=1$$

4.3 コーシーの積分定理

1.　a 点から出発し，b 点に到達する曲線を C_1 とすると，b 点と a 点を結ぶ曲線は $-C_2$ と表せる．ここで $C=C_1-C_2$ とおくと，曲線 C は領域 D に含まれる閉曲線である．ここで，コーシーの積分定理を用いると

$$\begin{aligned}0&=\int_C f(z)\ dz=\int_{C_1}f(z)\ dz+\int_{-C_2}f(z)\ dz\\&=\int_{C_1}f(z)\ dz-\int_{C_2}f(z)\ dz\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_{C_1}f(z)\ dz=\int_{C_2}f(z)\ dz$$

まず，曲線を C_1 から曲線は C_2 に橋をかける．次に曲線 C_1 に沿って回りながら，橋を渡って曲線 C_2 に移り，逆回りをし，元の橋を渡って曲線 C_1 に戻り一周する曲線を C とする．このとき，C は領域 D に含まれる閉曲線となるので，コーシーの積分定理を用いると

$$\begin{aligned}0&=\int_C f(z)\ dz=\int_{C_1}f(z)\ dz+\int_{-C_2}f(z)\ dz\\&=\int_{C_1}f(z)\ dz-\int_{C_2}f(z)\ dz\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_{C_1}f(z)\ dz=\int_{C_2}f(z)\ dz$$

曲線 C は原点を中心とする半径 $r>1$ の円周であるので，$f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ はこの円内で正則ではない．そこで，$f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ を部分分数分解すると

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{2i}[\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}]$$

ここで，積分の基本公式

$$\int_{|z-a|=r}\frac{1}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i & n=1\\0 & n\neq i\end{cases}$$

を用いると

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z^2+1}\ dz = \frac{1}{2i}[\int_{|z|=r} \frac{1}{z-1}\ dz - \int_{|z|=r} \frac{1}{z-1}\ dz$$
$$= \frac{1}{2i}[2\pi i - 2\pi i] = 0$$

曲線 C は原点を中心とする半径 1 の円周であるので，$f(z) = \frac{z}{(2z+i)(z-2)}$ はこの円内で正則ではない．そこで，$f(z) = \frac{z}{(2z+i)(z-2)}$ を部分分数分解すると

$$\frac{z}{(2z+i)(z-2)} = \frac{A}{2z+i} + \frac{B}{z-2}$$

両辺の分母を払うと

$$z = A(z-2) + B(2z+i)$$

ここで $z = 2$ とおくと

$$2 = B(4+i) \Rightarrow B = \frac{2}{4+i}$$

また，$z = -\frac{i}{2}$ とくと

$$-\frac{i}{2} = A(-\frac{i}{2} - 2) \Rightarrow A = \frac{i}{4+i}$$

よって

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{(2z+i)(z-2)} = \frac{i}{4+i}\int_{|z|=1} \frac{1}{2z+i}\ dz + \frac{2}{4+i}\int |z| = 1 \frac{1}{z-2}\ dz$$

ここで，積分の基本公式

$$\int_{|z-a|=r} \frac{1}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq i \end{cases}$$

を用いると

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{(2z+i)(z-2)} = \frac{i}{4+i}\int_{|z|=1} \frac{1}{2(z+i/2)}\ dz + 0$$
$$= \frac{i}{2(4+i)} \cdot 2\pi i = \frac{-\pi}{4+i} = -\frac{4-i}{17}\pi$$

この曲線は原点を中心とし，半径 r ¿ 1 の円の上半円周と，実軸上の直径より，$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ はこの曲線内で正則ではない．そこで，$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ を部分分数分解する．$z^4 = -1$ の解は

$$z_k = \cos(\frac{\pi + 2k\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi + 2k\pi}{4},\ k = 0, 1, 2, 3$$

で与えられるので

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{4}}, z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = e^{\frac{3\pi}{4}}, z_2 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, z_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

よって

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{A}{z-z_0} + \frac{B}{z-z_1} + \frac{C}{z-z_2} + \frac{D}{z-z_3}$$

の中で，係数を求める必要があるのは A と B だけである．

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z_0^3} \\
&= \frac{1}{4}z_0^{-3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi}4 \\
B &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z_1^3} \\
&= \frac{1}{4}z_1^{-3} = \frac{1}{4}e^{-9\pi}4
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{z^4+1}\ dz &= A\int_C \frac{1}{z-z_0}\ dz + B\int_C \frac{1}{z-z_1} \\
&= \frac{1}{4}e^{-3\pi}4\cdot 2\pi i + \frac{1}{4}e^{-9\pi i}\cdot 2\pi i \\
&= \frac{\pi i}{2}[e^{\frac{-3\pi i}{4}} + e^{\frac{-9\pi i}{4}}] \\
&= \frac{\pi i}{2}[\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}] = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

3.

(a)

$$\int_i^1 z^2 dz = \frac{1}{3}z^3\ |_i^1 = \frac{1+i}{3}$$

(b)

$$\int_0^i ze^z\ dz = [ze^z - e^z\ |_0^i = ie^i - e^i$$

(c)　この問題を解く前に次のことを思いだす．

$$\log z = \log_e |z| + i\arg z$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{1+i} \frac{z}{z+1}\ dz &= \int_0^{1+i}(1-\frac{1}{z+1})\ dz \\
&= [z - \log(z+1)\ |_0^{1+i} = 1+i-\log(2+i) = 1+i-(\log_e|2+i| + i\arg(2+i)) \\
&= 1+i-\frac{1}{2}\log_e(5) - i\tan^{-1}\frac{1}{2} \\
&= 1-\frac{1}{2}\log_e 5 + i(1-\tan^{-1}(\frac{1}{2}))
\end{aligned}$$

(d)　この問題を解く前に次のことを思いだす．

$$(\sin^{-1} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\log(iz + \sqrt{1-z^2})$$

$$\begin{aligned}\int_0^i \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\ dz &= [\sin^{-1} z\ |_0^i \\ &= \sin^{-1} i - \sin^0 = \frac{1}{i}[\log(i^2 + \sqrt{1-i^2}) - \log 1 \\ &= \frac{1}{i}\log(-1+\sqrt{2}) = \frac{1}{i}[\log_e |-1+\sqrt{2}| + i\arg(-1+\sqrt{2})] \\ &= \frac{1}{i}[\log_e(\sqrt{2}-1)]\end{aligned}$$

4. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ を満たす関数 $u(x,y)$ を調和関数という．また，Δ をラプラシアンといい，$\Delta u = 0$ の式をラプラス方程式という．u を実部にもつ正則関数 $w = u + iv$ はコーシー・リーマンの方程式を満たすことを確認しておく．

(a) $u = x^2 - y^2$ について Δu を求めると

$$u_x = 2x, u_{xx} = 2, u_y = -2y, u_{yy} = -2$$

したがって，$\Delta u = 0$ となるので，u は調和関数．次に u を実部にもつ正則関数 w を求める．$w = u + iv$ とおくと

$$u_x = v_y = 2x, v_x = -u_y = 2y$$

より

$$v(x,y) = \int v_y\ dy = \int 2x dy = 2xy + \phi(x) \tag{A.1}$$

式 A.1 を x で偏微分すると

$$v_x = 2y + (\phi(x))' \tag{A.2}$$

ここで，条件より $v_x = 2y$ より $\phi'(x) = 0$ よって $\phi(x) = c$ となり

$$v(x,y) = 2xy + c$$

(b) $u = e^x \cos y$ について Δu を求めると

$$u_x = e^x \cos y, u_{xx} = e^x \cos y, u_y = -e^x \sin y, u_{yy} = -e^x \cos y$$

したがって，$\Delta u = 0$ となるので，u は調和関数．次に u を実部にもつ正則関数 w を求める．$w = u + iv$ とおくと

$$u_x = v_y = e^x \cos y, v_x = -u_y = e^x \sin y$$

より

$$\begin{aligned}v(x,y) &= \int v_y\ dy = \int e^x \cos y\ dy = e^x \sin y + \phi(x) \\ v_x &= e^x \sin y + (\phi(x))' = e^x \sin y \text{ より} \phi(x) = c \text{ (定数) よって} \\ v(x,y) &= e^x \sin y + c\end{aligned}$$

(c)　$u = \cos x \sinh y$ について Δu を求めると

$$u_x = -\sin x \sinh y, u_{xx} = -\cos x \sinh y, u_y = \cos x \cosh y, u_{yy} = \cos x \sinh y$$

したがって，$\Delta u = 0$ となるので，u は調和関数．次に u を実部にもつ正則関数 w を求める．$w = u + iv$ とおくと

$$u_x = v_y = e^x \cos y, v_x = -u_y = e^x \sin y$$

より

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int v_y \ dy = \int e^x \cos y \ dy = e^x \sin y + \phi(x) \\ v_x &= e^x \sin y + (\phi(x))' = e^x \sin y \text{ より} \phi(x) = c \text{ (定数) よって} \\ v(x,y) &= e^x \sin y + c \end{aligned}$$

(d)　$u = \frac{1}{2}\log_e(x^2+y^2)$ について Δu を求めると

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}, u_{xx} = \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{y}{x^2+y^2}, u_{xx} = \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

したがって，$\Delta u = 0$ となるので，u は調和関数．次に u を実部にもつ正則関数 w を求める．$w = u + iv$ とおくと

$$u_x = v_y = \frac{x}{x^2+y^2}, v_x = -u_y = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

より

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int v_y \ dy = \int \frac{x}{x^2+y^2} \ dy \\ &= x(\frac{1}{x}\tan^{-1}(\frac{y}{x})) + \phi(x) \text{ (注 } \int \frac{1}{a^2+t^2} \ dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{t}{a}) \\ &= \tan^{-1}(\frac{y}{x}) + \phi(x) \end{aligned}$$

これを x で偏微分すると

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{-\frac{y}{x}}{(1+(\frac{y}{x}))^2} + \phi'(x) \\ &= -\frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \phi'(x) \end{aligned}$$

条件より $v_x = -\frac{y}{(x^2+y^2)^2}$ なので $\phi'(x) = 0$．よって $\phi(x) = c$．これより

$$v(x,y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) + c$$

4.4 コーシーの積分表示

2. コーシーの積分表示

$z=a$ が曲線 C の内部にあり $f(z)$ が曲線 C を含む領域で正則ならば

$$\int_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

コーシーの積分定理

$\frac{f(z)}{z-a}$ が曲線 C の内部で正則ならば

$$\int_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0$$

(a) $|z|=3$ より $z=2$ はこの曲線の内部にある．よって，コーシーの積分表示より

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2}\,dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i e^2$$

(b) $|z|=1$ より $z=2$ はこの曲線の内部にない．よって，被積分関数は正則となるのでコーシーの積分定理より

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2}\,dz = 0$$

(c) $|z|=3$ より $z=0$ はこの曲線の内部にある．よって，コーシーの積分表示より

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin^3 z}{z}\,dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \sin^3 0 = 0$$

(d) $|z|=3$ より $z=\frac{\pi i}{2}$ はこの曲線の内部にある．よって，コーシーの積分表示より

$$\begin{aligned}\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{2z-\pi i}\,dz &= \frac{1}{2}\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{z-\frac{\pi i}{2}}\,dz \\ &= \pi i f(\frac{\pi i}{2}) = \pi i e^{\frac{3\pi i}{2}} \\ &= \pi i(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)) = \pi i(-i) = \pi\end{aligned}$$

(e) $|z|=1$ より $z=\frac{\pi i}{2}$ はこの曲線の内部にない．よって，被積分関数は正則となるのでコーシーの積分定理より

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{3z}}{2z-\pi i}\,dz = 0$$

(f) $|z|=3$ より $z=\pm i$ はこの曲線の内部にある．よって，コーシーの積分表示より

$$\begin{aligned}\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz &= \frac{1}{2i}\int_{|z|=3} \cos z(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i})\,dz \\ &= \frac{1}{2i}[2\pi i(f(i) - f(-i))] = \pi[\cos(i) - \cos(-i)] \\ &= \pi[\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} - (\frac{e^{-i^2}+e^{i^2}}{2})] = 0\end{aligned}$$

(g)　$|z|=1$ より $z=0$ はこの曲線の内部にある．よって，コーシーの積分表示より

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{2\pi i e^0}{6} = \frac{\pi i}{3}$$

(h)　$|z|=3$ より $z=\frac{\pi}{2}$ はこの曲線の内部にある．よって，コーシーの積分表示より

$$\begin{aligned}\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(2z-\pi)^3}\,dz &= \frac{1}{8}\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-\pi/2)^3}\,dz \\ &= \frac{1}{8}\frac{2\pi i}{2!} f''(\frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

ここで $f(z)=\sin z$ より $f'(z)=\cos z, f''(z)=-\sin z$ より $f''(\frac{\pi}{2})=-1$ よって

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(2z-\pi)^3}\,dz = -\frac{1}{8}\frac{2\pi i}{2!} = -\frac{\pi i}{8}$$

(i)　$|z|=1$ より $z=\frac{\pi}{2}$ はこの曲線の内部にない．よって，被積分関数は正則となるのでコーシーの積分定理より

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{3z}}{2z-\pi i}\,dz = 0$$

5.1 ローラン展開

1.　$z=0$ を中心としたローラン展開とは

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$$

の形で表わしたものである．

ローラン展開するには次のテーラー展開を知っていると便利である．

$$\begin{aligned}e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots + \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + \\ \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots + \quad (\text{ただし，} |z|<1)\end{aligned}$$

(a)　$|z|<1$ より $\frac{1}{1-z}$ はテーラー展開できることに注意し，$\frac{1}{z^2-3z+2}$ をまず，部分分数分解する．

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-3z+2} &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \\ &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\end{aligned}$$

ここで $\frac{-1}{z-1} = \frac{-1}{1-z}$ となるので

$$\frac{-1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -(1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

次に $\frac{1}{z-2}$ の分母を $|z|<1$ より 2 でくくると

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

と表わせる．ここで $|\frac{z}{2}|<1$ よりテーラー展開できるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} &= \frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+(\frac{z}{2})^2+(\frac{z}{2})^3+\cdots+ = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-3z+2} &= \frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(z^n-(\frac{z}{2})^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^n}z^n)\end{aligned}$$

(b)　$1<|z|<2$ より $\frac{1}{1-z}$ はこのままではテーラー展開できないが，

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

と表わすと $|\frac{1}{z}|<1$ となりテーラー展開可能となることに注意し，$\frac{1}{z^2-3z+2}$ をまず，部分分数分解する．

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-3z+2} &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2} \\ &= \frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}\end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{z-1}$ の分母を $|z|>1$ より z でくくると $\frac{-1}{z-1} = \frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ となるので

$$\begin{aligned}\frac{-1}{z-1} &= \frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+(\frac{1}{z})^2++\cdots) \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1}\end{aligned}$$

次に $\frac{1}{z-2}$ の分母を $|z|<2$ より 2 でくくると

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

と表わせる．ここで $|\frac{z}{2}|<1$ よりテーラー展開できるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2}&=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\\&=-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+(\frac{z}{2})^2+(\frac{z}{2})^3+\cdots+=-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-3z+2}&=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n\end{aligned}$$

(c)　$|z|>2$ より $\frac{1}{1-z}$ はこのままではテーラー展開できないが，

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

と表わすと $|\frac{1}{z}|<1$ となりテーラー展開可能となることに注意し，$\frac{1}{z^2-3z+2}$ をまず，部分分数分解する．

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-3z+2}&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}\\&=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}\end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{z-1}$ の分母を $|z|>2$ より z でくくると $\frac{-1}{z-1}=\frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ となるので

$$\begin{aligned}\frac{-1}{z-1}&=\frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+(\frac{1}{z})^2++\cdots)\\&=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1}\end{aligned}$$

次に $\frac{1}{z-2}$ の分母を $|z|>2$ より z でくくると

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

と表わせる．ここで $|\frac{2}{z}| < 1$ よりテーラー展開できるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\ &= \frac{1}{z}(1+\frac{2}{z}+(\frac{2}{z})^2+(\frac{2}{z})^3+\cdots+ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{z^{n+1}}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-3z+2} &= \frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{z^{n+1}} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}\end{aligned}$$

2.

(a)　$z=0$ でのローラン展開なので $\frac{1}{z^3}$ は何もする必要がない．したがって，$\frac{1}{z+1}$ のテーラー展開を行なうと

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = 1+(-z)+(-z)^2+(-z)^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3(z+1)} &= \frac{1}{z^3}\frac{1}{z+1} \\ &= \frac{1}{z^3}(1+(-z)+(-z)^2+(-z)^3+\cdots) \\ &= \frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z-z^2+\cdots\end{aligned}$$

また，特異点 0 は 3 位の極

(b)　$z=-1$ でのローラン展開のときは $t=z+1$ とおくと

$$\frac{1}{z^3(z+1)} = \frac{1}{(t-1)^3 t}$$

となり $t=0$ でのローラン展開となる．$\frac{1}{t}$ は何もする必要がない．したがって，$\frac{1}{(t-1)^3}$ のテーラー展開を行なうと

$$\frac{1}{(t-1)^3} = (-\frac{1}{1-t})^3 = -(1+t+t^2+\cdots)^3 = -(1+3t+6t^2+10t^3+\cdots)$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3(z+1)} &= \frac{1}{(t-1)^3 t}\\ &= -\frac{1}{t}(1+3t+6t^2+10t^3+\cdots)\\ &= -[\frac{1}{t}+3+6t+10t^2+\cdots]\\ &= -[\frac{z+1}{+}3+6(z+1)+10(z+1)^2+\cdots]\end{aligned}$$

また，特異点 $z=-1$ は 1 位の極

(c)　$z=0$ でのローラン展開なので $\frac{1}{z^3}$ は何もする必要がない．したがって，e^{z^2} のテーラー展開を行なうと

$$e^{z^2} = 1+z^2+\frac{(z^2)^2}{2!}+\frac{(z^2)^3}{3!}+\cdots$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{e^{z^2}}{z^3} &= \frac{1}{z^3}e^{z^2}\\ &= \frac{1}{z^3}(1+z^2+\frac{(z^2)^2}{2!}+\frac{(z^2)^3}{3!}+\cdots)\\ &= \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}+\frac{z}{2}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\end{aligned}$$

また，特異点 $z=0$ は 3 位の極

(d)　$z=\pi$ でのローラン展開のときは $t=z-\pi$ とおくと

$$\frac{\sin z}{z-\pi} = \frac{\sin(t+\pi)}{t} = \frac{-\sin t}{t}$$

となり $t=0$ でのローラン展開となる．$\frac{1}{t}$ は何もする必要がない．したがって，$-\sin t$ のテーラー展開を行なうと

$$-\sin t = -(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z-\pi} &= \frac{-\sin t}{t}\\ &= -\frac{1}{t}(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots)\\ &= -1+\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+\cdots\\ &= -1+\frac{(z-\pi)^2}{3!}-\frac{(z-\pi)^4}{5!}+\cdots\end{aligned}$$

また，特異点 $z=\pi$ は除去可能な特異点

5.2 留数

1.　特異点とは関数 $f(z)$ が正則でない点のことである．有理関数では分母が 0 となる点のことである．

基本公式

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-z)^n}\ dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

この公式から分かるように，ローラン展開したときに $\frac{1}{z-a}$ の積分は 0 にならないが，それ以外は全て 0 になる．このことから積分したときに 0 とならないものという意味で $\frac{1}{z-a}$ の係数を留数といい，$Res[a]$ と表わす．

留数公式　点 a が $f(z)$ の m 位の特異点のとき

$$Res[a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z)$$

(a)　分母が 0 となる点は $z = 0, 1$ である．そこで $z = 0, 1$ の留数を求める．$\frac{1}{z(z-1)^2}$ を部分分数分解すると

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

ここで分母を払うと

$$1 = A(z-1)^2 + Bz(z-1) + Cz$$

より $z = 0$ とおくと

$$1 = A$$

$z = 1$ とおくと

$$1 = C$$

z^2 の係数合わせをすると

$$0 = A + B \Rightarrow B = -A = -1$$

よって

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{z} + \frac{-1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

これより

$$Res[0] = \frac{1}{z}\text{の係数} = 1$$

$$Res[1] = \frac{1}{z-1}\text{の係数} = -1$$

(b)　分母が 0 となる点は $z = -\frac{1}{2}, 2$ である．そこで $z = -\frac{1}{2}, 2$ の留数を求める．$\frac{z}{(2z+1)(z-2)}$ を部分分数分解すると

$$\frac{z}{(2z+1)(z-2)} = \frac{A}{2z+1} + \frac{B}{z-2}$$

ここで分母を払うと

$$z = A(z-2) + B(2z+1)$$

より $z = 2$ とおくと

$$2 = 5B \Rightarrow B = \frac{2}{5}$$

$z = -\frac{1}{2}$ とおくと

$$-\frac{1}{2} = A(-\frac{5}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

よって

$$\frac{z}{(2z+1)(z-2)} = \frac{1/5}{2z+1} + \frac{2/5}{z-2}$$

であるが，留数は $\frac{1}{z-a}$ の係数であるので，次のように表わす．

$$\frac{z}{(2z+1)(z-2)} = \frac{1/5}{2(z+\frac{1}{2}} + \frac{2/5}{z-2}$$

これより

$$Res[2] = \frac{1}{z-2}\text{の係数} = \frac{2}{5}$$

$$Res[-\frac{1}{2}] = \frac{1}{z+\frac{1}{2}}\text{の係数} = \frac{1}{10}$$

(c)　分母が 0 となる点は $z = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ である．そこで $n\pi$ の留数を求める．$\frac{1}{\sin z}$ は部分分数分解できないので，$\sin z$ を $z = n\pi$ でテーラー展開し，その後割り算をする．そこで $t = z - n\pi$ とおくと

$$\sin z = \sin(t + n\pi) = \begin{cases} \sin t, & n \text{ 偶数} \\ -\sin t, & n \text{ 奇数} \end{cases}$$

となる．そこで，まず，n が偶数の場合を考えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{\sin t} \\ &= \frac{1}{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots} = \frac{1}{t} + \frac{t}{3!} + \cdots \\ &= \frac{1}{z - n\pi} + \frac{z - n\pi}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

これより

$$Res[n\pi] = \frac{1}{z - n\pi}\text{の係数} = 1$$

次に，n が奇数の場合を考えると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin z} &= -\frac{1}{\sin t}\\ &= -\frac{1}{t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots} = \frac{1}{t}+\frac{t}{3!}+\cdots\\ &= -\frac{1}{z-n\pi}-\frac{z-n\pi}{3!}-\cdots\end{aligned}$$

これより

$$Res[n\pi] = \frac{1}{z-n\pi}\text{の係数} = -1$$

(d) 分母が 0 となる点は $z=1,-2$ である．そこで $z=1,-2$ の留数を求める．$\frac{e^z}{(z-1)(z+2)^2}$ を部分分数分解すると

$$\frac{e^z}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{(z+2)^2}$$

ここで分母を払うと

$$e^z = A(z+2)^2+B(z-1)(z+2)+C(z-1)$$

より $z=1$ とおくと

$$e = 9A \Rightarrow A = \frac{e}{9}$$

$z=-2$ とおくと

$$e^{-2} = -3C \Rightarrow C = \frac{-e^{-2}}{3}$$

これより

$$Res[1] = \frac{1}{z-1}\text{の係数} = \frac{e}{9}$$

最後に B を求めたいのだが，係数合わせは使えない．なぜなら e^z は多項式ではない．そこで，ヘービサイドの展開定理を用いるか留数公式を用いる．ここでは留数公式を用いる．-2 は 2 位の極なので

$$Res[-2] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-2}\frac{d}{dz}(z+2)^2\frac{e^z}{(z-1)(z+2)^2} = -\frac{4e^{-2}}{9}$$

2. 留数定理

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C の上および内部で，その内部にある有限個の点 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ を除いて正則な 1 価関数であるとき

$$\int_C f(z)\ dz = 2\pi i\{Res[a_1]+Res[a_2]+\cdots+Res[a_n]\}$$

が成り立つ．

(a) 留数定理より

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)^2} = 2\pi i\{Res[0] + Res[1]\} \ (z = 0, 1 \text{ は } |z| = 2 \text{ に含まれる})$$
$$= 2\pi i(1-1) = 0 \quad \text{演習 } A\text{の結果より}$$

(b) 留数定理より

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{(2z+1)(z-2)}\ dz = 2\pi i Res[-\frac{1}{2}] \ (z = 2 \text{ は } |z| = 1 \text{ に含まれない})$$
$$= 2\pi i\frac{1}{10} = \frac{\pi i}{5} \ \text{演習 } A\text{の結果より}$$

(c) 留数定理より

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i Res[0] \ (z = 0 \text{ だけ } |z| = 1 \text{ に含まれる})$$
$$= 2\pi i \quad \text{演習 } A\text{の結果より}$$

(d) 留数定理より

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)(z+2)^2}\ dz = 2\pi i(Res[1] + Res[-2]) \ (z = 1, 2 \text{ は } |z| = 3 \text{ に含まれる})$$
$$= 2\pi i(\frac{e}{9} - \frac{e^{-2}}{9}) \quad \text{演習 } A\text{の結果より}$$
$$= \frac{2\pi i}{9}(e - e^{-2})$$

3.

(a) $|z| = 1$ の円には特異点 $z = 0$ だけが含まれる．ここで $Res[0]$ を求めると

$$Res[0] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} z^2 (\frac{e^{2z}}{z^2(z^2+2z+2)}$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} (\frac{e^{2z}}{z^2+2z+2})$$
$$= \lim_{z\to 0} (\frac{2e^{2z}(z^2+2z+2) - e^{2z}(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2}$$
$$= \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$$

よって留数定理より

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^2(z^2+2z+2)}\ dz = 2\pi i Res[0] = \pi i$$

(b) $|z - i| = 2$ の円には特異点 $z = 0, -1 + i$ が含まれる．ここで $Res[0]$ はすでに A で求め

たので $Res[-1+i]$ を求めると

$$\begin{aligned}
Res[-1+i] &= \lim_{z\to -1+i}(z-(-1+i))(\frac{e^{2z}}{z^2(z^2+2z+2)} \\
&= \lim_{z\to -1+i}(\frac{e^{2z}}{z-(-1-i)}) \\
&= \frac{e^{2(-1+i)}}{(-1+i)^2(-1+i+1+i)} \\
&= \frac{e^{2(-1+i)}}{4}
\end{aligned}$$

よって留数定理より

$$\begin{aligned}
\int_{|z-i|=2} \frac{e^{2z}}{z^2(z^2+2z+2)}\ dz &= 2\pi i(Res[0]+Res[-1+i]) \\
&= 2\pi i(\frac{1}{2}+\frac{e^{2(-1+i)}}{4})
\end{aligned}$$

(c) $|z|=3$ の円には特異点 $z=0,-1+i,-1-i$ の全てが含まれる．ここで $Res[0], Res[-1+i]$ はすでに A で求めたので $Res[-1-i]$ を求めると

$$\begin{aligned}
Res[-1-i] &= \lim_{z\to -1-i}(z-(-1-i))(\frac{e^{2z}}{z^2(z^2+2z+2)} \\
&= \lim_{z\to -1-i}(\frac{e^{2z}}{z-(-1+i)}) \\
&= \frac{e^{2(-1-i)}}{(-1-i)^2(-1-i+1-i)} \\
&= \frac{e^{-2(1+i)}}{4}
\end{aligned}$$

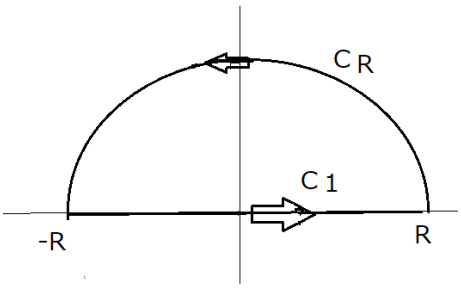
よって留数定理より

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2(z^2+2z+2)}\ dz &= 2\pi i(Res[0]+Res[-1+i]+Res[-1-i]) \\
&= 2\pi i(\frac{1}{2}+\frac{e^{2(-1+i)}}{4}+\frac{e^{-2(1+i)}}{4}) \\
&= 2\pi i(\frac{1}{2}+\frac{e^{-2}e^{-2i}+e^{-2}e^{2i}}{4}) \\
&= 2\pi i(\frac{1}{2}+\frac{e^{-2}}{2}\frac{e^{2i}+e^{-2i}}{2}) \\
&= \pi i(1+\frac{e^{-2}}{\cos}2)
\end{aligned}$$

5.3 実積分への応用

1.

(a)



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

より閉曲線 C を実軸上の $-R$ と R を結ぶ直線と R と $-R$ を結ぶ半径 R，中心 0 の曲線 C_R とすると，

$$\int_C \frac{1}{z^2+z+1}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx + \int_{C_R} \frac{1}{z^2+z+1}\,dz$$

と表わせる．ここで，$\int_C \frac{1}{z^2+z+1}\,dz$ を求めると，特異点は $z = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ であるが，$z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ だけが曲線 C の内部にあるので，留数定理により

$$\int_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz = 2\pi i(Res[e^{-\frac{2\pi i}{3}}])$$

で求まる．なお，

$$\begin{aligned} Res[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}] &= \lim_{z\to\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} (z - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2})\frac{1}{z^2+z+1} \\ &= \lim_{z\to\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{2z+1} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \text{ (ロピタルの定理より)} \end{aligned}$$

より

$$\int_C \frac{1}{z^2+z+1}\,dz = 2\pi i(\frac{1}{\sqrt{3}i}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

次に，$\int_{C_R} \frac{1}{z^2+z+1}\,dz \to 0\ (R\to\infty)$ を示せれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int_C \frac{1}{z^2+z+1}\,dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

となり，実積分を求めたことになる．そこで $\int_{C_R} \frac{1}{z^2+z+1}\ dz \to 0\ (R \to \infty)$ を示す．

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,\ |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

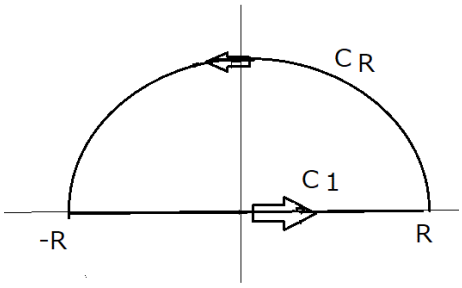
であることに注意すると

$$|z^2 + z + 1| = |z^2 - (-z-1)| \geq |z^2| - |-(z+1)| = |Z^2| - |z| - 1 = R^2 - R - 1$$

より

$$\begin{aligned} |\frac{1}{z^2+z+1}| &\leq \frac{1}{|z^2| - |z| - 1} \\ &\leq \frac{1}{R^2 - R - 1} \to 0\ (R \to \infty) \end{aligned}$$

(b)



$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx$$

より閉曲線 C を実軸上の $-R$ と R を結ぶ直線と R と $-R$ を結ぶ半径 R，中心 0 の曲線 C_R とすると，

$$\int_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\ dz = \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx + \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\ dz$$

と表わせる．ここで，$\int_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\ dz$ を求めると，特異点は $z = \pm i, \pm 2i$ であるが，$z = i, 2i$ だけが曲線 C の内部にあるので，留数定理により

$$\int_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\ dz = 2\pi i(Res[i] + Res[2i])$$

で求まる．なお，

$$Res[i] = \lim_{z \to i}(z-i)\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z \to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{2i(3)} = \frac{1}{6i}$$

$$Res[2i] = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{1}{-3(4i)} = \frac{-1}{12i}$$

より

$$\int_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\ dz = 2\pi i(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}) = 2\pi i(\frac{1}{12i}) = \frac{\pi}{6}$$

次に，$\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\ dz \to 0\ (R\to\infty)$ を示せれば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx = \int_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\ dz = \frac{\pi}{6}$$

となり，実積分を求めたことになる．そこで $\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\ dz \to 0\ (R\to\infty)$ を示す.

$$|z^2+1| = |z^2-(-1)| \geq |z^2| - |-1| = |Z^2| - 1 = R^2 - 1$$
$$|z^2+4| = |z^2-(-4)| \geq |z^2| - |-4| = |z^2| - 4 = R^2 - 4$$

より

$$\begin{aligned}|\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}| &\leq \frac{1}{|z^2+1||z^2+4|}\\ &\leq \frac{1}{R^2-1}\frac{1}{R^2-4} \to 0\ (R\to\infty)\end{aligned}$$

(c)

三角関数の積分である．ここで，曲線 C は中心が原点で半径 1 の円であるので， $z = e^{i\theta}$ とおく．次に，$\sin\theta$ を z を用いて表すと，.

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

また， $dz = ie^{i\theta} = izd\theta$. よって,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin\theta} = \oint_C \frac{1}{2+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{2}{z^2+4iz-1}dz$$

特異点は $z = -2i \pm \sqrt{3}i$ であるが，$z = -2i - \sqrt{3}i$ は曲線 C の外側である．したがって，$z = -2i + \sqrt{3}i$ の留数を求めればよい．$z = -2i + \sqrt{3}i$ は第 1 位の曲であるので,

$$Res[-2i+\sqrt{3}i] = \lim_{z\to -2i+\sqrt{3}i}(z-(-2i+\sqrt{3}i))\frac{1}{z^2+4iz-1} = \lim_{z\to -2i+\sqrt{3}i}\frac{2}{2z+4i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

したがって,

$$\oint_C \frac{2}{z^2+4iz-1}dz = 2\pi i\frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

これより

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \frac{2\pi}{3}$$

(d)　この積分を求めるには, 曲線 C を $z=e^{i\theta}$ で表す．すると $\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}, dz=izd\theta$ となる．よって,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\sin\theta)^2}d\theta=\oint_C\frac{1}{(2+\frac{z-z^{-1}}{2i})^2}\frac{1}{iz}dz$$

ここで，留数定理をもちいて次の積分を求める．　$\oint_C\frac{1}{(2+\frac{z-z^{-1}}{2i})^2}\frac{1}{iz}dz.$

$$(2+\frac{z-z^{-1}}{2i})^2=(2+\frac{z^2-1}{2iz})^2=4+\frac{4(z^2-1)}{2iz}+\frac{z^4-2z^2+1}{-4z^2}=\frac{z^4+8z^3i-18z^2-8zi+1}{-4z^2}$$

これより

$$\frac{1}{(2+\frac{z-z^{-1}}{2i})^2}=\frac{-4z^2}{z^4+8z^3i-18z^2-8zi+1}$$

$z^4+8z^3i-18z^2-8zi+1=(z^2+4iz-1)^2$ と表せるので, 特異点は $z=-2i\pm\sqrt{-3}=-2i\pm\sqrt{3}i$. ただし，$-2i-\sqrt{3}i$ は曲線 C の外側であるから，$-2i+\sqrt{3}i$ の留数だけを求めればよい.

$$\oint_C\frac{1}{(2+\frac{z-z^{-1}}{2i})^2}\frac{1}{iz}dz=\oint_C\frac{-4\pi i}{z^4+8z^3i-18z^2-8zi+1}$$

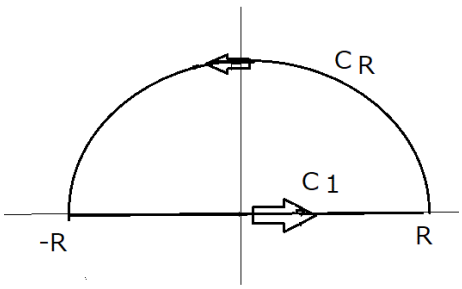
より $z=-2i+\sqrt{3}i$ は第 2 位の極である．よって,

$$Res[-2i+\sqrt{3}i]=\lim_{z\to-(2-\sqrt{3})i}\left(\frac{4\pi i}{(z-(-2-\sqrt{3}i)^2}\right)'=\frac{32\sqrt{3}i}{48}=\frac{-2\sqrt{3}i}{3}$$

したがって,

$$\oint_C\frac{1}{(2+\frac{z-z^{-1}}{2i})^2}\frac{1}{iz}dz=2\pi i(\frac{-2\sqrt{3}i}{3})=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$$

(e)



点 R と $-R$ を結ぶ曲線 C_1，点 R と点 $-R$ を結ぶ曲線 C_R とする．曲線 C はこの直線 C_1 と曲線 C_R でできているとする．ここでは，次のような積分を考える．

$$\int_{C_1}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz=\oint_C\frac{iz}{(z^2+1)\ 2}dz$$

ます，留数定理を用いて $\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz$ の値を求める．$z=\pm i$ が特異点であるが，$z=-i$ は曲線 C の外部である．そこで，$z=i$ の留数を求めると $z=i$ は第 2 位の極であるので，

$$Res[i]=\lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right)'=\frac{-ie^{-1}}{2}$$

したがって，

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz=2\pi i(\frac{-ie^{-1}}{2})=\pi e^{-1}$$

C_1 上での積分を行う．

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx&=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx=\int_{-R}^{0}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx+\int_{0}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx\\&=\int_0^R\frac{e^{-ix}}{(x^2+1)^2}dx+\int_0^R\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx=2\int_0^R\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx\end{aligned}$$

C_R 上での積分を行う．$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dx\to 0$ が $R\to\infty$ で収束することを示す．$|\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}|\le\frac{M}{R^k}$ となる M,k が存在することを示せばよい．

$$\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}|\le\frac{|e^{iz}|}{(z^2+1)^2}\le\frac{1}{z^4-2z^2}\le\frac{1}{R^4-R^2}$$

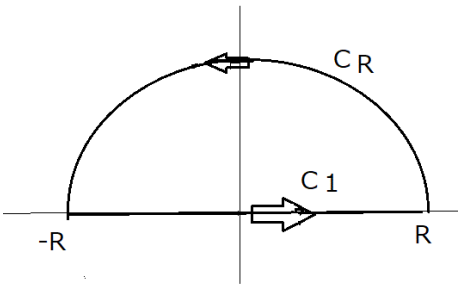
これより，

$$\int_{C_1}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz=\oint_C\frac{iz}{(z^2+1)\ 2}dz=\pi e^{-1}$$

したがって，

$$2\int_0^R\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi}{2e}$$

(f)



点 R と $-R$ を結ぶ曲線 C_1，点 R と点 $-R$ を結ぶ曲線 C_R とする．曲線 C はこの直線 C_1 と曲線 C_R でできているとする．ここでは，次のような積分を考える．

$$\int_{C_1}\frac{-ixe^{imx}}{x^2+1}dx+\int_{C_R}\frac{-ize^{imz}}{z^2+1}dz=\oint_C\frac{-ize^{imz}}{z^2+1}dz$$

まず，留数定理を用いて $\oint_C \frac{-ize^{imz}}{z^2+1}dz$ の値を求める．$z=\pm i$ が特異点であるが， $z=-i$ は曲線 C の外部である．そこで， $z=i$ の留数を求めると $z=i$ は 1 位の極なので．

$$Res[i]=\lim_{z\to i}\frac{-ize^{imz}}{(z+i)(z-i)}=\frac{e^{-m}}{2i}$$

したがって，

$$\oint_C \frac{-ize^{imz}}{z^2+1}dz=2\pi i\frac{e^{-m}}{2i}=\pi e^{-m}$$

C_1 上での積分を考える．

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\frac{-ixe^{imx}}{x^2+1}dx&=\int_{-R}^{R}\frac{-ixe^{imx}}{x^2+1}dx=\int_{-R}^{0}\frac{-ixe^{imx}}{x^2+1}dx+\int_{0}^{R}\frac{-ixe^{imx}}{x^2+1}dx\\&=\int_0^R\frac{ixe^{-imx}}{x^2+1}dx+\int_0^R\frac{-ixe^{imx}}{x^2+1}dx=\int_0^R\frac{-ix(e^{imx}-e^{-imx})}{x^2+1}dx\\&=2\int_0^R\frac{x\sin mx}{x^2+1}dx\end{aligned}$$

C_R 上での積分を行う．$\int_{C_R}\frac{-ize^{imz}}{z^2+1}dx$ が $R\to\infty$ で 0 に収束することを示す． C_R において $z=Re^{i\theta}$ であるから $dz=Rie^{i\theta}$ そして，

$$\begin{aligned}\int_{C_R}|\frac{-ize^{imz}}{z^2+1}|dz&=\int_0^\pi|\frac{-iRe^{i\theta}e^{iRme^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}}Rie^{i\theta}|d\theta=\int_0^R|e^{iRme^{i\theta}}|d\theta\\&=\int_0^\pi|e^{iRm(\cos\theta+i\sin\theta)}|d\theta=\int_0^\pi|e^{iRm(\cos\theta)}\cdot e^{iRm(\sin\theta}|d\theta\\&=\int_0^\pi e^{-Rm\sin\theta}d\theta\end{aligned}$$

ここで，$\sin\theta$ のグラフを考える．$[0,\frac{\pi}{2}]$ と $[\frac{\pi}{2},\pi]$ とに積分を分けると，

$$\int_0^\pi e^{-Rm\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\pi/2}e^{-Rmsin\theta}d\theta$$

また，$[0,\frac{\pi}{2}]$ において，$\sin\theta\geq\frac{2\theta}{\pi}$ が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}2\int_0^{\pi/2}e^{-Rmsin\theta}d\theta&\leq 2\int_0^{\pi/2}e^{-Rm\frac{2\theta}{\pi}}d\theta\\&=2\frac{-\pi}{2Rm}e^{-Rm\frac{2\theta}{\pi}}\ |_0^{\pi/2}\\&=\frac{\pi}{Rm}(e^{-Rm}-1)\to 0\ (R\to\infty)\end{aligned}$$

これより，

$$\int_{C_1}\frac{-ixe^{imx}}{x^2+1}dx+\int_{C_R}\frac{-ize^{imz}}{z^2+1}dz=\oint_C\frac{-ize^{imz}}{z^2+1}dz=\pi e^{-m}$$

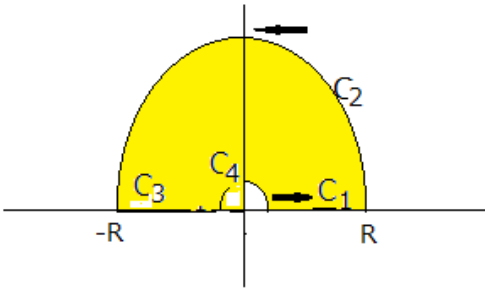
and

$$\int_{C_1}\frac{-ixe^{imx}}{x^2+1}dx=2\int_0^R\frac{x\sin mx}{x^2+1}dx$$

Therefore,

$$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e^m}$$

(g)



$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx$ を解くには, 点 0 が特異点であることに注意し，点 ε と点 R を結ぶ直線を C_1, 点 R と $-R$ を結ぶ曲線 C_2, 点 $-R$ と点 ε を結ぶ直線 C_3, 点 $-\varepsilon$ と点 ε を結ぶ曲線 C_4 を考える．曲線 C は C_1, C_2, C_3, C_4 でできている．ここでは，次のような積分を考える．

$$\int_{C_1}\frac{-ie^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx+\int_{C_2}\frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz+[\int_{C_3}\frac{-ie^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx+\int_{C_4}\frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz = \oint_C\frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz$$

まず，留数定理を用いて $\oint_C \frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz$ の値を求める．$z=0,\pm i$ は得点であるが $z=-i$ は曲線 C の外部である．そこで $z=0,i$ の留数を求める．

$$Res[0] = \lim_{z\to 0}\frac{-zie^{iz}}{z(z^2+1)^2} = -i$$

次に $z=i$ の留数を求める．$z=i$ は 2 位の極であるので,

$$Res[i] = \lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}\right)' = \frac{-12ie^{-1}}{-16} = \frac{3i}{4e}$$

したがって,

$$\oint_C\frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz = 2\pi i(-i+\frac{3i}{4e}) = 2\pi - \frac{3\pi}{2e}$$

C_1 と C_3 における積分を行う．

$$\int_\varepsilon^R\frac{-ie^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx + \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{-ie^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx$$

$x=-u$ とおくと，$dx=-du$,　$x:-R\to-\varepsilon$, $u:R\to\varepsilon$. これより,

$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{-ie^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx = \int_R^\varepsilon\frac{-ie^{iu}}{(-u)(u^2+1)^2}(-du) = \int_\varepsilon^R\frac{-ie^{-ix}}{x(x^2+1)^2}dx$$

したがって,

$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{-ie^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{-ie^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{ie^{-ix}-ie^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx=2\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix(x^2+1)^2}dx$$
$$=2\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx$$

C_2 における積分を行う．$\int_{C_2}\frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz$ が $R\to\infty$ で 0 に収束することを示す．$z=Re^{i\theta}$ より,

$$\int_{C_2}|\frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz|\leq\frac{1}{|z||z^2-1|^2}|dz|\leq\frac{1}{R(R^4-2R^2)}\pi R\leq\frac{1}{R^4-R^2}$$

したがって，定理より，この積分は R goes to ∞ で 0 に収束する．この結果,

$$\int_{C_2}\frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz=0$$

C_4 における積分を行う．$f(z)=\frac{-ie^{iz}}{z(z^2+1)^2}$ を $z=0$ の周りでの Laurent 展開をすでに行っている．それによると,

$$f(z)=\frac{-i}{z}+1+\frac{z}{2}+\cdots$$

ここで，第 1 項を積分する．$z=\varepsilon e^{i\theta}$ より $dz=\varepsilon ie^{i\theta}$．よって,

$$\int_{C_4}\frac{-i}{z}dz=-i\int_{C_4}\frac{\varepsilon ie^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=\int_{\pi}^{0}d\theta=\pi$$

第 2 項以上は

$$\int_{C_4}\alpha z^n dz=\alpha\int_{\pi}^{0}|\varepsilon^n e^{in\theta}(i\varepsilon e^{i\theta})d\theta|\leq\alpha\int_{\pi}^{0}|i\varepsilon^{n+1}e^{i(n+1)}\theta|d\theta=-\alpha\varepsilon^{n+1}\pi\to 0\ (\varepsilon\to 0)$$

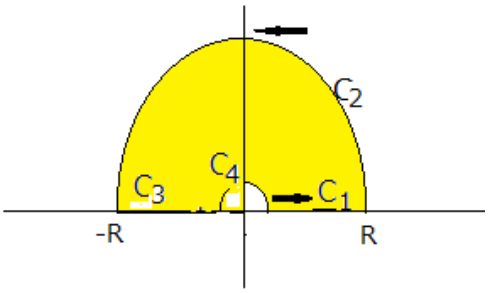
これらを統合すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx=2\pi-\frac{3\pi}{2e}-\pi$$

したがって，,

$$\int_{0}^{\infty}fracsin\,xx(x^2+1)^2dx=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4e}$$

(g)



$\int_0^\infty \frac{1-\cos mx}{x^2}dx$ を解くには，点 ε と点 R を結ぶ直線を C_1, 点 R と $-R$ を結ぶ曲線 C_2, 点 $-R$ と点 ε を結ぶ直線 C_3, 点 $-\varepsilon$ と点 ε を結ぶ曲線 C_4 を考える．曲線 C は C_1, C_2, C_3, C_4 でできている．ここでは，次のような積分を考える．

$$\int_{C_1} \frac{1-e^{imx}}{x^2}dx + \int_{C_2} \frac{1-e^{imz}}{z^2}dz + \int_{C_3} \frac{1-e^{imx}}{x^2}dx + \int_{C_4} \frac{1-e^{imz}}{z^2}dz = \oint_C \frac{1-e^{imz}}{z^2}dz$$

まず，留数定理を用いて $\oint_C \frac{1-e^{imz}}{z^2}dz$ の値を求める．$f(z) = \frac{1-e^{imz}}{z^2}$ を $z = 0$ のまわりで Laurent 展開する．

$$f(z) = \frac{1-(1+imz+\frac{1}{2}(imz)^2+\cdots}{z^2} = \frac{-im}{z} + m^2 + \cdots$$

これより，$z = 0$ は 1 位の極でその留数は $-im$ である．したがって，

$$\oint_C \frac{1-e^{imz}}{z^2}dz = 2\pi i(-im) = 2\pi m$$

次に C_1 と C_3 上で積分を行う．

$$\int_\varepsilon^R \frac{1-e^{imx}}{x^2}dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{imx}}{x^2}dx$$

ここで，$x = -u$ とおくと $dx = -du$，$x : -R \to -\varepsilon$, $u : R \to \varepsilon$ より，

$$\int_\varepsilon^R \frac{1-e^{imx}}{x^2}dx + \int_\varepsilon^R \frac{1-e^{-imx}}{x^2}dx = 2\int_\varepsilon^R \frac{1-\cos mx}{x^2}dx$$

C_2 上において積分を行う．$\int_{C_2} \frac{1-e^{imz}}{z^2}dz \to 0$ が $R \to \infty$ で 0 に収束することを示す．

$$\int_{C_2} \frac{1-e^{imz}}{z^2}dz \leq \frac{1}{|z|^2}|dz| \leq \frac{2\pi R}{R^2} \leq \frac{2\pi}{R} \to 0 \ (R \to \infty)$$

最後に，C_4 上において積分を行う．$f(z) = \frac{1-e^{imz}}{z^2}$ とし，$f(z)$ を $z = 0$ の周りで Laurent 展開すると，

$$f(z) = \frac{1-(1+imz+\frac{(imz)^2}{2}+\cdots)}{z^2} = \frac{-im}{z} + \frac{m^2}{2} + \cdots$$

ここで $z = \varepsilon e^{i\theta}$ とおくと $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$. また， θ は π から 0 に移る．まず，第 1 項について積分すると

$$\int_{C_4} \frac{-im}{z} dz = \int_{\pi}^{0} \frac{-im}{\varepsilon e^{i\varepsilon e^{i\theta}}} (i\varepsilon e^{i\theta}) d\theta = \int_{\pi}^{0} \frac{-im}{i} d\theta = m\theta \mid_{\pi}^{0} = -m\pi$$

第 2 項以下の積分は 0 になるので，

$$\int_{C_1} \frac{1-e^{imx}}{x^2} dx + \int_{C_2} \frac{1-e^{imz}}{z^2} dz + \int_{C_3} \frac{1-e^{imx}}{x^2} dx + \int_{C_4} \frac{1-e^{imz}}{z^2} dz = \oint_C \frac{1-e^{imz}}{z^2} dz = 2m\pi$$

したがって，

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1-\cos mx}{x^2} dx = 2\pi m + m\pi = 3m\pi$$

よって，

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos mx}{x^2} dx = \frac{3m\pi}{2}$$